2. Systemeigenschaften

Wie man sich anhand des Beispiels von Abbildung 2.1 einfach überzeugen kann, ist es nicht möglich, die Linearität eines Systems in der Form zu beurteilen, dass man sagt „Ein System ist nichtlinear, wenn es ein nichtlineares Element beinhaltet".

Daher wollen wir am Beginn dieses Kapitels mathematisch korrekt klassifizieren, wann ein System der Form (siehe auch (1.5))

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.1a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{2.1b}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ und dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ linear ist.

2.1. Linearität

Es sei angenommen, dass $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t), t)$ die Lösung der Differentialgleichung (2.1a) zum Zeitpunkt t für den Anfangswert $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ und die Eingangsgröße $\mathbf{u}(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, bezeichnet.

Definition 2.1 (Linearität)**.** Das System (2.1) nennt man *linear*, wenn für alle (zulässigen) Eingangsgrößen $\mathbf{u}(t)$ und jeden beliebigen Anfangszeitpunkt $t_0 \geq 0$ die Ausgangsgröße $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t), t), \mathbf{u}(t), t)$ zu jedem Zeitpunkt $t \geq t_0$ die Bedingungen

$$\mathbf{y}(\alpha_1 \mathbf{x}_{0,1} + \alpha_2 \mathbf{x}_{0,2}, \mathbf{0}, t) = \alpha_1 \mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{0}, t) + \alpha_2 \mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,2}, \mathbf{0}, t) \tag{2.2a}$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{0}, \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2, t) = \beta_1 \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, t) + \beta_2 \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_2, t) \tag{2.2b}$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}, t) + \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}, t) \tag{2.2c}$$

mit α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Dabei bezeichnet man die Eigenschaft (2.2a) auch als das *Superpositionsprinzip* oder *Zerlegungseigenschaft* hinsichtlich der Anfangswerte (*Nulleingangslinearität*), (2.2b) als das Superpositionsprinzip hinsichtlich der Eingangsgrößen (*Nullzustandslinearität*) und (2.2c) als das Superpositionsprinzip hinsichtlich der Eingangsgrößen mit den Anfangswerten (siehe auch die Vorlesung Signale und Systeme 1).

Aufgabe 2.1. Ist das System

$$\dot{x} = 2 + u$$

$$y = x$$

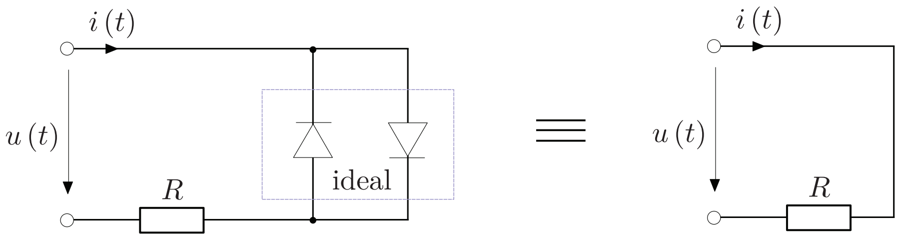

Abbildung 2.1.: Äquivalente Schaltungen.

mit dem Eingang u, dem Ausgang y und dem Zustand x linear?

Lösung von Aufgabe 2.1. Nein.

Es gilt nun folgender Satz:

Satz 2.1. *Das System* (2.1) *ist genau dann* linear, *wenn es sich in die Form*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.3a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{u} \tag{2.3b}$$

überführen lässt.

Dabei bezeichnet die Matrix $\mathbf{A}(t)$ eine $(n \times n)$-Matrix, $\mathbf{B}(t)$ eine $(n \times p)$-Matrix, $\mathbf{C}(t)$ eine $(q \times n)$-Matrix und $\mathbf{D}(t)$ eine $(q \times p)$-Matrix, deren Einträge lediglich von der Zeit t abhängen dürfen.

Aufgabe 2.2. Sind die Systeme der Abschnitte 1.2 - 1.6 linear oder nichtlinear?

Aufgabe 2.3. Geben Sie ein System erster Ordnung an, das die Eigenschaft (2.2a) erfüllt, aber nichtlinear ist.

Aufgabe 2.4. Wie können Sie bei linearen elektrischen Netzwerken mit mehreren Strom- und Spannungsquellen das Superpositionsprinzip nutzen? Wenden Sie dies auf das Netzwerk von Abbildung 2.2 an und berechnen Sie den Spannungsabfall am Widerstand R_3 zufolge der Spannung u_0 der Spannungsquelle und des Stromes i_0 der Stromquelle.

Lösung von Aufgabe 2.4. Spannung u_{R_3} am Widerstand R_3:

$$u_{R_3} = \frac{R_3 R_1}{R_3 + R_1} i_0 + \frac{R_3}{R_3 + R_1} u_0$$

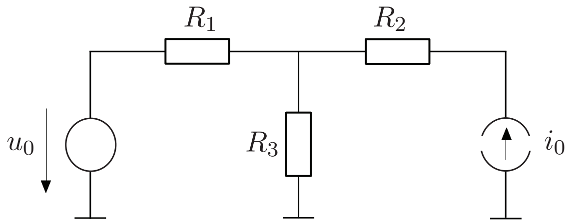

Abbildung 2.2.: Einfaches Netzwerk mit Strom- und Spannungsquelle.

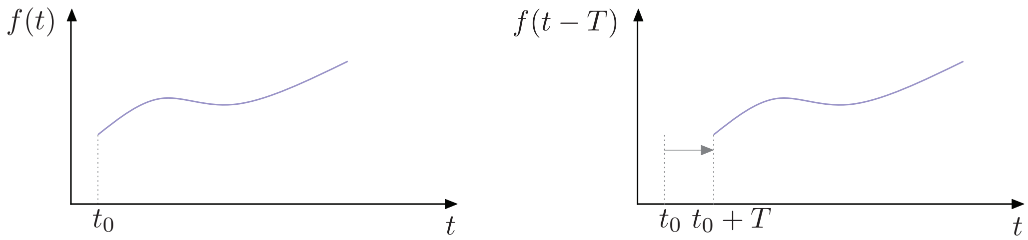

Abbildung 2.3.: Zur Verschiebung einer Zeitfunktion.

2.2. Zeitinvarianz

Bevor der Begriff der Zeitinvarianz erläutert wird, sei festgehalten, dass mit $f(t-T)$, $T>0$, im Folgenden die um die Zeit T nach rechts verschobene Zeitfunktion $f(t)$ gemeint ist, siehe dazu Abbildung 2.3.

Definition 2.2 (Zeitinvarianz)**.** Man nennt nun das System (2.1) *zeitinvariant*, wenn für alle (zulässigen) Eingangsgrößen $\mathbf{u}(t)$ und jeden beliebigen Anfangszeitpunkt $t_0 \geq 0$ nachfolgende Bedingung für alle $t \geq t_0$ erfüllt ist: Bezeichnet $\mathbf{y}(t)$ die Ausgangsgröße des Systems zum Zeitpunkt t für den Anfangswert $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ und die Eingangsgröße $\mathbf{u}(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, dann ist $\mathbf{y}(t-T)$ die Ausgangsgröße des Systems für den Anfangswert $\mathbf{x}(t_0+T) = \mathbf{x}_0$ und die Eingangsgröße $\mathbf{u}(\tau - T)$, $t_0+T \leq \tau \leq t+T$.

Aufgabe 2.5. Ist das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2 + u \\ y &= x \end{aligned}$$

mit dem Eingang u, dem Ausgang y und dem Zustand x zeitinvariant?

Lösung von Aufgabe 2.5. Ja.

Es gilt nun nachstehender Satz:

Satz 2.2. *Das System* (2.1) *ist genau dann* linear und zeitinvariant, *wenn es sich in die Form*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.4a}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{2.4b}$$

überführen lässt.

Aufgabe 2.6. Sind die Systeme der Abschnitte 1.2 - 1.6 zeitvariant oder zeitinvariant?

Aufgabe 2.7. Zeigen Sie anhand der Definition der Zeitinvarianz, dass das System

$$\dot{x} = -tx$$

zeitvariant ist.

Aufgabe 2.8. Betrachten Sie ein Förderband. Die am Bandanfang pro Zeiteinheit aufgebrachte Materialmenge wird mit $u(t)$ bezeichnet, die am Ende pro Zeiteinheit abgeworfene mit $x(t)$. Für den Transportvorgang vom Bandanfang bis zum Bandende benötigt das Material die Zeit t_T (Totzeit). Das System lässt sich vereinfacht durch die Gleichung $x(t) = u(t - t_T)$ beschreiben. Ist das System linear und zeitinvariant?
Lösung: Ja
Lässt es sich durch ein mathematisches Modell der Form (2.1) beschreiben?
Lösung: Nein

2.3. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wann die Lösung eines Differentialgleichungssystems überhaupt existiert und unter welchen Voraussetzungen diese Lösung eindeutig ist. Dazu sollen im ersten Schritt noch ein paar Begriffe eingeführt werden. Sind $\mathbf{f}$ und $\mathbf{h}$ in 2.1 nicht explizit von der Zeit t abhängig, dann ist das System zeitinvariant. Ein *zeitinvariantes, nichtlineares* System hat also die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.5a}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{2.5b}$$

Wirken auf das System (2.1) keine Eingangsgrößen $\mathbf{u}$ ein, oder ist der zeitliche Verlauf der Eingangsgrößen festgelegt, dann heißt das System *frei*.

Ein *freies, nichtlineares* System kann man also in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.6a}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \tag{2.6b}$$

anschreiben. Ist das System (2.1) frei und zeitinvariant, dann nennt man es *autonom*, und es hat die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.7a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \ . \tag{2.7b}$$

Im Folgenden betrachte man das freie, nichtlineare System (2.6a). Ohne Beweis sei festgehalten, dass die Stetigkeit von $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ in den Argumenten $\mathbf{x}$ und t zwar die Existenz einer Lösung garantiert, aber diese keinesfalls eindeutig sein muss.

Dazu betrachte man das System

$$\dot{x} = x^{1/3}, \qquad x(0) = x_0 = 0 \ . \tag{2.8}$$

Man überzeugt sich leicht, dass $x^{1/3}$ zwar stetig ist, aber die Differentialgleichung (2.8) zwei Lösungen, nämlich

$$x(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2} \qquad \text{und} \qquad x(t) = 0 \ , \tag{2.9}$$

zulässt. Der nachstehende Satz gibt nun eine hinreichende Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (2.6a) an:

Satz 2.3 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit)**.** *Es sei* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ *stückweise stetig in* t *und genüge der Abschätzung* (Lipschitz-Bedingung)

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \qquad 0 < L < \infty \tag{2.10}$$

für alle $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{B} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$ *und alle* $t \in [t_0, t_0 + \tau]$. *Dann existiert ein* $\delta > 0$ *so, dass*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.11}$$

genau eine *Lösung für* $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ *besitzt. Dabei wird* L *auch als* Lipschitz-Konstante *bezeichnet.*

Für das Beispiel (2.8) findet man in der Nähe von $x_0 = 0$ tatsächlich keine Lipschitz-Konstante L, für die gilt $\left|x^{1/3}\right| \leq L|x|$.

Wenn $\mathbf{x}(t)$ Lösung des Differentialgleichungssystems (2.6a) ist, genau dann genügt diese auch der Integralgleichung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \tau)\, \mathrm{d}\tau \ . \tag{2.12}$$

Diese Beobachtung ist der Ausgangspunkt für die *Methode der sukzessiven Approximation nach Picard*. Erfüllt nämlich $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ von (2.6a) die Bedingungen von Satz 2.3, dann konvergiert die nachstehende Folge von Funktionen

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(\tau), \tau)\,\mathrm{d}\tau \\
\mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(\tau), \tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_k(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}(\tau), \tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

gegen die eindeutige Lösung von (2.6a), es gilt also

$$
\mathbf{x}(t) = \lim_{k \to \infty} \mathbf{x}_k(t) \ . \tag{2.14}
$$

Beispiel 2.1. Als Beispiel berechne man die Lösung des Systems

$$
\dot{x} = ax, \qquad x(0) = x_0,\ a \in \mathbb{R} \tag{2.15}
$$

mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation nach Picard. Man überzeugt sich leicht, dass in diesem Fall die Folge von Funktionen gemäß (2.13) wie folgt aussieht:

$$
\begin{aligned}
x_0(t) &= x_0 \\
x_1(t) &= x_0 + \int_0^t a x_0 \mathrm{d}\tau = x_0(1 + at) \\
x_2(t) &= x_0 + \int_0^t a x_0 (1 + a\tau)\,\mathrm{d}\tau = x_0\left(1 + at + a^2 \frac{t^2}{2}\right) \\
&\vdots \\
x_k(t) &= x_0 + \int_0^t a x_0 \left(1 + a\tau + \ldots + a^{k-1}\frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!}\right)\mathrm{d}\tau \ .
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Damit erhält man unmittelbar für $k \to \infty$ die bekannte Lösung

$$
x(t) = \lim_{k \to \infty} x_k(t) = x_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{t^k}{k!}\right) = x_0 \mathrm{e}^{at} \ . \tag{2.17}
$$

Aufgabe 2.9. Berechnen Sie für das lineare, zeitvariante System

$$\dot{x} = -\sin(t)\, x, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

einmal die Lösung exakt und bestimmen Sie anschließend mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation nach Picard eine Näherungslösung. Vergleichen Sie die Näherungslösung mit der exakten Lösung für verschiedene Iterationsschritte. Verwenden Sie zur Lösung das Computeralgebraprogramm Maple.

Lösung von Aufgabe 2.9.
Exakte Lösung:

$$x(t) = x_0 \exp(\cos(t) - 1)$$

Näherungslösung für $k = 3$:

$$x_3(t) = x_0 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{6}(\cos(t))^3\right)$$

2.4. Die Transitionsmatrix

Im Weiteren betrachte man das lineare, autonome System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \ . \tag{2.18}$$

Wegen der Zeitinvarianz darf man hier den Anfangszeitpunkt t_0 beliebig festlegen, weshalb er im Folgenden einfachheitshalber auf $t_0 = 0$ gesetzt wurde. Aus

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \tag{2.19}$$

mit $\|\mathbf{A}\|$ als der induzierten Matrixnorm der Matrix $\mathbf{A}$ ist es unmittelbar einsichtig, dass das System (2.18) mit der Lipschitz-Konstanten $L = \|\mathbf{A}\|$ die Lipschitz-Bedingung (2.10) von Satz 2.3 erfüllt.

Damit lässt sich nach der Methode der sukzessiven Approximation nach Picard

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \mathrm{d}\tau = (\mathbf{E} + \mathbf{A}t)\,\mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}(\mathbf{E} + \mathbf{A}\tau)\,\mathbf{x}_0 \mathrm{d}\tau = \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2}\right)\mathbf{x}_0 \\
&\ \ \vdots \\
\mathbf{x}_k(t) &= \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2} + \ldots + \mathbf{A}^k\frac{t^k}{k!}\right)\mathbf{x}_0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

die Lösung von (2.18) in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!}\right)\mathbf{x}_0 = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{x}_0 \tag{2.21}$$

anschreiben.

Die $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{\Phi}(t)$ wird als *Transitionsmatrix* bezeichnet. Wegen der großen Ähnlichkeit zur Exponentialreihe (2.17) schreibt man auch

$$\mathbf{\Phi}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \ . \tag{2.22}$$

Beispiel 2.2. Als Beispiel berechne man die Transitionsmatrix des Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ . \tag{2.23}$$

Die Exponentialreihe (2.17) liefert unmittelbar das Ergebnis

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{0}} \frac{t^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ . \tag{2.24}$$

Aufgabe 2.10. Berechnen Sie die Transitionsmatrix des Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ .$$

Lösung von Aufgabe 2.10.

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) \end{bmatrix}$$

Die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ erfüllt nun folgende Beziehungen:

$$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E} \tag{2.25a}$$

$$\mathbf{\Phi}(t+s) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(s) \tag{2.25b}$$

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}(-t) \tag{2.25c}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t) \ . \tag{2.25d}$$

Aufgabe 2.11. Beweisen Sie die Eigenschaften (2.25) der Transitionsmatrix und überlegen Sie sich ein geometrisches Bild, das diese Eigenschaften beschreibt.

Der nächste Satz gibt nun die allgemeine Lösung eines linearen, zeitinvarianten Systems der Form (siehe auch (2.4))

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.26a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{2.26b}$$

an.

Satz 2.4. *Die allgemeine Lösung des Systems* (2.26) *lautet*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{2.27}$$

mit der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ *von* (2.22)*.*

Beweis. Der Beweis des Satzes erfolgt über die so genannte *Methode der Variation der Konstanten*. Dazu setzt man in (2.26a) die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems mit der zeitabhängigen Größe $\mathbf{x}_0(t)$ der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0(t) \tag{2.28}$$

ein. Damit erhält man

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{x}_0(t) + \mathbf{\Phi}(t)\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{2.29}$$

bzw. mit $\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)$ (Eigenschaft (2.25d)) ergibt sich

$$\mathbf{\Phi}(t)\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{2.30}$$

und mit $\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}(-t)$ (Eigenschaft (2.25c)) folgt

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{\Phi}(-t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t)\ . \tag{2.31}$$

Durch Integration von (2.31) errechnet sich $\mathbf{x}_0(t)$ zu

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.32}$$

bzw. wegen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(0) = \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(-\tau) = \mathbf{\Phi}(t-\tau)$ (Eigenschaft (2.25b)) folgt unmittelbar das Ergebnis zu

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\ . \tag{2.33}$$

□

Vollständigkeitshalber sei erwähnt, dass für lineare, zeitvariante Systeme der Form (2.3) vollkommen analoge Überlegungen angestellt werden können. Nachfolgende Aufgabe soll zeigen, wie man die Transitionsmatrix in diesem Fall berechnen kann.

Aufgabe 2.12. Gegeben ist das lineare, zeitvariante System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\ .$$

Es sei angenommen, dass die Elemente von $\mathbf{A}(t)$ im betrachteten Zeitintervall $[t_0, t_1]$ beschränkt sind. Zeigen Sie, dass das System im betrachteten Zeitintervall eine eindeutige Lösung besitzt und sich in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\,\mathbf{x}_0$$

mit der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ errechnet, wobei die Transitionsmatrix durch die so genannte *Peano-Baker-Reihe*

$$\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{E} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\tau + \ldots$$

dargestellt werden kann.

Aufgabe 2.13. Betrachten Sie das elektrische System von Abbildung 1.6 mit dem zugehörigen mathematischen Modell

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(t) &= \frac{1}{R_1 C} u(t) \\ y(t) &= -u_C(t) - \frac{R_2}{R_1} u(t) \quad . \end{aligned}$$

Berechnen Sie allgemein den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ nach Satz 2.4 für beliebige (zulässige) Eingangsgrößen $u(t)$.

Lösung von Aufgabe 2.13.

$$y(t) = -\frac{1}{R_1 C} \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \frac{R_2}{R_1} u(t)$$

2.5. Linearisierung nichtlinearer Systeme

Wie sich im Rahmen dieser Vorlesung noch zeigen wird, ist die gezielte Beeinflussung linearer, zeitinvarianter Systeme durch Regelung bzw. Steuerung um Größenordnungen einfacher als die nichtlinearer Systeme. Falls jedoch nur kleine Auslenkungen des nichtlinearen Systems um eine *Ruhelage* bzw. einen *Arbeitspunkt* oder von einer *Solltrajektorie* betrachtet werden, kann das nichtlineare System sehr häufig durch ein lineares mathematisches Modell hinreichend gut angenähert werden.

2.5.1. Begriff der Ruhelage

In einem ersten Schritt betrachte man das autonome nichtlineare System nach (2.7a) der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad . \tag{2.34}$$

Definition 2.3 (Ruhelage)**.** Man sagt $\mathbf{x}_R \in \mathbb{R}^n$ ist eine Ruhelage des Systems (2.34), wenn die Bedingung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, t) = \mathbf{0} \tag{2.35}$$

für alle Zeiten $t \geq 0$ erfüllt ist.

Wie man erkennt, hat die Ruhelage $\mathbf{x}_R$ die Eigenschaft, dass das System (2.34) für alle Zeiten $t \geq 0$ in dieser Ruhelage verharrt, sofern man in der Ruhelage startet. Nichtlineare Systeme können eine beliebige Anzahl von Ruhelagen aufweisen.

Beispiel 2.3. Als Beispiele betrachte man das nichtlineare System erster Ordnung

$$\dot{x} = (x-1)(x-2)(x-3) \tag{2.36}$$

mit den drei Ruhelagen $x_{R,1} = 1$, $x_{R,2} = 2$, $x_{R,3} = 3$, das nichtlineare System zweiter Ordnung

$$\dot{x}_1 = x_2 \exp(-x_1) \tag{2.37a}$$
$$\dot{x}_2 = \sin(x_2) \tag{2.37b}$$

mit unendlich vielen Ruhelagen

$$\mathbf{x}_R = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| x_2 = 0 \text{ und } x_1 \text{ ist beliebig} \right\} , \tag{2.38}$$

oder das nichtlineare System erster Ordnung

$$\dot{x} = \left(x^2 + 1\right) , \tag{2.39}$$

das keine Ruhelage besitzt.

Bei linearen, zeitinvarianten autonomen Systemen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.40}$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und der $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$ gibt es *entweder genau eine* Ruhelage, nämlich $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$, oder *unendlich viele* Ruhelagen, wobei man die zwei Fälle wie folgt unterscheidet:

(1)	$\mathbf{A}$ ist regulär	$\det(\mathbf{A}) \neq 0$	$\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ ist die einzige Ruhelage
(2)	$\mathbf{A}$ ist singulär	$\det(\mathbf{A}) = 0$	es gibt unendlich viele Ruhelagen

Aufgabe 2.14. Berechnen Sie die Ruhelage(n) des mathematischen Pendels von Abbildung 1.8.

Lösung von Aufgabe 2.14. Mathematisch erhält man: $\omega_R = 0$ und $\varphi_R = \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Physikalisch können jedoch nur zwei Ruhelagen unterschieden werden, nämlich $\omega_R = 0$, $\varphi_R = 0$ und $\omega_R = 0$, $\varphi_R = \pi$.

Aufgabe 2.15. Berechnen Sie die Ruhelage(n) des linearen Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

mit den reellen Parametern a, b.

Lösung von Aufgabe 2.15.

$$\begin{aligned} ba \neq 1&: \quad \mathbf{x}_R = \mathbf{0} \\ ba = 1&: \quad \mathbf{x}_R = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| x_{1,R} = -a x_{2,R} \text{ und } x_{2,R} \text{ ist beliebig} \right\} \end{aligned}$$

Im Falle von nichtlinearen Systemen (2.5a) mit einem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ muss man zur Bestimmung der Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ für ein festgelegtes konstantes $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$ die Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0} \tag{2.41}$$

bestimmen. In diesem Fall nennt man das Paar $(\mathbf{u}_R, \mathbf{x}_R)$ auch einen *Arbeitspunkt* des Systems (2.5a). Bei linearen, zeitinvarianten Systemen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.42}$$

gelten zur Bestimmung der Ruhelagen für konstantes $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$ die folgenden Bedingungen:

$\det(\mathbf{A}) \neq 0$	$\mathbf{x}_R = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_R$ einzige Ruhelage
$\det(\mathbf{A}) = 0$ und $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = \operatorname{rang}([\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{u}_R])$	es gibt unendlich viele Ruhelagen
$\det(\mathbf{A}) = 0$ und $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) \neq \operatorname{rang}([\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{u}_R])$	es gibt keine Ruhelage

Aufgabe 2.16. Wie lauten die Ruhelage(n) des linearen, zeitinvarianten Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} u$$

mit den reellen Parametern a, b und der Eingangsgröße $u = u_R$.

Lösung von Aufgabe 2.16.

$$\begin{aligned} b \neq -2a&: \quad \text{keine Ruhelage} \\ b = -2a&: \quad \mathbf{x}_R = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| x_{1,R} = -2x_{2,R} - a u_R \text{ und } x_{2,R} \text{ ist beliebig} \right\} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.17. Wie groß muss die stationäre Ankerspannung $u_{A,R}$ sein, damit für die vorgegebene konstante Erregerspannung $u_F = u_{F,R}$ die fremderregte Gleichstrommaschine von Abbildung 1.9 die Seiltrommel in einer konstanten Position halten kann? Wie lautet die zugehörige Ruhelage?

Lösung von Aufgabe 2.17.
Stationäre Ankerspannung: $u_{A,R} = \frac{R_A m g r}{k \psi_F \frac{u_{F,R}}{R_F}}$

Ruhelage: $i_{A,R} = \frac{mgr}{k\psi_F \frac{u_{F,R}}{R_F}}$, $i_{F,R} = \frac{u_{F,R}}{R_F}$, $\omega_R = 0$ und φ_R ist beliebig.

2.5.2. Linearisierung um eine Ruhelage

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden im Folgenden einige Abkürzungen vereinbart. Für die partielle Ableitung einer Funktion $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nach x_i an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$ schreibt man einfach

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x})\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}_R) \ . \tag{2.43}$$

Die Ableitung der skalaren Funktion $f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$ ist der Zeilenvektor

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}_R) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x_R}) & \frac{\partial}{\partial x_2} f(\mathbf{x_R}) & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} f(\mathbf{x_R}) \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

und die Ableitung einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an einer Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$, also die *Jacobimatrix* von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, ist durch

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(x_R) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_R) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x_R) & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x_R) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x_R) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_R) & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2(x_R) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(x_R) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_m(x_R) & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(x_R) \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

gegeben.

Für die Linearisierung eines nichtlinearen Systems um eine Ruhelage oder Trajektorie wird noch nachstehender Satz benötigt:

Satz 2.5 (Taylorformel zweiter Ordnung)**.** *Es sei angenommen, dass die vektorwertige Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ mit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ als offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ zweifach stetig differenzierbar ist und die Punkte $\mathbf{x}_R$ sowie $\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}$ mitsamt ihrer Verbindungsstrecke in $\mathcal{D}$ liegen. Dann ist*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) \Delta\mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x}) \ , \tag{2.46}$$

wobei für das Restglied $\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x})$ eine Konstante K so existiert, dass folgende Abschätzung

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x})\| \leq K \|\Delta\mathbf{x}\|^2 \quad \textit{bzw.} \quad \lim_{\|\Delta\mathbf{x}\| \to 0} \frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x})\|}{\|\Delta\mathbf{x}\|} = 0 \tag{2.47}$$

gilt.

Als Nächstes betrachte man das zeitinvariante, nichtlineare System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.48a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{2.48b}$$

mit der Ruhelage (Arbeitspunkt) $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$, die definitionsgemäß die Gleichungen

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0} \tag{2.49a}$$
$$\mathbf{y}_R = \mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) \tag{2.49b}$$

erfüllt. Betrachtet man nun nur kleine Auslenkungen aus der Ruhelage, dann lassen sich die Größen $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, und $\mathbf{y}$ in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}(t) \tag{2.50a}$$
$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_R + \Delta\mathbf{u}(t) \tag{2.50b}$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_R + \Delta\mathbf{y}(t) \tag{2.50c}$$

anschreiben, wobei Δ die jeweiligen Abweichungen von der Ruhelage symbolisieren.

Setzt man (2.50) in (2.48) ein, erhält man mit der abgekürzten Schreibweise $\Delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\mathbf{x}(t)$

$$\underbrace{\dot{\mathbf{x}}_R}_{=\mathbf{0}} + \Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_R + \Delta\mathbf{u}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}(t_0) \tag{2.51a}$$
$$\mathbf{y}_R + \Delta\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_R + \Delta\mathbf{u}) \tag{2.51b}$$

bzw. durch Anwendung der Taylorformel zweiter Ordnung nach Satz 2.5 und Vernachlässigung der Restglieder ergibt sich

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=\mathbf{A}}\Delta\mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}, \qquad \begin{aligned}\Delta\mathbf{x}(t_0) &= \Delta\mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R\end{aligned} \tag{2.52a}$$
$$\mathbf{y}_R + \Delta\mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=\mathbf{y}_R} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=\mathbf{C}}\Delta\mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}\mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{=\mathbf{D}}\Delta\mathbf{u}\,. \tag{2.52b}$$

Zusammenfassend lässt sich folgender Satz formulieren:

Satz 2.6. *Es sei $\mathbf{x}_R$, $\mathbf{y}_R$ eine Ruhelage des Systems (2.48) für $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$. Die Änderung der Lösung $\Delta\mathbf{x}$, $\Delta\mathbf{y}$ bei hinreichend kleinen Abweichungen $\Delta\mathbf{u}$ von $\mathbf{u}_R$ und $\Delta\mathbf{x}_0$ von $\mathbf{x}_R$ wird durch das lineare, zeitinvariante System*

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}, \qquad \Delta\mathbf{x}(t_0) = \Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R \tag{2.53a}$$
$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{D}\Delta\mathbf{u} \tag{2.53b}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R), & \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) \\ \mathbf{C} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R), & \mathbf{D} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}\mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)\end{aligned} \tag{2.54}$$

beschrieben. Das System (2.53), (2.54) wird auch als Linearisierung *von (2.48)* um die Ruhelage (Arbeitspunkt) $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$ *bezeichnet.*

Beispiel 2.4 (Mathematisches Pendel). Als Beispiel betrachte man das mathematischen Pendel von Abbildung 1.8 mit dem mathematischen Modell in Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l}\sin(\varphi)\end{aligned} \tag{2.55}$$

und der Position der Pendelspitze in x-Richtung als Ausgangsgröße

$$x = l\sin(\varphi) \ . \tag{2.56}$$

Die Ruhelagen errechnen sich zu $\varphi_{R,1} = 0$, $\omega_{R,1} = 0$ (Pendel in der unteren Ruhelage) und $\varphi_{R,2} = \pi$, $\omega_{R,2} = 0$ (Pendel in der oberen Ruhelage). Gemäß (2.53), (2.54) erhält man für die Linearisierung um eine allgemeine Ruhelage φ_R, ω_R das linearisierte Modell in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\Delta\varphi \\ \Delta\omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(\varphi_R) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\varphi \\ \Delta\omega\end{bmatrix} \tag{2.57a}$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix}l\cos(\varphi_R) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\varphi \\ \Delta\omega\end{bmatrix} \tag{2.57b}$$

Durch Einsetzen von $\varphi_{R,1} = 0$, $\omega_{R,1} = 0$ in (2.57) ergibt sich das linearisierte Modell um die untere Ruhelage zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\Delta\varphi \\ \Delta\omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\varphi \\ \Delta\omega\end{bmatrix} \tag{2.58a}$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix}l & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\varphi \\ \Delta\omega\end{bmatrix} \ . \tag{2.58b}$$

Analog erhält man für die obere Ruhelage $\varphi_{R,2} = \pi$, $\omega_{R,2} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\Delta\varphi \\ \Delta\omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\varphi \\ \Delta\omega\end{bmatrix} \tag{2.59a}$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix}-l & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\varphi \\ \Delta\omega\end{bmatrix} \ . \tag{2.59b}$$

Man beachte, dass die oft übliche Näherung für kleine Winkel $\sin(\varphi) \approx \varphi$ und $\cos(\varphi) \approx 1$ nur für Betrachtungen um die Ruhelage $\varphi = 0$ gültig ist!

Aufgabe 2.18. Berechnen Sie für das Zwei-Tank-System von Abbildung 1.11 die Ruhelage für einen stationären Zufluss q_R. Linearisieren Sie das System (1.29), (1.30) um diese Ruhelage.

Lösung von Aufgabe 2.18. Ruhelage $h_{1,R} = h_{2,R} = \frac{q_R^2}{2ga^2}$ und Linearisierung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\Delta h_1\\ \Delta h_2\end{bmatrix} = \frac{a^2 g}{A q_R}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta h_1\\ \Delta h_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{A}\\ 0\end{bmatrix}\Delta q$$

$$\Delta q_2 = \begin{bmatrix}0 & \frac{a^2 g}{q_R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta h_1\\ \Delta h_2\end{bmatrix}$$

2.5.3. Linearisierung um eine Trajektorie

Neben der Linearisierung um eine Ruhelage ist auch die Linearisierung um eine Trajektorie von Bedeutung. Dabei wird die Abweichung eines nichtlinearen Systems der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.60a}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{2.60b}$$

von einer vorgegebenen Lösungskurve (Trajektorie) betrachtet. Sind für (2.60) die Bedingungen von Satz 2.3 erfüllt, dann weiß man, dass für eine vorgegebene Eingangsgröße $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t)$ auf einem Intervall $0 \leq t \leq T$ und einen vorgegebenen Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0$ die Lösung $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ von (2.60) eindeutig festliegt. Es gelten also die Beziehungen

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}), \qquad \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 \tag{2.61a}$$
$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \ . \tag{2.61b}$$

Für hinreichend kleine Abweichungen der Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ und des Anfangswertes $\mathbf{x}_0$ von $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ bzw. $\tilde{\mathbf{x}}_0$ stellen sich nur kleine Abweichungen der Lösung $\mathbf{x}(t)$ von $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq T$ ein. Schreibt man $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) + \Delta\mathbf{x}(t) \tag{2.62a}$$
$$\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t) + \Delta\mathbf{u}(t) \tag{2.62b}$$
$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t) + \Delta\mathbf{y}(t) \tag{2.62c}$$

und setzt dies in (2.60) ein, dann erhält man mit $\Delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\mathbf{x}(t)$ die Beziehung

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}(t_0) + \Delta\mathbf{x}(t_0) \tag{2.63a}$$
$$\tilde{\mathbf{y}} + \Delta\mathbf{y} = \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u}) \tag{2.63b}$$

bzw. durch Anwendung der Taylorformel zweiter Ordnung nach Satz 2.5 und Vernachlässigung der Restglieder ergibt sich

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \Delta\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}_{=\dot{\tilde{\mathbf{x}}}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{x}}}_{=\mathbf{A}(t)} \Delta\mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{u}}}_{=\mathbf{B}(t)} \Delta\mathbf{u}, \qquad \begin{aligned}\Delta\mathbf{x}(t_0) &= \Delta\mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0\end{aligned} \tag{2.64a}$$

$$\tilde{\mathbf{y}} + \Delta\mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}_{=\tilde{\mathbf{y}}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{x}}}_{=\mathbf{C}(t)} \Delta\mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{u}}}_{=\mathbf{D}(t)} \Delta\mathbf{u} \,. \tag{2.64b}$$

Zusammenfassend lässt sich folgender Satz angeben:

Satz 2.7. *Es sei $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ eine Trajektorie des Systems (2.60) für eine vorgegebene Eingangsgröße $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t)$ und einen vorgegebenen Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0$. Die Änderung der Lösung $\Delta\mathbf{x}(t)$, $\Delta\mathbf{y}(t)$ bei hinreichend kleinen Abweichungen $\Delta\mathbf{u}(t)$ von $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ und $\Delta\mathbf{x}_0$ von $\tilde{\mathbf{x}}_0$ wird durch das lineare, zeitvariante System*

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\Delta\mathbf{u}, \qquad \Delta\mathbf{x}(t_0) = \Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0 \tag{2.65a}$$

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\Delta\mathbf{u} \tag{2.65b}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{x}}, & \mathbf{B}(t) &= \frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{u}} \\ \mathbf{C}(t) &= \frac{\partial \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{x}}, & \mathbf{D}(t) &= \frac{\partial \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{u}} \end{aligned} \tag{2.66}$$

beschrieben. Das System (2.65), (2.66) wird auch als Linearisierung *von (2.60)* um die Trajektorie $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ *bezeichnet.*

Man beachte, dass die Linearisierung eines *zeitinvarianten*, nichtlinearen Systems der Form (2.48) *um eine Ruhelage* auf ein *zeitinvariantes*, lineares System führt, wohingegen die Linearisierung eines *zeitinvarianten*, nichtlinearen Systems *um eine Solltrajektorie* im Allgemeinen ein *zeitvariantes*, lineares System ergibt.

Beispiel 2.5 (Rakete). Als Beispiel betrachte man eine einstufige Rakete mit der zeitlich veränderlichen Masse $m(t) = m_0 - m_f(t)$, wobei m_0 das Gewicht der Rakete vor dem Start (Eigenmasse + Traglast + Treibstoffmenge) und $m_f(t)$ die zeitlich abnehmende Treibstoffmasse bezeichnen. Nimmt man an, dass die Treibstoffmasse $m_f(t)$ mit der Ausstoßrate $\dot{m}(t) = -\dot{m}_f(t)$ mit konstanter Relativgeschwindigkeit $w > 0$ von der Rakete ausgestoßen wird, dann lauten die Bewegungsgleichungen der Rakete in einem Schwerefeld mit der Gravitationskonstanten g

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= \frac{1}{m(t)}\left(wu(t) - m(t)g\right) \\ \dot{m}(t) &= -u(t) \;. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Dabei beschreiben die Größen $h(t)$ die Höhe der Rakete gemessen von der Erdoberfläche, $v(t)$ die Raketengeschwindigkeit, $m(t)$ die Raketenmasse und $u(t)$ die Treibstoffausstoßrate. Im ersten Schritt berechnet man sich für eine konstante Treibstoffausstoßrate $\tilde{u}(t) = k$ und die Anfangswerte $\tilde{h}(0) = \tilde{h}_0 = 0$, $\tilde{v}(0) = \tilde{v}_0 = 0$ sowie $\tilde{m}(0) = \tilde{m}_0 = m_0$ die Trajektorie

$$\begin{aligned} \tilde{m}(t) &= m_0 - kt \\ \tilde{v}(t) &= -gt - w \ln\left(\frac{m_0 - kt}{m_0}\right) \\ \tilde{h}(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + wt - w \ln\left(\frac{m_0 - kt}{m_0}\right)\left(t - \frac{m_0}{k}\right) \end{aligned} \tag{2.68}$$

Linearisiert man das System (2.67) um die Trajektorie (2.68), dann erhält man das lineare, zeitvariante System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \Delta h(t) \\ \Delta v(t) \\ \Delta m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-w\tilde{u}(t)}{\tilde{m}(t)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h(t) \\ \Delta v(t) \\ \Delta m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{w}{\tilde{m}(t)} \\ -1 \end{bmatrix} \Delta u(t) \tag{2.69}$$

bzw. eingesetzt für die Trajektorien ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \Delta h(t) \\ \Delta v(t) \\ \Delta m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-wk}{(m_0 - kt)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h(t) \\ \Delta v(t) \\ \Delta m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{w}{m_0 - kt} \\ -1 \end{bmatrix} \Delta u(t) \ . \tag{2.70}$$

Aufgabe 2.19. Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) &= \alpha\omega_2(t)\omega_3(t) + u_1(t) \\ \dot{\omega}_2(t) &= -\alpha\omega_1(t)\omega_3(t) + u_2(t) \\ \dot{\omega}_3(t) &= u_3(t) \end{aligned}$$

mit dem konstanten Parameter $\alpha > 0$. Bestimmen Sie für die Eingangsgrößen $\tilde{u}_1(t) = \tilde{u}_2(t) = \tilde{u}_3(t) = 0$ und die Anfangsbedingungen $\tilde{\omega}_1(0) = \tilde{\omega}_{1,0} = 0$, $\tilde{\omega}_2(0) = \tilde{\omega}_{2,0} > 0$ und $\tilde{\omega}_3(0) = \tilde{\omega}_{3,0} > 0$ die Trajektorie $\tilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_1(t) & \tilde{\omega}_2(t) & \tilde{\omega}_3(t) \end{bmatrix}$ und linearisieren Sie das System um diese Trajektorie.

Lösung von Aufgabe 2.19. Trajektorie:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1(t) &= \tilde{\omega}_{2,0} \sin(\alpha\tilde{\omega}_{3,0}t) \\ \tilde{\omega}_2(t) &= \tilde{\omega}_{2,0} \cos(\alpha\tilde{\omega}_{3,0}t) \\ \tilde{\omega}_3(t) &= \tilde{\omega}_{3,0} \end{aligned}$$

Linearisierung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\Delta\omega_1(t)\\ \Delta\omega_2(t)\\ \Delta\omega_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \alpha\tilde{\omega}_3 & \alpha\tilde{\omega}_2\\ -\alpha\tilde{\omega}_3 & 0 & -\alpha\tilde{\omega}_1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\omega_1(t)\\ \Delta\omega_2(t)\\ \Delta\omega_3(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta u_1(t)\\ \Delta u_2(t)\\ \Delta u_3(t)\end{bmatrix}$$

2.6. Literatur

[2.1] S. W. Director und R. A. Rohrer, *Introduction to Systems Theory*. New York: McGraw-Hill, 1972.

[2.2] O. Föllinger und D. Franke, *Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme*. München Wien: Oldenbourg, 1982.

[2.3] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. New York: Macmillan Publishing Company, 1992.

[2.4] G. Ludyk, *Theoretische Regelungstechnik 1*. Berlin Heidelberg: Springer, 1995.

[2.5] D. G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems*. New York: John Wiley & Sons, 1979.

[2.6] L. Padulo und M. A. Arbib, *System Theory*. Philadelphia: W.B. Saunders Company, 1974.

[2.7] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer, 1991.

[2.8] W. J. Rugh, *Linear System Theory*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.