

A. Die Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ist eine im Wesentlichen eindeutige Zuordnung von Funktionen der Zeit t zu Funktionen einer komplexen Variablen s . Im Rahmen der (einseitigen) Laplace-Transformation werden nur so genannte *kausale Zeitfunktionen* $f(t)$ betrachtet, für die gilt $f(t) = 0$ für $t < 0$.

Definition A.1 (Laplace-Transformation). Es sei angenommen, dass die Zeitfunktion $f(t)$ kausal und auf jedem finiten Zeitintervall $t \geq 0$ stückweise stetig ist sowie der Ungleichung

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad (\text{A.1})$$

für geeignete positive Konstanten γ und M genügt. Dann ist das Integral

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s = \alpha + I\omega \quad (\text{A.2})$$

für alle $\text{Re}(s) = \alpha > \gamma$ *absolut konvergent*. Man nennt die Funktion $\hat{f}(s)$ auch die Laplace-Transformierte der kausalen Zeitfunktion $f(t)$ und das Gebiet $\mathbf{C}_\gamma = \{s \in \mathbf{C} \mid \text{Re}(s) > \gamma\}$ den *Existenzbereich* von $\hat{f}(s)$.

Als Beispiel berechne man die Laplace-Transformierte $\hat{f}(s)$ der kausalen Zeitfunktion

$$f(t) = e^{at} \quad (\text{A.3})$$

und bestimme den zugehörigen Existenzbereich. Auswertung des Laplace-Integrals (A.2) ergibt

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^{\infty} = \frac{e^{-(\alpha-a)t} e^{-I\omega t}}{-(s-a)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a} \quad (\text{A.4})$$

für $\text{Re}(s) = \alpha > a$. Die Laplace-Transformierte von $f(t) = e^{at}$ lautet $\hat{f}(s) = \frac{1}{s-a}$ und der Existenzbereich errechnet sich zu $\mathbf{C}_a = \{s \in \mathbf{C} \mid \text{Re}(s) > a\}$.

Die ursprüngliche Zeitfunktion $f(t)$ von (A.2) kann nun über die inverse Laplace-Transformation aus der zugehörigen Laplace-Transformierten $\hat{f}(s)$ in der Form

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\hat{f}(s)) = \frac{1}{2\pi I} \int_{r-I\infty}^{r+I\infty} \hat{f}(s) e^{st} ds, \quad t \geq 0 \quad (\text{A.5})$$

bestimmt werden, wobei r eine beliebige reelle Zahl bezeichnet, die im Existenzbereich von $\hat{f}(s)$ liegt. Man beachte, dass an Unstetigkeitspunkten der Zeitfunktion $f(t)$ das

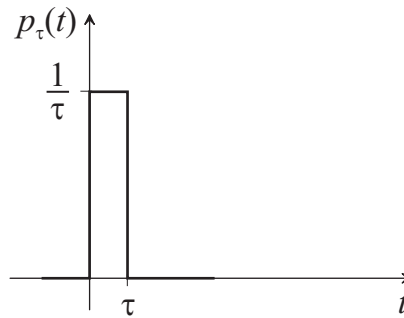


Abbildung A.1.: Zur Definition des Einheitsimpulses.

Integral von (A.5) den Mittelwert von links- und rechtsseitigem Grenzwert, also $f(t) = \frac{1}{2}(f(+t) + f(-t))$, liefert.

Bevor die wesentlichen Eigenschaften der Laplace-Transformation zusammengefasst werden, sollen noch zwei für die weiteren Betrachtungen benötigte Zeitfunktionen in Erinnerung gerufen werden.

Der so genannte *Einheitsprung* (*Heaviside-Funktion*) $\sigma(t)$ ist als

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \text{undefiniert} & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

definiert und die zugehörige Laplace-Transformierte errechnet sich nach (A.2) zu

$$\mathcal{L}(\sigma(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (\text{A.7})$$

Der *Einheitsimpuls* (*Dirac Delta-Funktion*) $\delta(t)$ ist keine Funktion im herkömmlichen Sinne sondern vielmehr ein *Funktional*, dass über die Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) g(t) dt &= g(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^n}{dt^n} \delta(t) \right) g(t) dt &= (-1)^n \left(\frac{d^n}{dt^n} g \right) (0) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

einer stetigen bzw. n -fach stetig differenzierbaren Funktion $g(t)$ eine reelle Zahl $g(0)$ bzw. $\left(\frac{d^n}{dt^n} g \right) (0)$ zuordnet. Der Einheitsimpuls $\delta(t)$ kann nun als Grenzübergang von herkömmlichen Funktionen definiert werden, z. B. in der Form (siehe Abbildung A.1)

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} p_{\tau}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sigma(t) - \sigma(t - \tau)}{\tau}. \quad (\text{A.9})$$

Zur Berechnung der Laplace-Transformierten von $\delta(t)$ bestimme man zuerst die Laplace-Transformierte von $p_\tau(t)$

$$\mathcal{L}(p_\tau(t)) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-s\tau}}{\tau s} \quad (\text{A.10})$$

und führe anschließend den Grenzübergang $\tau \rightarrow 0$ unter Zuhilfenahme der Regel von l'Hospital

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}(p_\tau(t)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\tau s}}{\tau s} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{se^{-\tau s}}{s} = 1 \quad (\text{A.11})$$

durch.

A.1. Eigenschaften und Korrespondenzen der Laplace-Transformation

I. Linearität:

Zeitbereich: $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Bildbereich: $c_1 \hat{f}_1(s) + c_2 \hat{f}_2(s)$

II. Ähnlichkeitssatz:

Zeitbereich: $f(at)$, $a > 0$

Bildbereich: $\frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$

III. Erster Verschiebungssatz:

Zeitbereich: $f(t-a) \sigma(t-a)$, $a > 0$

Bildbereich: $e^{-as} \hat{f}(s)$

IV. Zweiter Verschiebungssatz:

Zeitbereich: $f(t+a)$, $a > 0$

Bildbereich: $e^{as} \left(\hat{f}(s) - \int_0^a f(t) e^{-st} dt \right)$

V. Dämpfungssatz:

Zeitbereich: $e^{-ct} f(t)$, $c \in \mathbb{C}$

Bildbereich: $\hat{f}(s+c)$

VI. Differentiation:

$$\text{Zeitbereich: } \frac{d}{dt} f(t) = \ddot{f}(t)$$

$$\text{Bildbereich: } s\hat{f}(s) - f(+0)$$

bzw.

$$\text{Zeitbereich: } \frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t)$$

$$\text{Bildbereich: } s^n \hat{f}(s) - f(+0) s^{n-1} - f^{(1)}(+0) s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(+0)$$

VII. Integration:

$$\text{Zeitbereich: } \int_0^t f(\tau) d\tau$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{1}{s} \hat{f}(s)$$

VIII. Umkehrung zu VI:

$$\text{Zeitbereich: } (-t)^n f(t)$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{d^n}{ds^n} \hat{f}(s)$$

IX. Umkehrung zu VII:

$$\text{Zeitbereich: } \frac{1}{t} f(t)$$

$$\text{Bildbereich: } \int_s^\infty \hat{f}(\sigma) d\sigma$$

X. Faltungssatz:

$$\text{Zeitbereich: } (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

$$\text{Bildbereich: } \hat{f}_1(s) \hat{f}_2(s)$$

XI. Periodische Funktionen:

$$\text{Zeitbereich: } f(t + T) = f(t)$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

XII. Grenzwertsätze: (nur anwendbar, wenn die Grenzwerte auch existieren)

$$\text{Anfangswertsatz: } \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}(s)$$

$$\text{Endwertsatz: } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{f}(s)$$

Aufgabe A.1. Beweisen Sie die Eigenschaften I-V sowie X und XI.

Man beachte, dass sowohl bei der Differentiationsregel VI als auch beim Anfangswertsatz XII der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(+0)$ der Funktion $f(t)$ (bzw. ihrer zeitlichen Ableitungen) an der Stelle $t = 0$ verwendet wurde. Es ist natürlich unmittelbar

einsichtig, dass im Falle einer an der Stelle $t = 0$ stetigen (bzw. n -fach differenzierbaren Funktion) $f(t)$ gilt $f(0) = f(+0)$ (bzw. $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(+0)$, $i = 0, \dots, (n-1)$).

Die Berechnung der Laplace-Transformation und insbesondere auch der inversen Laplace-Transformation erfolgt im Allgemeinen nicht über die Beziehungen (A.2) bzw. (A.5), sondern mit Hilfe geeigneter Korrespondenztabelle unter Verwendung der Eigenschaften der Laplace-Transformation. Nachfolgende Tabelle A.1 fasst einige wesentliche Korrespondenzen zusammen:

Nummer	Zeitbereich $f(t)$	Bildbereich $\hat{f}(s)$	Nummer	Zeitbereich $f(t)$	Bildbereich $\hat{f}(s)$
I.	$\delta(t)$	1	VI.	$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
II.	$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	VII.	$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
III.	t	$\frac{1}{s^2}$	VIII.	$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
IV.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	IX.	$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
V.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$			

Tabelle A.1.: Laplace-Korrespondenztabelle einiger wichtiger Funktionen.

Aufgabe A.2. Berechnen Sie zu den Zeitfunktionen $f(t)$ von Tabelle A.1 die jeweiligen Laplace-Transformierten $\hat{f}(s)$ und weisen Sie somit die Gültigkeit dieser Korrespondenzen nach.

Hinweis: Verwenden Sie unter anderem die Euler-Formeln

$$\sin(bt) = \frac{e^{Ibt} - e^{-Ibt}}{2I} \quad \text{und} \quad \cos(bt) = \frac{e^{Ibt} + e^{-Ibt}}{2}$$

in Kombination mit der Linearitätseigenschaft I der Laplace-Transformation.

Bei der inversen Laplace-Transformation hat man im Allgemeinen die Aufgabe, rationale Funktionen $\hat{f}(s)$ in der Laplace-Variablen s in den Zeitbereich zu transformieren. Es hat sich nun gezeigt, dass eine Zerlegung der rationalen Funktionen $\hat{f}(s)$ in eine Summe einfacherer Ausdrücke mit Hilfe der so genannten *Partialbruchzerlegung* sehr zweckmäßig ist.

Satz A.1 (Partialbruchzerlegung). *Es sei*

$$\hat{f}(s) = \frac{\hat{p}(s)}{\hat{q}(s)} \quad (\text{A.12})$$

eine rationale Funktion in s mit den teilerfremden reellwertigen Polynomen $\hat{p}(s)$ (Zählerpolynom) und $\hat{q}(s)$ (Nennerpolynom) mit der Eigenschaft $\text{grad}(\hat{p}) \leq \text{grad}(\hat{q}) = n$. Weiters sei angenommen, dass sich das Nennerpolynom $\hat{q}(s)$ in der Form

$$\hat{q}(s) = \prod_{j=1}^h (s - \lambda_j)^{k_j} \prod_{j=1}^m \left((s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 \right)^{l_j} \quad (\text{A.13})$$

mit

$$\text{grad}(\hat{q}) = n = \sum_{j=1}^h k_j + 2 \sum_{j=1}^m l_j \quad (\text{A.14})$$

darstellen lässt.

Dann hat $\hat{f}(s)$ eine eindeutige Darstellung in der Form

$$\hat{f}(s) = c_0 + \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^{k_j} \frac{c_{j,i}}{(s - \lambda_j)^i} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{l_j} \frac{d_{j,i} + e_{j,i}s}{\left((s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 \right)^i} \quad (\text{A.15})$$

mit

$$c_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\hat{p}(s)}{\hat{q}(s)} \quad (\text{A.16})$$

und den reellen Koeffizienten $c_{j,i}$, $d_{j,i}$ und $e_{j,i}$. Man nennt die rechte Seite von (A.15) auch Partialbruchzerlegung von $\hat{f}(s)$.

Die Partialbruchkoeffizienten $c_{j,i}$, $d_{j,i}$ und $e_{j,i}$ lassen sich im Allgemeinen sehr einfach durch Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmen. Die Rücktransformation der einzelnen Summanden von (A.15) erfolgt direkt über die Korrespondenztabelle A.1.

- **Einfache reelle Wurzel** λ_j ($k_j = 1$): Siehe IV in Tabelle A.1

- Bildbereich: $\frac{c_{j,1}}{(s - \lambda_j)}$

- Zeitbereich: $c_{j,1}e^{(\lambda_j t)}$

- **Mehrfache reelle Wurzel** λ_j ($k_j = k$): Siehe V in Tabelle A.1

- Bildbereich: $\sum_{i=1}^k \frac{c_{j,i}}{(s - \lambda_j)^i} = \frac{c_{j,1}}{(s - \lambda_j)} + \frac{c_{j,2}}{(s - \lambda_j)^2} + \dots + \frac{c_{j,k}}{(s - \lambda_j)^k}$

- Zeitbereich: $e^{\lambda_j t} \left(c_{j,1} + c_{j,2} \frac{t}{1!} + \dots + c_{j,k} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right)$

- **Einfache konjugiert komplexe Wurzel** $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ ($l_j = 1$): Siehe VIII und IX in Tabelle A.1

- Bildbereich: $\frac{d_{j,1} + e_{j,1}s}{(s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2} = e_{j,1} \frac{(s - \alpha_j)}{(s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2} + \frac{d_{j,1} + e_{j,1}\alpha_j}{\beta_j} \frac{\beta_j}{(s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2}$
- Zeitbereich: $e^{\alpha_j t} \left(e_{j,1} \cos(\beta_j t) + \frac{d_{j,1} + e_{j,1}\alpha_j}{\beta_j} \sin(\beta_j t) \right)$

Aufgabe A.3. Berechnen Sie die Zeitbereichsfunktion für eine zweifach konjugiert komplexe Wurzel, also für $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ ($l_j = 2$).

Lösung von Aufgabe A.3.

$$e^{\alpha_j t} \left(e_{j,1} \cos(\beta_j t) + \frac{d_{j,1} + e_{j,1}\alpha_j}{\beta_j} \sin(\beta_j t) \right) + e^{\alpha_j t} \left(\frac{e_{j,2}}{2\beta_j} t \sin(\beta_j t) + \frac{e_{j,2}\alpha_j + d_{j,2}}{2\beta_j^3} (\sin(\beta_j t) - \beta_j t \cos(\beta_j t)) \right)$$

Beispiel A.1. Als Anwendungsbeispiel für die Laplace-Transformation soll das Anfangswertproblem

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 4t \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} y(0) = -1 \quad (\text{A.17})$$

gelöst werden. Die Laplace-Transformierte von (A.17) lautet

$$s^2 \hat{y}(s) - (1)s - (-1) - 3(s\hat{y}(s) - 1) + 2\hat{y}(s) = \frac{4}{s^2} \quad (\text{A.18})$$

bzw.

$$\hat{y}(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2(s^2 - 3s + 2)}. \quad (\text{A.19})$$

Die Partialbruchzerlegung von $\hat{y}(s)$ errechnet sich zu

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} \quad (\text{A.20})$$

und die Rücktransformation in den Zeitbereich über die Korrespondenztabelle A.1 liefert unmittelbar das Ergebnis

$$y(t) = 2t + 3 - e^t - e^{2t}, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.21})$$

Aufgabe A.4. Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - 2 \frac{d}{dt} y(t) + 5y(t) = 8 \sin(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} y(0) = 3$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation. Verwenden Sie dazu das Maple-Package *int-trans*.

Lösung von Aufgabe A.4.

$$y(t) = e^t \left(\frac{1}{5} \cos(2t) + \frac{3}{5} \sin(2t) \right) + \frac{4}{5} \cos(t) + \frac{8}{5} \sin(t)$$

Aufgabe A.5. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$\hat{f}(s) = \frac{5s^4 - s^3 - 3s^2 - 6s - 3}{(s^2 + s + 1)s^2}.$$

Lösung von Aufgabe A.5.

$$\hat{f}(s) = 5 - \frac{3}{s} - \frac{3}{s^2} - \frac{2 + 3s}{s^2 + s + 1}$$

A.2. Literatur

- [A.1] G. Doetsch, *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Berlin Heidelberg: Springer, 1974.
- [A.2] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 6. Aufl. Berlin Heidelberg: John Wiley & Sons, 1988.
- [A.3] A. Papoulis, *The Fourier Integral and its Applications*. New York: McGraw-Hill, 1987.