

B. Die z -Transformation

Die z -Transformation ist eine im Wesentlichen eindeutige Zuordnung von Folgen von Funktionswerten (f_k) zu Funktionen einer komplexen Variablen z . Im Rahmen der (einseitigen) z -Transformation werden nur Folgen von kausalen Zeitfunktionen betrachtet, für die gilt $f_k = 0$ für $k < 0$.

Definition B.1 (z -Transformation). Es sei angenommen, dass die Folgenwerte f_k , $k = 0, 1, \dots$ der Ungleichung

$$|f_k| \leq M\gamma^k \quad (\text{B.1})$$

für geeignete positive Konstanten γ und M genügen. Dann ist die Summe

$$f_z(z) = \mathcal{Z}\{(f_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \quad (\text{B.2})$$

für alle z mit $|z| > \gamma$ *absolut konvergent*. Man nennt die Funktion $f_z(z)$ auch die z -Transformierte von (f_k) und das Gebiet $\mathbf{C}_\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \gamma\}$ den *Existenzbereich* von $f_z(z)$.

Als Beispiel berechne man die z -Transformierte $f_z(z)$ der Einheitssprungfolge gemäß Abbildung B.1

$$(f_k) = (1^k) = (1, 1, 1, \dots) \quad (\text{B.3})$$

und bestimme den zugehörigen Existenzbereich. Über die Auswertung von (B.2) mittels der geometrischen Reihe erhält man unmittelbar das Ergebnis

$$f_z(z) = \mathcal{Z}\{(1^k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (\text{B.4})$$

für $|z^{-1}| < 1$ oder $|z| > 1$ und damit den Existenzbereich $\mathbf{C}_\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

In der etwas älteren Literatur wird die z -Transformation auch als diskrete Laplace-Transformation bezeichnet. Um den Zusammenhang zwischen der z - und der Laplace-Transformation zu erläutern, betrachte man die Folge von Abtastwerten (f_k) in Form einer Impulsfolge

$$(f_k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_a) \delta(t - kT_a) \quad (\text{B.5})$$

und transformiere diese in den Laplace-Bereich

$$\mathcal{L}\{(f_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-kT_a s} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (e^{sT_a})^{-k} \quad (\text{B.6})$$

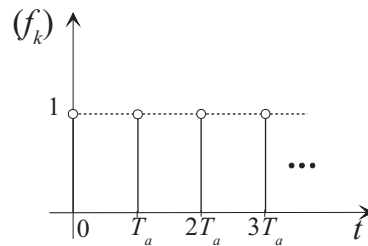


Abbildung B.1.: Sprungfolge (1^k) .

Führt man nun eine neue komplexe Variable z

$$z = e^{sT_a} \tag{B.7}$$

ein, so gelangt man über (B.6) unmittelbar zur Definition der z -Transformation (B.2).

Die Rücktransformation einer z -Transformierten $f_z(z)$ in den Folgenbereich (f_k) erfolgt über die Theorie der Laurent-Reihen. Dazu sei angemerkt, dass jede komplexwertige Funktion $f_z(z)$, die in einem Gebiet $\mathbf{C}_\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \gamma\}$ holomorph ist, eindeutig in eine in diesem Gebiet absolut konvergente *Laurent-Reihe* um den Punkt $z = 0$

$$f_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \quad \text{mit} \quad f_k = \frac{1}{2\pi I} \oint_{\mathbf{C}_\gamma} f_z(z) z^{k-1} dz \tag{B.8}$$

entwickelbar ist, wobei durch das Wegintegral das Gebiet \mathbf{C}_γ im mathematisch positiven Sinne (Gegenuhrzeigersinn) umlaufen wird.

B.1. Eigenschaften und Korrespondenzen der

I. Linearität:

Zeitbereich: $c_1 (f_{1,k}) + c_2 (f_{2,k}) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Bildbereich: $c_1 f_{1,z}(z) + c_2 f_{2,z}(z)$

II. Erster Verschiebungssatz (Rechtsverschiebung):

Zeitbereich: $(f_{k-n}) \quad , \quad n \in \mathbb{N}_+$ bzw. $(f_{k-n}), \quad n \in \mathbb{N}_+$

Bildbereich: $z^{-n} \left(f_z(z) + \sum_{j=1}^n f_{-j} z^j \right)$ bzw. $z^{-n} f_z(z)$ für $f_j = 0, j < 0$

III. Zweiter Verschiebungssatz (Linksverschiebung):

Zeitbereich: $(f_{k+n}) \quad , \quad n \in \mathbb{N}_+$

Bildbereich: $z^n \left(f_z(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f_j z^{-j} \right)$

IV. Dämpfungssatz:

$$\text{Zeitbereich: } (c^k f_k), \quad c \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad c \neq 0$$

$$\text{Bildbereich: } f_z \left(\frac{z}{c} \right)$$

V. Differenzenbildung (Vorwärtsdifferenz):

$$\text{Zeitbereich: } (f_{k+1} - f_k)$$

$$\text{Bildbereich: } (z - 1) f_z(z) - z f_0$$

VI. Differenzenbildung (Rückwärtsdifferenz):

$$\text{Zeitbereich: } (f_k - f_{k-1})$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{z-1}{z} f_z(z) - f_{-1}$$

VII. Summenbildung:

$$\text{Zeitbereich: } \left(\sum_{j=0}^k f_j \right)$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{z}{z-1} f_z(z)$$

VIII. Umkehrung zu V bzw. VI:

$$\text{Zeitbereich: } (k T_a f_k)$$

$$\text{Bildbereich: } -T_a z \frac{d}{dz} f_z(z)$$

IX. Umkehrung zu VII:

$$\text{Zeitbereich: } 0 \quad \text{für} \quad k = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{f_k}{k T_a} \right) \quad \text{für} \quad k > 0$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{1}{T_a} \int_z^\infty \frac{f_z(\sigma)}{\sigma} d\sigma$$

X. Faltungssatz:

$$\text{Zeitbereich: } (f_{1,k}) * (f_{2,k}) = \sum_{j=0}^k f_{1,k-j} f_{2,j} = \sum_{j=0}^k f_{1,j} f_{2,k-j}$$

$$\text{Bildbereich: } f_{1,z}(z) f_{2,z}(z)$$

XI. Grenzwertsätze: (nur anwendbar, wenn die Grenzwerte auch existieren)

$$\text{Anfangswertsatz: } f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f_z(z)$$

$$\text{Endwertsatz: } \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f_z(z)$$

Die Berechnung der z -Transformation und insbesondere auch der inversen z -Transformation erfolgt im Allgemeinen nicht über die Beziehungen (B.2) bzw. (B.8), sondern mit Hilfe geeigneter Korrespondenztabelle unter Verwendung der Eigenschaften der z -Transformation. In Tabelle B.1 sind einige wesentliche Korrespondenzen zusammengefasst:

Nr.	s -Bildbereich $\hat{f}(s)$	Zeitbereich $f(t)$	Abtastfolgen (f_k)	z -Bildbereich $f_z(z)$
I	1	$\delta(t)$	$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{cases}$	1
II	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	(1^k)	$\frac{z}{z-1}$
III	$\frac{1}{s^2}$	t	(kT_a)	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
IV	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	(e^{akT_a})	$\frac{z}{z-e^{aT_a}}$
V	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$t^n e^{at}$	$((kT_a)^n e^{akT_a})$	$\frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{z}{z-e^{aT_a}}$
VI	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\sin(bt)$	$(\sin(bkT_a))$	$\frac{z \sin(bT_a)}{z^2 - 2z \cos(bT_a) + 1}$
VII	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos(bt)$	$(\cos(bkT_a))$	$\frac{z(z - \cos(bT_a))}{z^2 - 2z \cos(bT_a) + 1}$
VIII	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at} \sin(bt)$	$(e^{akT_a} \sin(bkT_a))$	$\frac{ze^{aT_a} \sin(bT_a)}{z^2 - 2ze^{aT_a} \cos(bT_a) + e^{2aT_a}}$
IX	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at} \cos(bt)$	$(e^{akT_a} \cos(bkT_a))$	$\frac{z(z - e^{aT_a} \cos(bT_a))}{z^2 - 2ze^{aT_a} \cos(bT_a) + e^{2aT_a}}$

Tabelle B.1.: Korrespondenztabelle einiger wichtiger Funktionen.

Aufgabe B.1. Berechnen Sie zu den Folgen (f_k) der Zeitfunktionen $f(t)$ von Tabelle B.1 die jeweiligen z -Transformierten $f_z(z)$ und weisen Sie somit die Gültigkeit dieser Korrespondenzen nach.

Hinweis: Verwenden Sie unter anderem die Euler-Formeln

$$\sin(bkT_a) = \frac{e^{lbkT_a} - e^{-lbkT_a}}{2I}$$

$$\cos(bkT_a) = \frac{e^{lbkT_a} + e^{-lbkT_a}}{2}$$

in Kombination mit der Linearitätseigenschaft I der z -Transformation.

Aufgabe B.2. Zeigen Sie, dass im Sinne des Anfangswertsatzes sämtliche Folgenwerte über die Vorschrift

$$\begin{aligned} f_1 &= \lim_{z \rightarrow \infty} z (f_z(z) - f_0) \\ f_2 &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 (f_z(z) - f_0 - f_1 z^{-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

rekursiv ermittelbar sind, sofern diese existieren.

Analog zur inversen Laplace-Transformation hat es sich auch bei der inversen z -Transformation als sinnvoll erwiesen, die rationalen Funktionen $f_z(z)$ mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* (siehe Satz A.1) in eine Summe einfacherer Ausdrücke zu zerlegen und diese dann mit Hilfe der Korrespondenztabelle B.1 in den Folgenbereich zurückzutransformieren. Als Beispiel betrachte man die z -Transformierte

$$f_z(z) = \frac{z - 2}{(z - 0.5)(z^2 - z + 0.5)}. \quad (\text{B.9})$$

Die zugehörige Partialbruchzerlegung berechnet man über den Ansatz

$$f_z(z) = \frac{A}{z - 0.5} + \frac{B + Cz}{z^2 - z + 0.5} \quad (\text{B.10})$$

in der Form

$$f_z(z) = \frac{-6}{z - 0.5} + \frac{-2 + 6z}{z^2 - z + 0.5}. \quad (\text{B.11})$$

Um direkt die Korrespondenzen von Tabelle B.1 nutzen zu können, empfiehlt es sich, in (B.11) jeweils Zähler und Nenner um z zu erweitern, d. h.

$$f_z(z) = \underbrace{\frac{1}{z} \frac{-6z}{z - 0.5}}_{f_{1,z}(z)} + \underbrace{\frac{1}{z} \frac{z(-2 + 6z)}{z^2 - z + 0.5}}_{f_{2,z}(z)}. \quad (\text{B.12})$$

Die Rücktransformation des ersten Terms $f_{1,z}(z)$ lautet demnach mit der Eigenschaft II der z -Transformation und der Korrespondenz IV von Tabelle B.1

$$(f_{1,k}) = -6 \times 0.5^{(k-1)} \quad \text{für } k > 0. \quad (\text{B.13})$$

Aus dem Nenner von $f_{2,z}(z)$ und den Korrespondenzen VIII und IX von Tabelle B.1 folgen die Gleichungen

$$0.5 = e^{2aT_a} \quad \text{sowie} \quad 1 = 2e^{aT_a} \cos(bT_a) \quad (\text{B.14})$$

bzw.

$$e^{aT_a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad bT_a = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{B.15})$$

Schreibt man nun den Zähler von $f_{2,z}(z)$ in der Form

$$f_{2,z}(z) = \frac{1}{z} \frac{6z \left(z - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)}{z^2 - z + 0.5} = \frac{1}{z} \frac{6z \left(z - \frac{1}{2} \right)}{z^2 - z + 0.5} + \frac{1}{z} 2 \frac{\frac{1}{2}z}{z^2 - z + 0.5} \quad (\text{B.16})$$

um, so kann aus der Korrespondenz unmittelbar die Rücktransformation

$$(f_{2,k}) = 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{(k-1)} \cos \left(\frac{\pi}{4} (k-1) \right) + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{(k-1)} \sin \left(\frac{\pi}{4} (k-1) \right) \quad \text{für } k > 0 \quad (\text{B.17})$$

angegeben werden.

Aufgabe B.3. Bestimmen Sie mit Hilfe der z -Transformation die Lösung der Differenzgleichung

$$y_{k+2} - 1.5y_{k+1} + 0.5y_k = u_k$$

für $(u_k) = (1^k)$ und $y_0 = 0$ sowie $y_1 = 1$.

Lösung von Aufgabe B.3. Die Lösung lautet

$$y_k = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^k + 2(k-1) .$$

Hinweis: Benutzen Sie in MAPLE die Befehle `ztrans`, `invztrans` sowie `rsolve`.

In vielen Fällen werden die Laplace- und die z -Transformation gleichzeitig benutzt. Möchte man beispielsweise zur Laplace-Transformierten $\hat{f}(s)$ eines Zeitsignals $f(t)$ die z -Transformierte der Folge (f_k) wissen, dann berechnet sich diese nach der Vorschrift

$$f_z(z) = \mathcal{Z} \left\{ \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\hat{f}(s) \right) \Big|_{t=+kT_a} \right) \right\} . \quad (\text{B.18})$$

Die Beziehung (B.18) besagt, dass im ersten Schritt zu $\hat{f}(s)$ über die inverse Laplace-Transformation \mathcal{L}^{-1} das Zeitsignal $f(t)$ bestimmt wird, dieses wird dann abgetastet, also $(f_k) = (f(kT_a))$ und anschließend z -transformiert. Um in weiterer Folge die Schreibweise abzukürzen, wird die Transformationsvorschrift (B.18) wie folgt

$$f_z(z) = \mathbf{Z} \left(\hat{f}(s) \right) := \mathcal{Z} \left\{ \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\hat{f}(s) \right) \Big|_{t=+kT_a} \right) \right\} \quad (\text{B.19})$$

angeschrieben.

Beispiel B.1. Als Beispiel berechne man zum Laplace-transformierten Zeitsignal

$$\hat{f}(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2} \quad (\text{B.20})$$

die zugehörige z -Transformierte, also $f_z(z) = \mathbf{Z} \left(\hat{f}(s) \right)$. In einem ersten Schritt ermittelt man die Partialbruchzerlegung

$$\hat{f}(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - 2 \frac{1}{(s+1)^2} \quad (\text{B.21})$$

und über die inverse Laplace-Transformation folgt das Zeitsignal zu

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\hat{f}(s) \right) = e^{-t} - 2te^{-t} . \quad (\text{B.22})$$

Durch Abtastung mit der Abtastzeit T_a erhält man aus $f(t)$ die Folge von Abtastwerten

$$(f_k) = (f(kT_a)) = (1 - 2kT_a) e^{-kT_a} \quad (\text{B.23})$$

und mit der z -Transformation ergibt sich

$$f_z(z) = \frac{z}{z - e^{-T_a}} - 2 \frac{zT_a e^{-T_a}}{(z - e^{-T_a})^2} = \frac{z(z - (1 + 2T_a)e^{-T_a})}{(z - e^{-T_a})^2}. \quad (\text{B.24})$$

Man beachte, dass das Ergebnis direkt aus der Korrespondenztabelle [B.1](#) abgelesen werden kann.

B.2. Literatur

- [B.1] G. Doetsch, *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der z -Transformation*. München: Oldenbourg, 1967.
- [B.2] G. F. Franklin, J. D. Powell und M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*. California: Addison Wesley, 1998.
- [B.3] F. Gausch, A. Hofer und K. Schlacher, *Digitale Regelkreise*. München: Oldenbourg, 1991.