

1. Systeme und Systemmodelle

1.1. Der Systembegriff

Der Begriff eines *Systems* wird in den verschiedensten wissenschaftlichen und nichtwissenschaftlichen Bereichen verwendet, wobei dessen Bedeutung oft nicht klar definiert ist. Einfach formuliert ist *ein System die Verbindung unterschiedlicher Komponenten, die miteinander in Interaktion stehen, zu einem Ganzen zum Zwecke der Durchführung bestimmter Aufgaben*. Die Wechselwirkung eines Systems mit der Systemumgebung erfolgt über die so genannten *Eingangs-* bzw. *Ausgangsgrößen*, siehe Abbildung 1.1. Die Eingangsgrößen u_1, u_2, \dots, u_p sind dabei Größen, die von der Systemumgebung auf das System einwirken und nicht vom Verhalten des Systems selbst beeinflusst werden. Man unterscheidet dabei zwischen Eingangsgrößen, mit denen man das System gezielt (regelungstechnisch) beeinflussen kann (*Stellgrößen*) und Eingangsgrößen, die nicht unserer Kontrolle unterliegen (*Störgrößen*). Die Ausgangsgrößen y_1, y_2, \dots, y_q sind Größen, die vom System generiert werden und ihrerseits die Systemumgebung beeinflussen. Ausgangsgrößen, die messtechnisch erfassbar sind, nennt man auch *Messgrößen*.

Im Folgenden betrachte man die zwei einfachen elektrischen Systeme von Abbildung 1.2, nämlich einen Widerstand und einen idealen Kondensator, mit der Eingangsgröße $i(t)$ (Strom), der Ausgangsgröße $u(t)$ (Spannung) und der Zeit t . Beim Widerstand R ist die Ausgangsgröße zu jedem Zeitpunkt t eindeutig durch die Eingangsgröße zum Zeitpunkt t bestimmt, es gilt nämlich

$$u(t) = Ri(t) . \quad (1.1)$$

Systeme dieser Art, deren Ausgangsgrößen lediglich vom Augenblickswert der Eingangsgrößen abhängen, werden als *statische Systeme* bezeichnet. Im Gegensatz dazu muss zur Berechnung der Spannung $u(t)$ des Kondensators C zum Zeitpunkt t der Eingangsstrom $i(\tau)$ für die gesamte Vergangenheit $\tau \leq t$ bekannt sein, da gilt

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau}_{u(t_0)=u_0} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau . \quad (1.2)$$

Kennt man die Eingangsgröße $i(\tau)$ lediglich für das Zeitintervall $t_0 \leq \tau \leq t$, dann muss zusätzlich die Spannung des Kondensators zum Zeitpunkt t_0 als Anfangsbedingung $u(t_0) = u_0$ bekannt sein. Wie man aus (1.2) erkennt, beinhaltet die Anfangsbedingung die gesamte Information über die Vergangenheit $\tau < t_0$. Man sagt auch, $u(t_0)$ beschreibt den internen *Zustand* des Systems Kondensator zum Zeitpunkt t_0 . Systeme dieser Art, deren Ausgangsgrößen nicht nur vom Augenblickswert der Eingangsgrößen sondern auch von deren Vergangenheit abhängen, werden als *dynamische Systeme* bezeichnet.

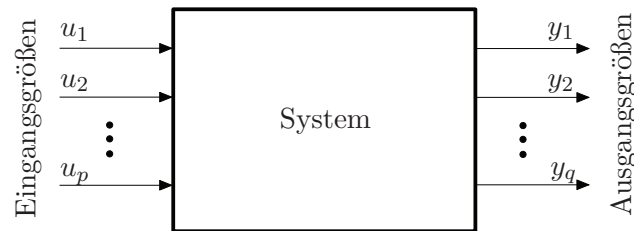


Abbildung 1.1.: Zum Systembegriff.

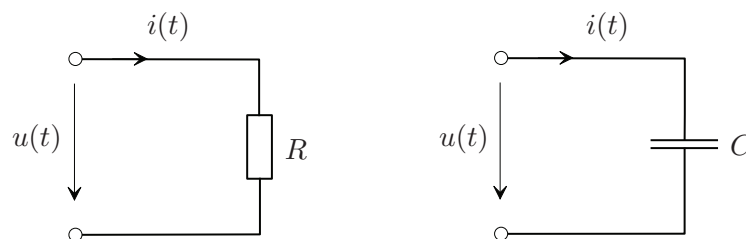


Abbildung 1.2.: Zu statischen und dynamischen Systemen.

Wenn für ein System nach Abbildung 1.1, wie im Falle des Widerstandes und des Kondensators, die Werte der Ausgangsgrößen y_1, y_2, \dots, y_q zum Zeitpunkt t ausschließlich vom Verlauf der Eingangsgrößen $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_p(\tau)$ für $\tau \leq t$ abhängen, dann nennt man das System *kausal*. Da alle technisch realisierbaren Systeme kausal sind, werden wir uns im Folgenden auf diesen Fall beschränken.

Die bisherigen Überlegungen erlauben uns nun die allgemeine Definition der Zustandsgrößen eines dynamischen Systems anzugeben:

Definition 1.1 (Zustand). Existieren für ein dynamisches System Größen x_1, \dots, x_n mit der Eigenschaft, dass die Ausgangsgrößen y_1, y_2, \dots, y_q zu einem beliebigen Zeitpunkt t eindeutig durch den Verlauf der Eingangsgrößen $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_p(\tau)$ auf dem Intervall $t_0 \leq \tau \leq t$ und den Werten von $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ für ein beliebiges t_0 festgelegt sind, dann heißen die Größen x_1, \dots, x_n *Zustandsgrößen* des Systems.

Aufgabe 1.1. Welche Größe wählen Sie als Zustandsgröße bei einer Induktivität? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 1.1. Strom durch die Induktivität.

Dynamische Systeme, die sich durch eine endliche Anzahl n von Zustandsgrößen charakterisieren lassen, werden auch als *Systeme mit finitem Zustand* der *Ordnung n* bezeichnet. Diese Systeme mit finitem Zustand, oft auch *konzentriert-parametrische Systeme* genannt,

werden durch mathematische Modelle in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen beschrieben. Im Rahmen dieser Vorlesung schränken wir uns auf jene Systemklasse mit finitem Zustand ein, die eine Beschreibung durch ein *explizites mathematisches Modell* folgender Form erlaubt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t), & x_1(t_0) &= x_{1,0} \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t), & x_2(t_0) &= x_{2,0} \\ &\vdots & & \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t), & x_n(t_0) &= x_{n,0} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Zustandsdifferen-} \\ \text{tialgleichungen} \\ \text{mit Anfangs-} \\ \text{bedingungen} \end{array} \quad (1.3a)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \\ y_2 &= h_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \\ &\vdots \\ y_q &= h_q(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \end{aligned} \right\} \text{Ausgangsgleichungen} \quad (1.3b)$$

Fasst man die Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsgrößen zu Spaltenvektoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_p \end{bmatrix}^T \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_q \end{bmatrix}^T \quad (1.4b)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \quad (1.4c)$$

zusammen und schreibt zur Vereinfachung der Notation an Stelle von $\frac{d}{dt}$ einen Punkt über die abzuleitende Größe, dann lässt sich (1.3) in kompakter Vektorschreibweise in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.5b)$$

angeben. Die Größen \mathbf{u} , \mathbf{y} und \mathbf{x} werden einfach als *Eingang*, *Ausgang* und *Zustand* des dynamischen Systems bezeichnet.

Wird der Zustand \mathbf{x} als Element eines n -dimensionalen Vektorraumes betrachtet, dann nennt man diesen Vektorraum auch *Zustandsraum*. Der Zustand eines Systems zum Zeitpunkt t kann dann als Punkt im n -dimensionalen Zustandsraum dargestellt werden. Die Kurve all dieser Punkte im Zustandsraum für veränderliche Zeit t in einem Zeitintervall wird auch als *Trajektorie* bezeichnet, siehe Abbildung 1.3 zur Veranschaulichung einer Trajektorie im 3-dimensionalen Zustandsraum. In den Abschnitten 1.2 - 1.7 werden einige Beispiele dynamischer Systeme mit finitem Zustand diskutiert.

Vollständigkeitshalber sollte noch erwähnt werden, dass *Systeme mit infinit-dimensionalem Zustand*, auch *verteilt-parametrische Systeme* genannt, durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Beispiele dazu wären Balken, Platten, Membranen, elektromagnetische Felder etc..

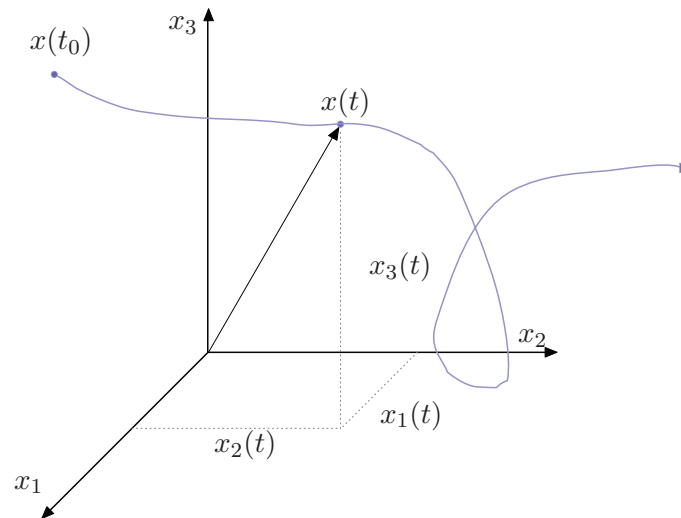


Abbildung 1.3.: Zum Begriff der Trajektorie.

1.2. Elektrisches System

Abbildung 1.4 zeigt einen Serienschwingkreis mit der Eingangsspannung $u(t)$ und der Ausgangsspannung $y(t)$. Das mathematische Modell kann unmittelbar aus den Kirchhoffschen Gesetzen

$$\text{Maschengleichung:} \quad -u(t) + u_C(t) + u_L(t) + y(t) = 0 \quad (1.6a)$$

$$\text{Knotengleichung I:} \quad i_C(t) - i_L(t) = 0 \quad (1.6b)$$

$$\text{Knotengleichung II:} \quad i_L(t) - i_R(t) = 0 \quad (1.6c)$$

und den Bauelementgleichungen

$$\text{Kondensator C:} \quad C \frac{d}{dt} u_C(t) = i_C(t), \quad u_C(0) = u_{C,0} \quad (1.7a)$$

$$\text{Induktivität L:} \quad L \frac{d}{dt} i_L(t) = u_L(t), \quad i_L(0) = i_{L,0} \quad (1.7b)$$

$$\text{Widerstand R:} \quad R i_R(t) = y(t) \quad (1.7c)$$

hergeleitet werden. Wählt man als Zustandsgrößen den Strom $i_L(t)$ durch die Induktivität und die Spannung $u_C(t)$ am Kondensator, dann erhält man unmittelbar die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \quad (1.8)$$

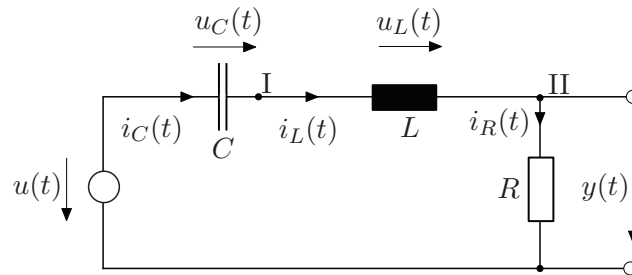


Abbildung 1.4.: Serienschwingkreis.

und die Ausgangsgleichung

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Die Lösung der Zustandsdifferentialgleichungen für $u(t) = 0$ unter den Anfangsbedingungen $u_C(0) = u_{C,0}$ bzw. $i_L(0) = i_{L,0}$ lautet

$$u_C(t) = e^{-\tau t} \left(\left(\frac{\tau}{\omega} u_{C,0} + \frac{1}{\omega C} i_{L,0} \right) \sin(\omega t) + u_{C,0} \cos(\omega t) \right) \quad (1.10a)$$

$$i_L(t) = -e^{-\tau t} \left(\left(\frac{\tau}{\omega} i_{L,0} + \frac{1}{\omega L} u_{C,0} \right) \sin(\omega t) - i_{L,0} \cos(\omega t) \right) \quad (1.10b)$$

mit

$$\tau = \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2}. \quad (1.11)$$

Bei der Darstellung von (1.10) wurde bereits vorausgesetzt, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{CL}} > \frac{R}{2L} \quad (1.12)$$

gilt. In Abbildung 1.5 ist die Trajektorie für die Parameter $R = L = C = 1$ und die Anfangsbedingungen $u_{C,0} = 2$, $i_{L,0} = 1$ für das Zeitintervall $0 \leq t \leq 10$ dargestellt.

Aufgabe 1.2. Wie sehen die Lösungen der Zustandsdifferentialgleichungen (1.8) aus, wenn gilt $\frac{1}{\sqrt{CL}} < \frac{R}{2L}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{CL}} = \frac{R}{2L}$? Zeichnen Sie für beide Fälle die Trajektorien für das Zeitintervall $0 \leq t \leq 10$, die Anfangsbedingungen $u_{C,0} = 2$, $i_{L,0} = 1$ und die Parameter $L = C = 1$, $R = 3$ für den ersten Fall und $L = C = 1$, $R = 2$ für den zweiten Fall.

Lösung von Aufgabe 1.2.

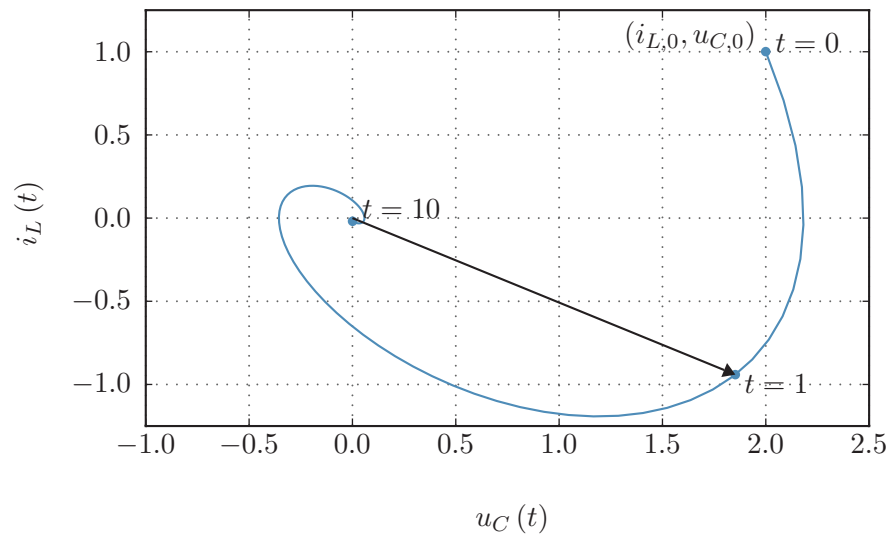


Abbildung 1.5.: Trajektorie des Serienschwingkreises.

- Für $\frac{1}{\sqrt{CL}} < \frac{R}{2L}$:

$$u_C(t) = e^{-\tau t} \left(\left(\frac{\tau}{\omega} u_{C,0} + \frac{1}{\omega C} i_{L,0} \right) \sinh(\omega t) + u_{C,0} \cosh(\omega t) \right)$$

$$i_L(t) = -e^{-\tau t} \left(\left(\frac{\tau}{\omega} i_{L,0} + \frac{1}{\omega L} u_{C,0} \right) \sinh(\omega t) - i_{L,0} \cosh(\omega t) \right)$$

- Für $\frac{1}{\sqrt{CL}} = \frac{R}{2L}$:

$$u_C(t) = e^{-\frac{2}{RC}t} \left(\left(\frac{1}{C} i_{L,0} + \frac{2}{RC} u_{C,0} \right) t + u_{C,0} \right)$$

$$i_L(t) = -e^{-\frac{2}{RC}t} \left(\left(\frac{2}{RC} i_{L,0} + \frac{4}{R^2 C} u_{C,0} \right) t - i_{L,0} \right)$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung ein Computeralgebraprogramm (z. B. in MAPLE den Befehl `dsolve`)!

Aufgabe 1.3. Berechnen Sie zum elektrischen System nach Abbildung 1.6 die Zustandsdifferentialgleichung(en) und die Ausgangsgleichung.

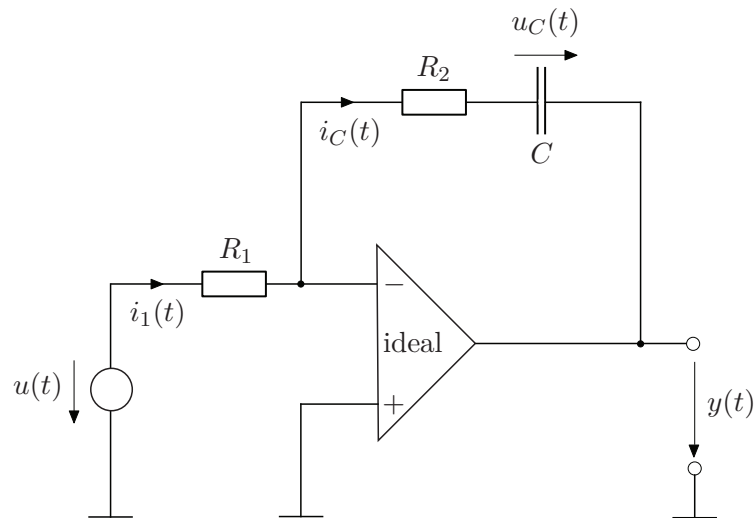


Abbildung 1.6.: Elektronische Schaltung eines PI-Reglers.

Lösung von Aufgabe 1.3.

$$\frac{d}{dt}u_C(t) = \frac{1}{R_1 C}u(t)$$

$$y(t) = -u_C(t) - \frac{R_2}{R_1}u(t)$$

1.3. Mechanisches System

In Abbildung 1.7 ist ein einfaches Feder-Masse-Dämpfer System mit einer auf die Masse m in x -Richtung wirkenden externen Kraft $F(t)$ dargestellt.

Für die Rückstellkraft der Feder gelte die Beziehung

$$F_k(t) = kx(t) \quad (1.13)$$

und die Dämpferkraft lautet

$$F_d(t) = d \frac{d}{dt}x(t) . \quad (1.14)$$

Damit erhält man das mathematische Modell unmittelbar aus dem Impulserhaltungssatz in x -Richtung zu

$$m \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) - d \frac{d}{dt}x(t) + F(t) . \quad (1.15)$$

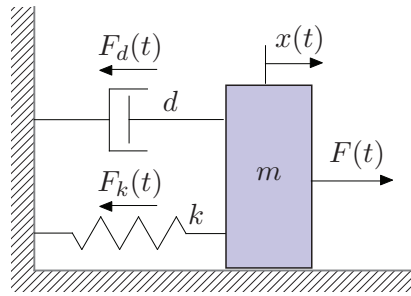


Abbildung 1.7.: Einfaches Feder-Masse-Dämpfer System.

Wählt man als Eingangsgröße des Systems die Kraft $F(t)$ und als Zustandsgrößen die Position $x(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ der Masse m , so lauten die zugehörigen Zustandsdifferentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t) . \quad (1.16)$$

Vergleicht man das mathematische Modell (1.16) mit jenem des elektrischen Serienschwingkreises (1.8), so erkennt man, dass diese die gleiche Struktur besitzen. Die zum mechanischen System analogen Größen im Serienschwingkreis lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen:

Mechanische Größe	äquivalent zu	Elektrische Größe
Weg $x(t)$		Ladung $q_C(t) = C u_C(t)$
Geschwindigkeit $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$		Strom $i_C(t) = \frac{d}{dt}q_C(t) = C \frac{d}{dt}u_C(t)$
Kraft $F(t)$		Eingangsspannung: $u(t)$
Masse m		Spule (Induktivität) L
Federkonstante k		Kondensator (1/Kapazität) $\frac{1}{C}$
Dämpfungskonstante d		Widerstand R

Aufgabe 1.4. Zeigen Sie mit Hilfe obiger Tabelle, dass man durch Ersetzen der mechanischen Größen durch die äquivalenten elektrischen Größen in (1.16) unmittelbar (1.8) erhält. Bestimmen Sie die Lösung der Zustandsdifferentialgleichung (1.16) für $F(t) = 0$ und die Anfangswerte $x(0) = x_0$ sowie $v(0) = v_0$ mit Hilfe von (1.10), (1.11) sowie Aufgabe 1.2.

Man beachte, dass die *Wahl der Zustandsgrößen keinesfalls eindeutig* ist. Betrachten Sie dazu folgende Aufgabe:

Aufgabe 1.5. Gegeben ist das mathematische Pendel mit dem masselosen Stab der Länge l und der Punktmasse m von Abbildung 1.8.

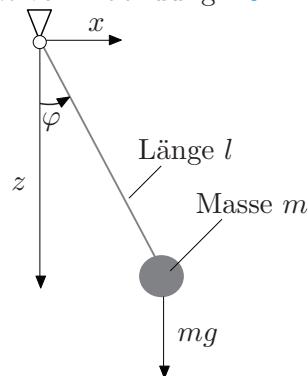


Abbildung 1.8.: Mathematisches Pendel.

Berechnen Sie die Zustandsdifferentialgleichungen und die Ausgangsgleichung, wenn als Ausgangsgröße y die Auslenkung der Punktmasse m von der unteren Ruhelage in z -Richtung herangezogen wird. Es wird dabei angenommen, dass der Winkel φ des Pendels aus Konstruktionsgründen nur im Bereich $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ auftreten kann. Wählen Sie zuerst als Zustandsgrößen den Winkel $\varphi(t)$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t)$ und anschließend die Auslenkung der Masse m in x -Richtung $x(t)$ und deren zeitliche Ableitung $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$.

Lösung von Aufgabe 1.5.

- Zustandsvektor: $\mathbf{x}^T = [\varphi \ \omega]$:
Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{l} \sin(\varphi)\end{aligned}$$

Ausgangsgleichung:

$$y = -l(1 - \cos(\varphi))$$

- Zustandsvektor: $\mathbf{x}^T = [x \ v]$:
Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{xv^2}{l^2 - x^2} - \frac{xg}{l^2} \sqrt{l^2 - x^2}\end{aligned}$$

Ausgangsgleichung:

$$z = \sqrt{l^2 - x^2} - l$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung ein Computeralgebraprogramm (bspw. MAPLE).

1.4. Elektromechanisches System

Abbildung 1.9 zeigt die schematische Darstellung einer fremderregten Gleichstrommaschine, die über eine Seiltrommel eine Last bewegt. Es soll nun ein geeignetes mathematisches Modell zur Beschreibung dieses Systems erstellt werden. Es sei erwähnt, dass die Darstellung der fremderregten Gleichstrommaschine in Form des einfachen Ersatzschaltbildes von Abbildung 1.9 bereits eine Reihe von Modellannahmen impliziert, nämlich

- die räumlich verteilten Wicklungen können als konzentrierte Induktivitäten in den jeweiligen Wicklungsachsen modelliert werden,
- die um 90° gegeneinander verdrehten Induktivitäten im Anker- und Erregerkreis deuten bereits an, dass eine vollkommene Entkopplung zwischen Anker- und Erregerfeld angenommen wird,
- die Widerstände im Anker- und Erregerkreis seien konstant,
- es werden keine Eisenverluste berücksichtigt,
- es gibt keine Sättigungserscheinungen im Ankerkreis und
- die Kommutierung werde als ideal vorausgesetzt (keine Drehmomentenwelligkeit).

Weiters wird angenommen, dass das Seil masselos und nicht dehnbar ist sowie dass sich der Seiltrommelradius r durch das Auf- bzw. Abwickeln des Seiles nicht ändert.

Das mathematische Modell der Gleichstrommaschine ergibt sich unmittelbar aus den Maschengleichungen im Anker- und Erregerkreis

$$\text{Masche Ankerkreis: } -u_A + R_A i_A + u_{LA} + u_{ind} = 0 \quad (1.17a)$$

$$\text{Masche Erregerkreis: } -u_F + R_F i_F + u_{LF} = 0 \quad (1.17b)$$

mit

$$u_{LA} = L_A \frac{di_A}{dt} \quad (1.18a)$$

$$u_{LF} = \frac{d\psi_F}{dt}(i_F) = \frac{d}{dt}(L_F(i_F) i_F) \quad (1.18b)$$

sowie der induzierten Spannung

$$u_{ind} = k\psi_F(i_F)\omega \quad (1.19)$$

zu

$$L_A \frac{di_A}{dt} = u_A - R_A i_A - k\psi_F(i_F)\omega \quad (1.20a)$$

$$\frac{\partial}{\partial i_F} \psi_F(i_F) \frac{di_F}{dt} = u_F - R_F i_F . \quad (1.20b)$$

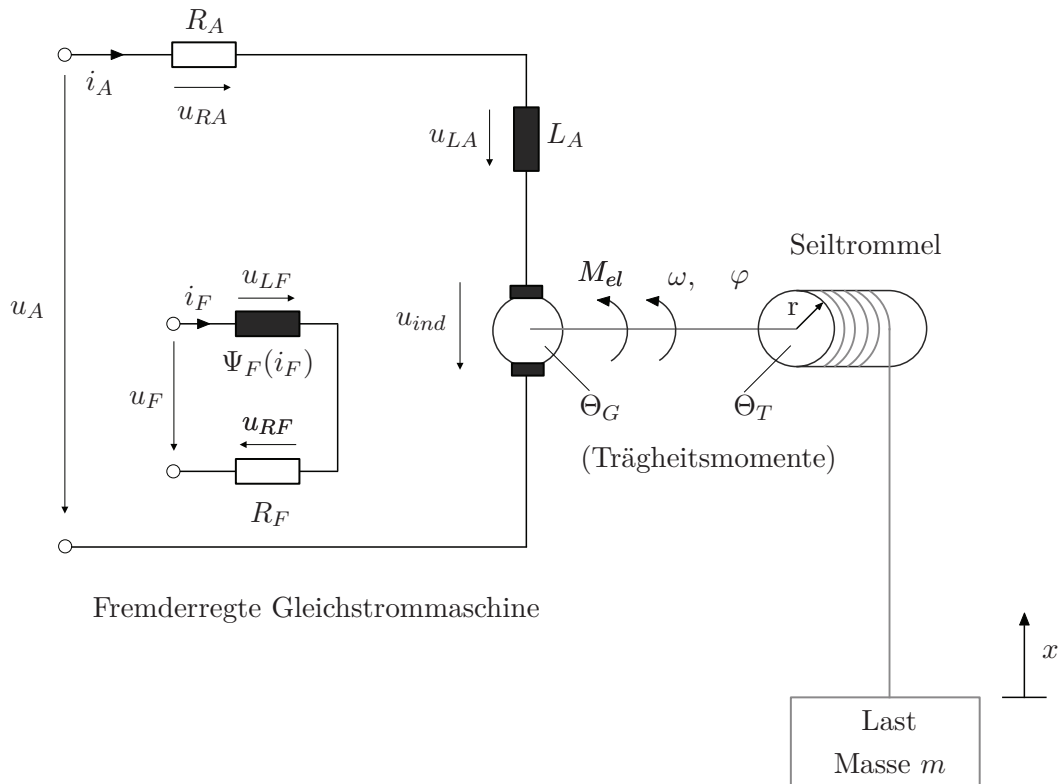


Abbildung 1.9.: Fremderregte Gleichstrommaschine mit Seiltrommel und Last.

Dabei bezeichnen i_A und i_F den Anker- bzw. Erregerstrom, u_A und u_F die Anker- bzw. Erregerspannung, R_A und R_F die Wicklungswiderstände der Anker- bzw. Erregerwicklung, $\psi_F(i_F)$ den verketteten Fluss der Erregerwicklung, L_A die Ankerinduktivität, k die Ankerkreisconstante und ω die Drehwinkelgeschwindigkeit des Rotors. Führt man nun gemäß Abbildung 1.10 die Seilkraft F_s ein, so erhält man durch Anwendung des Drehimpulserhaltungssatzes für die Seiltrommel die Beziehung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad (1.21a)$$

$$(\Theta_G + \Theta_T) \frac{d\omega}{dt} = M_{el} - F_s r \quad (1.21b)$$

mit dem Drehwinkel φ , dem elektrischen Moment der Gleichstrommaschine

$$M_{el} = k\psi_F(i_F) i_A \quad (1.22)$$

und den Trägheitsmomenten Θ_G und Θ_T des Rotors der Gleichstrommaschine und der Seiltrommel. Auf analoge Art und Weise liefert der Impulserhaltungssatz für die Last mit

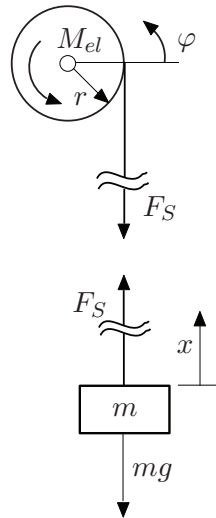


Abbildung 1.10.: Zum mechanischen Teilsystem.

der Masse m

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (1.23a)$$

$$m \frac{dv}{dt} = F_s - mg \quad (1.23b)$$

mit der Erdbeschleunigung g sowie der Position x und der Geschwindigkeit v der Last.

Unter Berücksichtigung der geometrischen Zwangsbedingung

$$r \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\omega} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_v \quad (1.24)$$

kann man die Seilkraft F_s aus (1.23) berechnen und in (1.21) einsetzen. Damit ergeben sich die Zustandsdifferentialgleichungen zu

$$\frac{di_A}{dt} = \frac{1}{L_A} (u_A - R_A i_A - k\psi_F(i_F)\omega) \quad (1.25a)$$

$$\frac{di_F}{dt} = \frac{1}{\frac{\partial \psi_F(i_F)}{\partial i_F}} (u_F - R_F i_F) \quad (1.25b)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad (1.25c)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\Theta_G + \Theta_T + mr^2} (k\psi_F(i_F) i_A - mgr) \quad (1.25d)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x}^T = [i_A \quad i_F \quad \varphi \quad \omega]$ sowie dem Eingang $\mathbf{u}^T = [u_A \quad u_F]$ und die Ausgangsgleichung lautet

$$y = r\varphi. \quad (1.26)$$

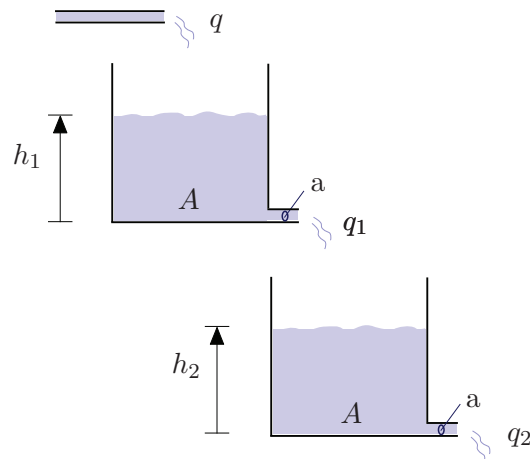


Abbildung 1.11.: Zwei-Tank-System.

1.5. Hydraulisches System

Ein Speiserohr fördert einen Volumenstrom q in einen Behälter, dessen Pegelhöhe mit h_1 bezeichnet wird. Aus diesem Behälter fließt durch ein Abflussrohr der Volumenstrom q_1 in einen zweiten Behälter mit der Pegelhöhe h_2 , aus dem wieder ein Abfluss q_2 strömt (siehe Abbildung 1.11).

Die Eingangsgröße des Systems ist der Volumenstrom q und als Ausgangsgröße wird der Abfluss aus dem zweiten Behälter q_2 gewählt. Einfachheit halber sei angenommen, dass sämtliche Behälter die gleiche Querschnittsfläche A haben und die Querschnitte der Abflussrohre generell den gleichen Wert a aufweisen. Die Bilanzgleichungen für die beiden Behälter lauten dann

$$A \frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \quad (1.27a)$$

$$A \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 . \quad (1.27b)$$

Der Zusammenhang zwischen Pegelhöhe und Abfluss sei durch eine nichtlineare Kennlinie der Form

$$q_1 = a\sqrt{2gh_1}, \quad h_1 \geq 0 \quad (1.28a)$$

$$q_2 = a\sqrt{2gh_2}, \quad h_2 \geq 0 \quad (1.28b)$$

gegeben, wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet.

Damit errechnen sich die Zustandsdifferentialgleichungen zu

$$A \frac{dh_1}{dt} = -a\sqrt{2g}\sqrt{h_1} + q, \quad h_1 \geq 0 \quad (1.29a)$$

$$A \frac{dh_2}{dt} = a\sqrt{2g} \left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \right), \quad h_2 \geq 0 \quad (1.29b)$$

und die Ausgangsgleichung ergibt sich in der Form

$$q_2 = a\sqrt{2gh_2}. \quad (1.30)$$

Aufgabe 1.6. Erweitern Sie das Zwei-Tank-System von Abbildung 1.11 um einen dritten Tank zu einem Drei-Tank-System. Nehmen Sie dabei an, dass A_3 die Fläche und h_3 die Pegelhöhe des dritten Behälters ist und dass das Abflussrohr aus dem dritten Behälter eine Querschnittsfläche a_3 aufweist. Berechnen Sie die Zustandsdifferentialgleichungen und die Ausgangsgleichung für den Abfluss q_3 aus dem dritten Behälter.

Lösung von Aufgabe 1.6.

Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\begin{aligned} A \frac{dh_1}{dt} &= -a\sqrt{2g}\sqrt{h_1} + q, & h_1 &\geq 0 \\ A \frac{dh_2}{dt} &= a\sqrt{2g}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}), & h_2 &\geq 0 \\ A_3 \frac{dh_3}{dt} &= \sqrt{2g}(a\sqrt{h_2} - a_3\sqrt{h_3}), & h_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ausgangsgleichung:

$$q_3 = a_3\sqrt{2gh_3}$$

1.6. Biologisches System

Betrachtet man die Räuber-Beute-Beziehung zweier Populationen, so kann die dynamische Populationsentwicklung mit Hilfe der Lotka-Volterra-Differentialgleichungen beschrieben werden. Das mathematische Modell beruht dabei auf der Annahme, dass die Anzahl der Beutetiere exponentiell mit der Wachstumsrate $a > 0$ zunimmt, wenn keine Räuber vorhanden sind. Umgekehrt nimmt man an, dass bei Nicht-Vorhandensein von Beutetieren die Anzahl der Räuber exponentiell mit der Rate $c > 0$ abnimmt. Für den Fall, dass beide Populationen vorhanden sind, setzt man die Anzahl der „feindlichen“ Begegnungen proportional dem Produkt der beiden Populationen an. Dabei liegt dem Modell der Ansatz zu Grunde, dass die Anzahl der Beutetiere mit den „feindlichen“ Begegnungen dezimiert (Proportionalitätskonstante $b > 0$) und die Anzahl der Räuber erhöht (Proportionalitätskonstante $d > 0$) werden.

Bezeichnet man nun die Anzahl der Beutetiere mit x_1 und die der Räuber mit x_2 , dann lautet das zugehörige mathematische Modell

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 - bx_1x_2 \quad (1.31a)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -cx_2 + dx_1x_2 \quad (1.31b)$$

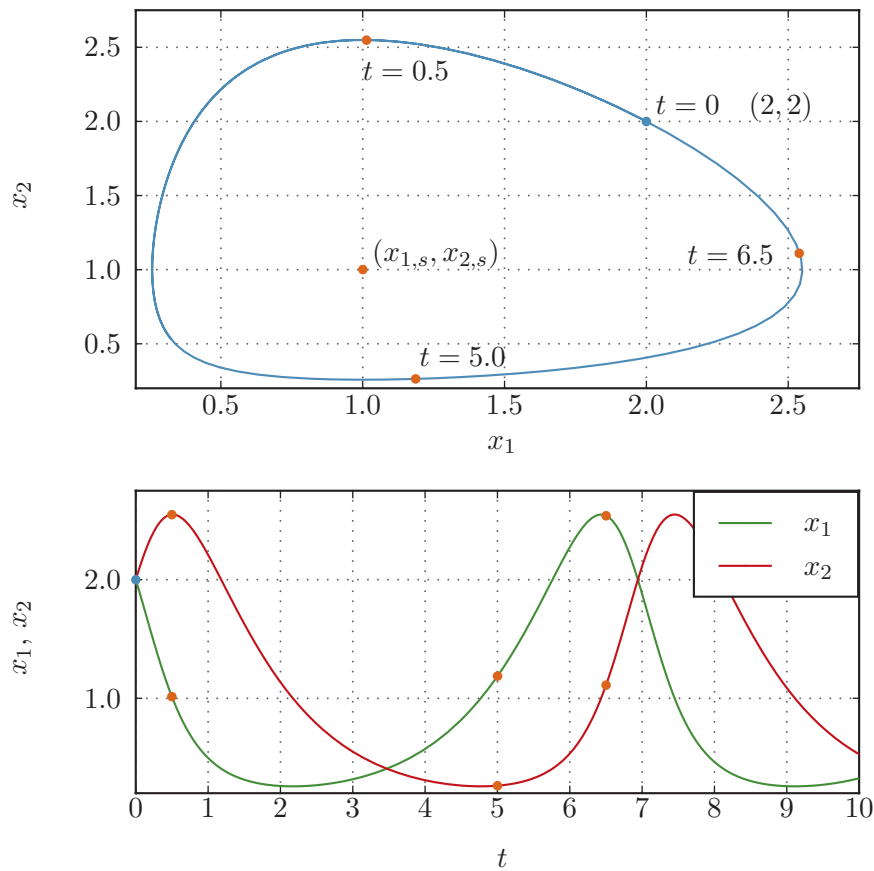


Abbildung 1.12.: Zum Räuber-Beute-Modell.

Aufgabe 1.7. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage(n) $(x_{1,s}, x_{2,s})$ des Systems (1.31), indem Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_{1,s} - bx_{1,s}x_{2,s} &= 0 \\ -cx_{2,s} + dx_{1,s}x_{2,s} &= 0 \end{aligned}$$

lösen.

Lösung von Aufgabe 1.7. Man erhält die beiden Lösungen $x_{1,s} = x_{2,s} = 0$ und $x_{1,s} = \frac{c}{d}$, $x_{2,s} = \frac{a}{b}$.

Abbildung 1.12 zeigt das Verhalten der Populationen für die spezielle Wahl $a = b = c = d = 1$ und $x_1(0) = x_2(0) = 2$ in der (x_1, x_2) -Ebene. Wie man erkennt, weist für diesen Fall das Räuber-Beute-Modell eine *geschlossene Trajektorie*, auch *Grenzzzyklus* genannt, auf.

1.7. Diskretes System

Die bisher behandelten Systeme gehören alle zur Klasse der *zeitkontinuierlichen Systeme*, d. h., die Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen sind Funktionen der kontinuierlichen Zeit $t \in \mathbb{R}$. Im Gegensatz dazu gibt es auch so genannte *zeitdiskrete Systeme*, die durch eine *Folge* von Punkten $x(k)$ bzw. x_k , die mit einem fortlaufenden Index $k \in \mathbb{Z}$ versehen sind, beschrieben werden. Diese Folgenwerte können beispielsweise zu *äquidistanten Zeitabschnitten*, wie dies bei Regelungsaufgaben mit digitalen Prozessoren in Kombination mit A/D- und D/A-Wandlern der Fall ist, oder auch ohne genau festgelegte zeitliche Abfolge auftreten. Der erstere Fall ist für die digitale Regelung von essentieller Bedeutung und wird im Detail noch behandelt. Im Gegensatz zu zeitkontinuierlichen Systemen, wo die zugehörigen mathematischen Modelle auf Differentialgleichungen basieren, werden im zeitdiskreten Fall *Differenzgleichungen* zur Modellierung herangezogen.

Als einfaches Beispiel wird im Folgenden die Verzinsung eines Bankguthabens durch ein zeitdiskretes mathematisches Modell beschrieben. Es sei angenommen, dass $x(k)$ das Bankguthaben im Monat k bezeichnet und dass die Bank das Guthaben monatlich zu einem festen Zinssatz von $p\%$ verzinst.

Zahlt man nun monatlich einen Betrag $u(k)$ auf das Konto ein, dann lautet das Guthaben im nächsten Monat $k+1$ wie folgt

$$x(k+1) = \left(1 + \frac{p}{100}\right) x(k) + u(k) . \quad (1.32)$$

Natürlich kann mit Hilfe dieser Differenzgleichung bei gleichbleibenden Bedingungen das Guthaben der folgenden Monate ebenfalls einfach errechnet werden.

Für die Spieler unter den Lesern ist folgende Aufgabe wärmstens empfohlen:

Aufgabe 1.8 (Gambler's Ruin). Angenommen, ein Spieler A geht ins Casino B um Roulette zu spielen. Die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt sei p , $0 < p < 1$ und die Wahrscheinlichkeit, dass das Casino gewinnt, ist entsprechend $q = 1 - p$. Am Beginn des Spiels hätte der Spieler A die Anzahl von a und das Casino b Chips. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler A alle Chips B des Casinos gewinnt?

Um diese Aufgabe zu lösen, nehmen wir an, der Spieler A hätte $0 \leq k \leq a + b$ und das Casino entsprechend $a + b - k$ Chips. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler A im Besitz von k Chips gewinnt, bezeichne man mit $x(k)$. Je nachdem ob der Spieler A verliert oder gewinnt, hat er nach diesem Spiel $(k - 1)$ oder $(k + 1)$ Chips.

Damit muss aber $x(k)$ der Differenzgleichung

$$x(k) = px(k+1) + qx(k-1)$$

genügen. Weiters gelten natürlich die Zusatzbedingungen

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad x(a+b) = 1 .$$

Berechnen Sie die Lösung dieser Differenzgleichung? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler A alle Chips B des Casinos gewinnt, wenn $a = 100$, $b = 10^4$, $p = 18/37$ und $q = 19/37$ (rot, schwarz, Null bei Roulette)?

Lösung von Aufgabe 1.8.

$$x(k) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

Wahrscheinlichkeit für den Spieler die „Bank zu brechen“: $x(a) = 1.538 \times 10^{-235}$

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung ein Computeralgebraprogramm (z. B. in MAPLE den Befehl `rsolve`)!

1.8. Strukturschaltbilder

Obwohl das dynamische Systemverhalten sehr gut durch die mathematischen Modelle (Zustandsdifferentialgleichungen und Ausgangsgleichung) beschrieben werden, ist es oft zweckmäßig, das mathematische Modell in Form von *Strukturschaltbildern* zu visualisieren.

Ursprünglich wurde diese grafische Darstellung zur Simulation der Zustandsdifferentialgleichungen am Analogrechner entwickelt – heute bieten viele Simulationsprogramme am Digitalrechner (z. B. MATLAB/SIMULINK) sowie industrielle Automatisierungssysteme die Möglichkeit einer blockorientierten Eingabe des mathematischen Modells. Aus diesem Grund sollte an dieser Stelle kurz auf diese Darstellung eingegangen werden. Abbildung 1.13 zeigt einige gängige Symbole und deren Bedeutung. In runder Klammer ist auch die Bezeichnung des jeweiligen Blocks im für regelungstechnische Anwendungen wohl am meisten verbreiteten Simulationsprogramm MATLAB/SIMULINK angegeben.

Als Beispiel betrachte man die Zustandsdifferentialgleichungen (1.25) des elektromechanischen Systems vom Abschnitt 1.4 und schreibe diese im ersten Schritt als Integralgleichungen in der Form

$$i_A(t) = i_A(0) + \frac{1}{L_A} \int_0^t (u_A(\tau) - R_A i_A(\tau) - k\psi_F(i_F(\tau))\omega(\tau)) d\tau \quad (1.33a)$$

$$i_F(t) = i_F(0) + \int_0^t \frac{1}{\tilde{\psi}_F(i_F(\tau))} (u_F(\tau) - R_F i_F(\tau)) d\tau \quad (1.33b)$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \omega(\tau) d\tau \quad (1.33c)$$

$$\omega(t) = \omega(0) + \frac{1}{\tilde{\Theta}} \int_0^t (k\psi_F(i_F(\tau))i_A(\tau) - mgr) d\tau \quad (1.33d)$$

mit den Abkürzungen

$$\tilde{\Theta} = \Theta_G + \Theta_T + mr^2 \quad \text{und} \quad \tilde{\psi}_F(i_F) = \frac{\partial}{\partial i_F} \psi_F(i_F) \quad (1.34)$$

um. Das zugehörige Strukturschaltbild ist Abbildung 1.14 zu entnehmen.

Aufgabe 1.9. Zeichnen Sie die Strukturschaltbilder des elektrischen Systems (1.8), (1.9) vom Abschnitt 1.2, des mechanischen Systems (1.16) vom Abschnitt 1.3 und des hydraulischen Systems (1.29) vom Abschnitt 1.5.

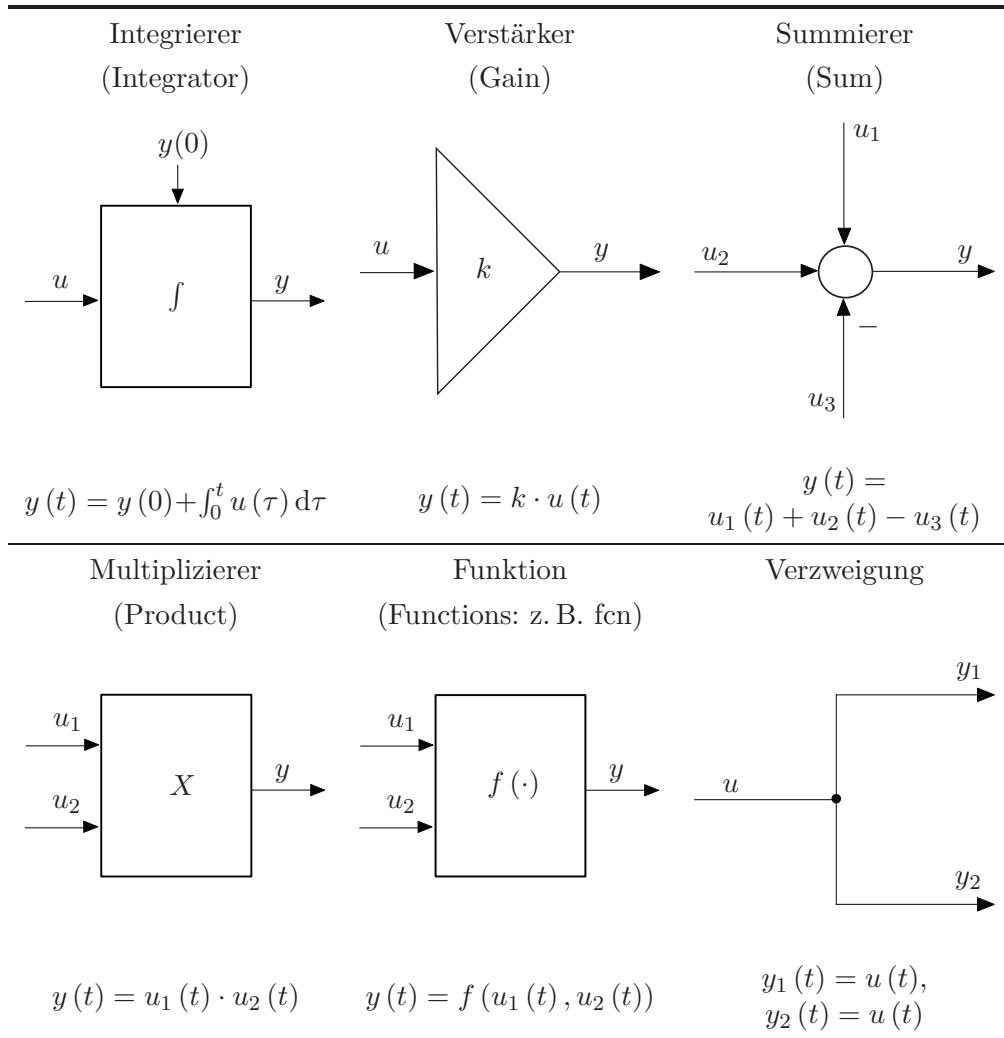


Abbildung 1.13.: Die graphische Darstellung und deren Bedeutung einiger wesentlicher Blöcke für Strukturschaltbilder.

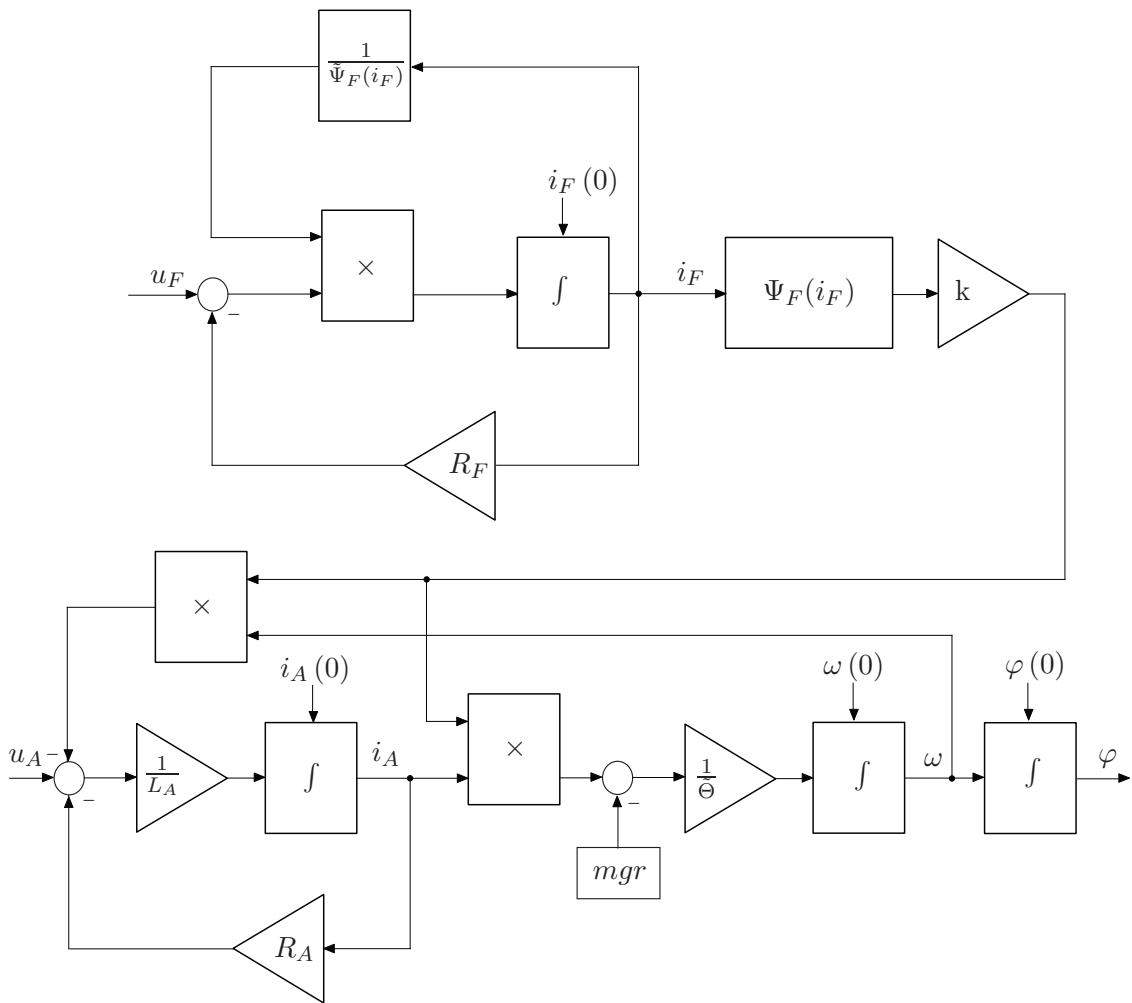


Abbildung 1.14.: Strukturschaltbild des elektromechanischen Systems vom Abschnitt 1.4.

1.9. Literatur

- [1.1] F. E. Cellier, *Continuous System Modeling*. New York: Springer, 1991.
- [1.2] S. W. Director und R. A. Rohrer, *Introduction to Systems Theory*. New York: McGraw-Hill, 1972.
- [1.3] O. Föllinger und D. Franke, *Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme*. München Wien: Oldenbourg, 1982.
- [1.4] G. Ludyk, *Theoretische Regelungstechnik 1*. Berlin Heidelberg: Springer, 1995.
- [1.5] D. G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems*. New York: John Wiley & Sons, 1979.
- [1.6] L. Padulo und M. A. Arbib, *System Theory*. Philadelphia: W.B. Saunders Company, 1974.
- [1.7] J. L. Shearer und B. T. Kulakowski, *Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems*. New York: Macmillan Publishing Company, 1990.