C. Beweise

Beweis zu Satz 3.7: Impulsantwort ist absolut integrabel $\Rightarrow$ BIBO-stabil: Aus dem Faltungssatz X aus Anhang A und (3.99) lässt sich die Ausgangsgröße $y(t)$ in der Form

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau + du(t) \qquad = \int_0^t g(t-\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau + du(t) \tag{C.1}$$

anschreiben. Wenn das System absolut integrabel ist, folgt aus $|u(t)| \leq a < \infty$ direkt

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau + du(t) \right| &\text{(C.2a)}\\ &\leq \int_0^t |g(\tau)\, u(t-\tau)|\, \mathrm{d}\tau + |du(t)| &\text{(C.2b)}\\ &\leq a \left(\int_0^t |g(\tau)|\, \mathrm{d}\tau + |d| \right) = b < \infty\ . &\text{(C.2c)} \end{aligned}$$

BIBO-stabil $\Rightarrow$ Impulsantwort ist absolut integrabel bzw. wird gezeigt durch Widerspruch Impulsantwort ist nicht absolut integrabel ($\int_0^\infty |g(t)|\, \mathrm{d}t = \infty$) $\Rightarrow$ System ist nicht BIBO-stabil, d. h. es existiert ein beschränkter Eingang $u_a(t)$ mit $|u_a(t)| \leq a < \infty$ so, dass die Ausgangsgröße $y_a(t)$ nicht beschränkt ist.

Man wählt dazu für festes t die spezielle beschränkte Eingangsgröße u_a in der Form

$$u_a(t-\tau) = a \operatorname{sign}(g(\tau)) \quad \text{für} \quad 0 < \tau \leq t \quad \text{und} \quad u_a(t) = a \operatorname{sign}(d)\ . \tag{C.3}$$

Setzt man nun u_a in (C.1) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau)\, u_a(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau + du_a(t) &\text{(C.4a)}\\ &= a \left(\int_0^t |g(\tau)|\, \mathrm{d}\tau + |d| \right)\ . &\text{(C.4b)} \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $t \to \infty$ in (C.4) zeigt unmittelbar, dass $y(t)$ unbeschränkt ist und zeigt damit, dass das System unter der Annahme $\int_0^\infty |g(t)|\, \mathrm{d}t = \infty$ auch nicht BIBO-stabil ist. □

Beweis zu Satz 3.8: BIBO-stabil $\Rightarrow$ $G(s)$ hat nur Pole mit negativem Realteil: Zufolge von Satz 3.7 folgt aus der BIBO-Stabilität von $G(s)$, dass die Impulsantwort $g(t)$ absolut integrabel ist. Die Laplace-Transformierte von $g(t)$ errechnet sich aus

(A.2) in der Form

$$\hat{g}(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} g(t)\,\mathrm{d}t \tag{C.5}$$

und mit $s = \alpha + \mathrm{I}\omega$ gilt die Abschätzung

$$|\hat{g}(s)| \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} |g(t)|\,\mathrm{d}t \ . \tag{C.6}$$

Da $g(t)$ absolut integrabel ist, gilt

$$|\hat{g}(s)| \leq \int_0^\infty |g(t)|\,\mathrm{d}t < \infty\,, \qquad \alpha \geq 0 \ . \tag{C.7}$$

Die Ungleichung (C.7) besagt, dass $\hat{g}(s)$ für alle s mit $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ beschränkt ist bzw. $\hat{g}(s)$ keinen Pol s_i in der rechten geschlossenen s-Halbebene hat. Wegen $G(s) = \hat{g}(s) + d$ gilt dies auch für $G(s)$.

> *Aufgabe* C.1. Beweisen Sie die Umkehrung: $G(s)$ hat nur Pole mit negativem Realteil ⇒ BIBO-stabil

□

Beweis zu Satz 4.1: intern stabil ⇒ Bedingungen (A) und (B): Die Übertragungsfunktionen $T_{i,j}(s)$ von (4.21) lauten

$$\begin{bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} \begin{bmatrix} R(s) & -G(s)R(s) \\ G(s)R(s) & G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} \ . \tag{C.8}$$

Setzt man für $R(s)$ und $G(s)$ die Polynomdarstellung von (4.13) ein, dann ergibt sich (C.8) zu

$$\begin{bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{bmatrix} = \frac{n_G(s)\,n_R(s)}{z_G(s)\,z_R(s) + n_G(s)\,n_R(s)} \begin{bmatrix} \frac{z_R(s)}{n_R(s)} & -\frac{z_G(s)z_R(s)}{n_G(s)n_R(s)} \\ \frac{z_G(s)z_R(s)}{n_G(s)n_R(s)} & \frac{z_G(s)}{n_G(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} \ . \tag{C.9}$$

Da wegen der internen Stabilität alle Übertragungsfunktionen BIBO-stabil sind, müssen alle Nullstellen von $z_G(s)\,z_R(s) + n_G(s)\,n_R(s)$ in der linken offenen s-Halbebene liegen, womit die Bedingung (A) gezeigt ist.

Die Bedingung (B) folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass wenn $z_G(s)$ und $n_R(s)$ bzw. $z_R(s)$ und $n_G(s)$ eine gemeinsame Nullstelle s_i mit $\mathrm{Re}(s_i) \geq 0$ hätten, diese auch Nullstelle von $z_G(s)\,z_R(s) + n_G(s)\,n_R(s)$ sein müsste, was aber bereits ausgeschlossen wurde.

Bedingungen (A) und (B) ⇒ intern stabil (durch Widerspruch): Es sei angenommen, dass s_i mit $\mathrm{Re}(s_i) \geq 0$ eine Nullstelle von $z_G(s)\,z_R(s) + n_G(s)\,n_R(s)$ ist. Dann muss aus $n_G(s_i)\,n_R(s_i) = 0$ folgen, dass auch $z_G(s_i)\,z_R(s_i) = 0$ ist. Dies widerspricht aber der Bedingung (B). Also muss $n_G(s_i)\, n_R(s_i) \neq 0$ sein und die Bedingung

$$1 + \frac{z_G(s_i)\, z_R(s_i)}{n_G(s_i)\, n_R(s_i)} = 0 \tag{C.10}$$

erfüllt sein. Dies widerspricht aber wiederum der Bedingung (A). $\square$

Beweis zu Hilfssatz 7.1: Aus

$$\operatorname{rang}(\mathbf{H}_k) = \operatorname{rang}(\mathbf{H}_{k+1}) \ , \qquad \mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \ldots & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{C.11}$$

folgt, dass sich sämtliche Spaltenvektoren von $\mathbf{A}^k\mathbf{B}$ als Linearkombination der Spaltenvektoren von $\mathbf{H}_k$ ausdrücken lassen, also

$$\mathbf{A}^k\mathbf{B} = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j\mathbf{B}\mathbf{D}_j \tag{C.12}$$

für geeignete Matrizen $\mathbf{D}_j \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Damit gilt aber weiters

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B} &= \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^k\mathbf{B}\right) && \text{(C.13a)}\\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{j+1}\mathbf{B}\mathbf{D}_j && \text{(C.13b)}\\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{A}^{j}\mathbf{B}\mathbf{D}_{j-1} + \mathbf{A}^k\mathbf{B}\mathbf{D}_{k-1} && \text{(C.13c)}\\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{A}^{j}\mathbf{B}\mathbf{D}_{j-1} + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j\mathbf{B}\mathbf{D}_j\mathbf{D}_{k-1} && \text{(C.13d)}\\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{j}\mathbf{B}\left(\mathbf{D}_{j-1} + \mathbf{D}_j\mathbf{D}_{k-1}\right) \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_{-1} = \mathbf{0} \ , && \text{(C.13e)}
\end{aligned}$$

woraus man unmittelbar erkennt, dass sich für $l = 2$ auch $\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B}$ als Linearkombination der Spaltenvektoren von $\mathbf{H}_k$ ausdrücken lässt. Über den Induktionsschluss gilt dies dann auch für alle weiteren $l = 3, 4, \ldots$.

Der Beweis des zweiten Teiles des Hilfssatzes, dass aus $\operatorname{rang}(\mathbf{H}_n) = \rho$ mit $\rho < n \Rightarrow \operatorname{rang}(\mathbf{H}_\rho) = \rho$ kann durch Widerspruch erfolgen. Nehmen wir dazu an, dass gilt $\operatorname{rang}(\mathbf{H}_n) = \rho$ mit $\rho < n$ und $\operatorname{rang}(\mathbf{H}_\rho) = \kappa < \rho$. Der Fall $\operatorname{rang}(\mathbf{H}_\rho) > \rho$ kann unmittelbar ausgeschlossen werden, da dann automatisch $\operatorname{rang}(\mathbf{H}_n) > \rho$ gelten muss. Wenn $\operatorname{rang}(\mathbf{H}_\rho) = \kappa < \rho$ gilt, dann kann der Rang der Matrix $\mathbf{H}_k$ von (7.12) nicht für jedes $k = 1, \ldots, \rho$ zunehmen. Es muss somit ein $\bar{k}$ mit $1 \leq \bar{k} < \rho$ so existieren, dass gilt $\operatorname{rang}(\mathbf{H}_{\bar{k}}) = \operatorname{rang}\left(\mathbf{H}_{\bar{k}+1}\right) = \kappa$. Damit folgt aber aufgrund des ersten Teiles des Hilfssatzes $\operatorname{rang}(\mathbf{H}_{\bar{k}}) = \operatorname{rang}\left(\mathbf{H}_{\bar{k}+l}\right) = \kappa$ für alle $l \geq 1$ und wegen $n > \rho > \bar{k}$ auch $\operatorname{rang}(\mathbf{H}_n) = \kappa < \rho$, was ein Widerspruch zur Annahme ist. $\square$

Beweis zu Satz 7.5: Der Beweis dieses Satzes soll nicht bis ins letzte Detail besprochen werden, da er sich im Wesentlichen an dem Beweis von Satz 7.1 orientiert. In einem ersten Schritt betrachte man wiederum die allgemeine Lösung für die Ausgangsgröße $\mathbf{y}(t)$ von (7.32) zum Zeitpunkt t

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \underbrace{\int_0^t \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)}_{\mathbf{v}(t)} \tag{C.14}$$

mit der Transitionsmatrix $\boldsymbol{\Phi}(t) = \exp(\mathbf{A}t)$ (vergleiche dazu Satz 2.4). Da in (C.14) nach Definition 7.4 der Ausdruck $\mathbf{v}(t)$ für $0 \leq t \leq T$ bekannt ist, kann (C.14) in der Form

$$\underbrace{\tilde{\mathbf{y}}(t)}_{\mathbf{y}(t)-\mathbf{v}(t)} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 \tag{C.15}$$

umgeschrieben werden und die Untersuchung der Beobachtbarkeit reduziert sich auf die Frage, ob aus Gleichung (C.15) $\mathbf{x}_0$ eindeutig bestimmt werden kann, wobei $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq T$ bekannt ist. Aus diesem Grund kann im Weiteren ohne Einschränkung der Allgemeinheit bei der Beobachtbarkeitsuntersuchung des Systems (7.32) der Eingang $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$, $0 \leq t \leq T$, gesetzt werden.

Beweis Satz 7.5 Teil 1: vollständig beobachtbar $\Rightarrow$ rang $(\mathcal{O}(\mathbf{C},\mathbf{A})) = n$: Dieser Teil des Beweises wird durch Widerspruch geführt – d. h., man nimmt an, rang $(\mathcal{O}(\mathbf{C},\mathbf{A})) < n$. Dann existiert ein nichttrivialer Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ so, dass gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{0}\ . \tag{C.16}$$

Für Matrizen, die die Struktur der Beobachtbarkeitsmatrix (7.33) aufweisen, ist nun wiederum der Hilfssatz 7.1 anwendbar. Lösen Sie dazu nachfolgende Aufgabe:

Aufgabe C.2. Zeigen Sie, dass wenn für die Matrix

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix} \tag{C.17}$$

gilt $\operatorname{rang}(\mathbf{F}_k) = \operatorname{rang}(\mathbf{F}_{k+1})$, dann folgt $\operatorname{rang}(\mathbf{F}_k) = \operatorname{rang}(\mathbf{F}_{k+l})$ mit $l = 2, 3, \ldots$. Beweisen Sie, dass im Weiteren gilt, falls $\operatorname{rang}(\mathbf{F}_n) = \rho$ mit $\rho < n$, dann folgt $\operatorname{rang}(\mathbf{F}_\rho) = \rho$.

Damit erhält man unmittelbar für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$ und $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, $0 \leq t \leq T$, eingesetzt in (C.14) bzw. (C.15) die Beziehung

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{CA}^k \frac{t^k}{k!} \mathbf{a} = \mathbf{0} \; . \tag{C.18}$$

Dies bedeutet, dass zwei verschiedene Anfangswerte, nämlich $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$ und $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, zur selben Ausgangsgröße $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ führen und daher am Ausgang nicht unterschieden werden können. Da aber vorausgesetzt wurde, dass das System (7.32) vollständig beobachtbar ist und da wegen der Linearität von (7.32) die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gewährleistet ist, muss gelten $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, was aber ein Widerspruch zur Annahme ist.

Beweis Satz 7.5 Teil 2: $\operatorname{rang}(\mathcal{O}(\mathbf{C}, \mathbf{A})) = n \Rightarrow$ vollständig beobachtbar: Um dies zu zeigen, wird eine Vorschrift angegeben, wie man aus Kenntnis der Eingangs- und Ausgangsgrößen $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ auf dem Intervall $0 \leq t \leq T$ sowie der Systemmatrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ errechnen kann. Dazu wird in Analogie zur Erreichbarkeit die sogenannte *Gramsche Matrix* (*observability gramian*) in der Form

$$\bar{\mathbf{G}} = \int_0^T \left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}\tau}\right)^T \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \mathrm{e}^{\mathbf{A}\tau} \mathrm{d}\tau \tag{C.19}$$

eingeführt.

Aufgabe C.3. Zeigen Sie, dass die Gramsche Matrix $\bar{\mathbf{G}}$ von (C.19) genau dann regulär ist, wenn die zugehörige Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ von (7.33) den Rang n hat.

Multipliziert man nun (C.15) von links mit $\bar{\mathbf{G}}^{-1} \left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$ und integriert von 0 bis T, dann erhält man

$$\int_0^T \bar{\mathbf{G}}^{-1} \left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{y}}(t) \, \mathrm{d}t = \bar{\mathbf{G}}^{-1} \underbrace{\int_0^T \left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \mathrm{e}^{\mathbf{A}t} \mathrm{d}t}_{\bar{\mathbf{G}}} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \tag{C.20}$$

und hat damit eine explizite Vorschrift gegeben, wie man $\mathbf{x}_0$ berechnet. □

Beweis zu Satz 7.12. Es existiert ein Vektor (Linearkombination von Linkseigenvektoren) $\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ von $\mathbf{A}$ so, dass gilt $\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = 0 \Rightarrow$ das Paar $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ist nicht vollständig erreichbar: Aus der Definition eines Linkseigenvektors

$$\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \lambda \mathbf{w}_i^{\mathrm{T}} \tag{C.21}$$

folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{b} &= \lambda \mathbf{w}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b} &&= 0\\
\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{b} &= \lambda \mathbf{w}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{b} &&= 0\\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots && \vdots \quad \vdots\\
\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} &= \lambda \mathbf{w}_i^{T}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} &&= 0
\end{aligned} \tag{C.22}$$

und damit

$$\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}} \underbrace{\left[\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\right]}_{\mathcal{R}(\mathbf{A},\mathbf{b})} = 0\ . \tag{C.23}$$

Dies bedeutet aber, dass für einen nichttrivialen Linkseigenvektor $\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ die Erreichbarkeitsmatrix $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ singulär sein muss, was die nicht vollständige Erreichbarkeit des Systems impliziert.

System ist nicht vollständig erreichbar $\Rightarrow$ es existiert ein Linkseigenvektor $\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ von $\mathbf{A}$, der die Bedingung $\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = 0$ erfüllt: Wenn das System (7.52) nicht vollständig erreichbar ist, dann lässt es sich durch eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$ in die Form

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u\\
y &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + du
\end{aligned} \tag{C.24}$$

überführen. Für jeden Linkseigenvektor $\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}} = \left[\mathbf{w}_{1,i}^{\mathrm{T}}, \mathbf{w}_{2,i}^{\mathrm{T}}\right]$ mit dem zugehörigen Eigenwert λ_i gilt nun

$$\left[\mathbf{w}_{1,i}^{\mathrm{T}}, \mathbf{w}_{2,i}^{\mathrm{T}}\right] \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \lambda_i \left[\mathbf{w}_{1,i}^{\mathrm{T}}, \mathbf{w}_{2,i}^{\mathrm{T}}\right]\ . \tag{C.25}$$

Man erkennt aus (C.25), dass $\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}} = \left[\mathbf{0}^{\mathrm{T}}, \mathbf{w}_{2,i}^{\mathrm{T}}\right]$ ein Linkseigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ ist, wenn λ_i Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}_{22}$ mit dem zugehörigen Linkseigenvektor $\mathbf{w}_{2,i}^{\mathrm{T}}$ ist, also gilt

$$\mathbf{w}_{2,i}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{22} = \lambda_i \mathbf{w}_{2,i}^{\mathrm{T}}\ . \tag{C.26}$$

Damit folgt aber für diesen Linkseigenvektor

$$\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \left[\mathbf{0}^{\mathrm{T}}, \mathbf{w}_{2,i}^{\mathrm{T}}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} = 0\ , \tag{C.27}$$

womit dieser Teil bewiesen ist.

Der Beweis für die vollständige Beobachtbarkeit folgt direkt aus dem Dualitätsprinzip vom Abschnitt 7.7. □

Beweis zu Satz 7.13. Es ist sofort einsichtig, dass die Beziehungen (7.78) und (7.79) für alle s mit $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) \neq 0$ erfüllt sind. Offensichtlich müssen nur jene s, die auch Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ sind, detaillierter untersucht werden.

$\operatorname{rang}[s\mathbf{E}-\mathbf{A},\mathbf{b}] = n \Rightarrow$ System ist vollständig erreichbar: Wenn $\operatorname{rang}[s\mathbf{E}-\mathbf{A},\mathbf{b}] = n$, dann existiert kein nichttrivialer Vektor $\mathbf{w}^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ so, dass die nachfolgenden Gleichungen

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}}[s\mathbf{E}-\mathbf{A},\mathbf{b}] = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = s\mathbf{w}^{\mathrm{T}} \tag{C.28}$$

gelten. Da wegen der letzten Beziehung in (C.28) $\mathbf{w}^{\mathrm{T}}$ ein Linkseigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ mit zugehörigem Eigenwert s ist, folgt nach Satz 7.12, dass das System vollständig erreichbar ist.

Aufgabe C.4. Beweisen Sie die Umkehrung: das System ist vollständig erreichbar $\Rightarrow \operatorname{rang}[s\mathbf{E}-\mathbf{A},\mathbf{b}] = n$

Hinweis: Verwenden Sie die selben Argumente wie soeben beschrieben und nutzen Sie die Ergebnisse von Satz 7.12.

Der Beweis für die Beobachtbarkeit erfolgt auf analoge Art und Weise. □

Beweis zu Satz 8.4. Der Beweis beruht auf dem PBH-Eigenvektortest von Satz 7.12. Die Linkseigenvektoren $\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}} = \left[\mathbf{w}_{1,i}^{\mathrm{T}}, w_{2,i}\right]$ zu den Eigenwerten λ_i der Matrix $\mathbf{\Phi}_I$ berechnen sich aus der Beziehung

$$\left[\mathbf{w}_{1,i}^{\mathrm{T}}, w_{2,i}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{\Phi} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{c}^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix} = \lambda_i\left[\mathbf{w}_{1,i}^{\mathrm{T}}, w_{2,i}\right] \tag{C.29}$$

bzw.

$$\mathbf{w}_{1,i}^{\mathrm{T}}(\mathbf{\Phi}-\lambda_i\mathbf{E}) - w_{2,i}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \quad \text{und} \quad w_{2,i} = \lambda_i w_{2,i}\ . \tag{C.30}$$

Man erkennt unmittelbar aus (C.30), dass für alle Eigenwerte λ_i der Matrix $\mathbf{\Phi}$, die nach Voraussetzung ungleich 1 sind, gilt, $w_{2,i} = 0$ und wegen der vollständigen Erreichbarkeit von $(\mathbf{\Phi},\mathbf{\Gamma})$ folgt $\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{\Gamma}_I = \mathbf{w}_{1,i}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Gamma} \neq 0$. Für den Eigenwert $\lambda_i = 1$ des hinzugefügten Integrators ergibt sich aus (C.30) und der Invertierbarkeit der Matrix $(\mathbf{\Phi}-\mathbf{E})$ die Beziehung

$$\mathbf{w}_{1,i}^{\mathrm{T}} = w_{2,i}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{\Phi}-\mathbf{E})^{-1} \quad \text{mit} \quad w_{2,i} \neq 0 \tag{C.31}$$

und da $G(z)|_{z=1} \neq 0$ ist mit

$$G(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} (z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Gamma}, \tag{C.32}$$

folgt weiters

$$\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{\Gamma}_I = w_{2,i} \mathbf{c}^{\mathrm{T}} (\mathbf{\Phi} - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{\Gamma} \neq 0 \ . \tag{C.33}$$

Damit ist aber gezeigt, dass kein Linkseigenvektor von $\mathbf{\Phi}_I$ orthogonal zu $\mathbf{\Gamma}_I$ ist, womit obiger Satz bewiesen ist. □