

3. Lineare dynamische Systeme

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Konzepte zur Beschreibung linearer zeitinvarianter dynamischer Systeme behandelt. Die theoretischen Grundlagen dazu wurden bereits ausführlich in den Vorlesungen Mathematik 2 für ET und Signale und Systeme 1 diskutiert. Zur leichteren Lesbarkeit des Skriptums werden im Folgenden unter anderem einige bekannte Ergebnisse dieser Vorlesungen wiederholt.

3.1. Zustandstransformation

Im Kapitel 1.1 wurde bereits erwähnt, dass die Wahl der Zustandsgrößen keinesfalls eindeutig ist (siehe auch Aufgabe 1.5). Mit Hilfe einer *regulären Zustandstransformation* der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{z}(t) \quad (3.1)$$

mit einer regulären ($n \times n$)-Matrix \mathbf{V} lässt sich das lineare, zeitinvariante System (siehe auch (2.26))

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.2b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in die Form

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}}_{\tilde{\mathbf{B}}}\mathbf{u}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0 \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{C}}}\mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{D}}}\mathbf{u} \quad (3.3b)$$

mit dem *neuen Zustand* $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ überführen.

Man sagt dann auch, die beiden mathematischen Beschreibungen $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ von (3.2) und $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}})$ von (3.3) sind *äquivalent*. Man beachte, dass in diesem Fall die beiden quadratischen *Dynamikmatrizen* \mathbf{A} und $\tilde{\mathbf{A}}$ gemäß Definition ähnlich sind (siehe Kapitel 2 Skriptum Mathematik 2 für ET).

Aufgabe 3.1. Zeigen Sie, dass die Matrizen \mathbf{A} und $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$ mit der regulären ($n \times n$)-Matrix \mathbf{V} die gleichen Eigenwerte besitzen.

Hinweis: Es gelten die Beziehungen

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{V}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{V}) \quad \text{und} \quad \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{E}. \quad (3.4)$$

Zeigen Sie weiters, dass $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{v}_k$ ein Eigenvektor von $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$ ist, wenn \mathbf{v}_k ein Eigenvektor von \mathbf{A} ist.

Man könnte nun diese Transformation zu einem neuen Zustand \mathbf{z} insofern nutzen, als man die Lösung des Systems (3.2) gemäß Satz 2.4

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.5a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) , \quad (3.5b)$$

insbesondere die Berechnung der Transitionsmatrix $\Phi(t)$, unter Verwendung einer geeigneten Transformation, auf einfache Art und Weise bestimmen kann. Dazu wählt man die Zustandstransformation (3.1) so, dass die Struktur von $\tilde{\mathbf{A}}$ des transformierten Systems (3.3) eine einfache Berechnung der Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$ von (3.3) zulässt. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $\tilde{\mathbf{A}}$ Diagonalstruktur aufweist oder in *Jordanscher Normalform* vorliegt.

Die Lösung des transformierten Systems (3.3) lautet dann

$$\mathbf{z}(t) = \tilde{\Phi}(t) \mathbf{z}_0 + \int_0^t \tilde{\Phi}(t-\tau) \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{u}(t) . \quad (3.6b)$$

Transformiert man (3.6) mit der Vorschrift (3.1) in den Zustand \mathbf{x} unter Verwendung der Ausdrücke für $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ von (3.3) zurück, erhält man

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t-\tau) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.7a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) . \quad (3.7b)$$

Durch Vergleich mit (3.5) ergibt sich der Zusammenhang zwischen $\Phi(t)$ und $\tilde{\Phi}(t)$ zu

$$\Phi(t) = \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{V}^{-1} . \quad (3.8)$$

Abbildung 3.1 veranschaulicht grafisch diese Vorgangsweise.

3.2. Jordansche Normalform

In Mathematik 2 für ET (Kapitel 5) wurde gezeigt, dass jede $(n \times n)$ -Matrix \mathbf{A} durch eine Ähnlichkeitstransformation $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V}$ auf Jordansche Normalform transformiert werden kann. Die Jordansche Normalform einer Matrix \mathbf{A} ist bis auf die Reihenfolge der so genannten Jordanblöcke eindeutig bestimmt. Zur Formulierung der Jordanschen Normalform werden im Folgenden einige Begriffe aus Mathematik 2 für ET wiederholt.

Das *charakteristische Polynom* $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ der Matrix \mathbf{A} habe m verschiedene Wurzeln $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ mit den entsprechenden Vielfachheiten n_1, \dots, n_m . Dann bezeichnet die Zahl n_j die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwertes λ_j , $j = 1, \dots, m$ und die *geometrische Vielfachheit* g_j des Eigenwertes λ_j , $j = 1, \dots, m$ ist definiert als die *Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert λ_j* , d. h. $g_j = \dim(\text{Kern}(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}))$. Für die geometrische Vielfachheit g_j eines Eigenwertes λ_j gilt $1 \leq g_j \leq n_j$.

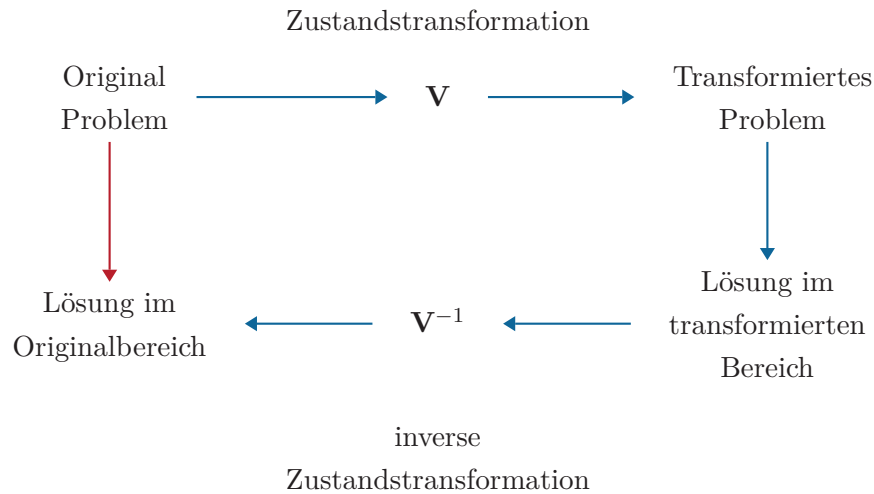


Abbildung 3.1.: Zur regulären Zustandstransformation.

3.2.1. Diagonalform

Eine $(n \times n)$ -Matrix \mathbf{A} lässt sich nun genau dann durch eine Ähnlichkeitstransformation auf *Diagonalform* transformieren, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Vielfachheit gleich sind. In diesem Fall spannen die Eigenvektoren der Matrix \mathbf{A} den \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n auf und bilden eine Eigenbasis der Matrix \mathbf{A} . Die Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform erfolgt über die Transformationsmatrix $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$ deren Spaltenvektoren die Eigenvektoren von \mathbf{A} sind. Liegt die Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$ des transformierten Systems in Diagonalform

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

vor, so kann man die transformierte Transitionsmatrix gemäß (2.22) direkt in der Form

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(d_1 t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(d_2 t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \exp(d_n t) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

berechnen und die Transitionsmatrix des Originalproblems erhält man aus (3.8). Beachten Sie, dass die Diagonalelemente $d_i, i = 1, \dots, n$ gerade den Eigenwerten von \mathbf{A} entsprechen.

Aufgabe 3.2. Zeigen Sie, dass für den Fall einer $(n \times n)$ -Matrix \mathbf{A} mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig sind und damit eine Eigenbasis von \mathbf{A} bilden.

Hinweis: Führen Sie den Beweis durch Widerspruch.

Beispiel 3.1. Als Beispiel betrachte man das autonome lineare zeitinvariante System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.11)$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix \mathbf{A} lauten $\lambda_1 = 3$ mit der algebraischen Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = 1$ mit der algebraischen Vielfachheit 2. Wegen $\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}) = 2$ und $\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E}) = 1$ folgt unmittelbar die geometrische Vielfachheit von λ_1 zu 1 und von λ_2 zu 2. Da die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von λ_1 und λ_2 gleich sind, existiert eine Eigenbasis der Matrix \mathbf{A} . Der Eigenvektor zu $\lambda_1 = 3$ folgt aus

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

zu $\mathbf{v}_1^T = [1 \ 0 \ 0]$ und die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 1$ errechnen sich aus

$$(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E})\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \quad k = 2, 3 \quad (3.13)$$

zu $\mathbf{v}_2^T = [0 \ 1 \ 1]$ und $\mathbf{v}_3^T = [-1 \ 1 \ 0]$. Mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

ergibt sich das System (3.11) im transformierten Zustand $\mathbf{z}(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(t)$ zu

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0. \quad (3.15)$$

Die Transitionsmatrix des transformierten Systems (3.15) lautet dann

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(3t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

und damit errechnet sich die Transitionsmatrix des Originalsystems (3.11) zu

$$\Phi(t) = \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \exp(3t) & \exp(3t) - \exp(t) & \exp(t) - \exp(3t) \\ 0 & \exp(t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

3.2.2. Notwendigkeit von Hauptvektoren

Ist für einen Eigenwert λ_j die geometrische Vielfachheit g_j echt kleiner als die algebraische Vielfachheit n_j , so muss man zusätzlich zu den Eigenvektoren die *entsprechenden Hauptvektoren* berechnen. Die Gesamtheit aller Eigen- und Hauptvektoren zu einem Eigenwert λ_j nennt man den *algebraischen Eigenraum*, dessen Dimension gleich der *algebraischen Vielfachheit* n_j des Eigenwertes λ_j ist.

Angenommen, λ sei ein Eigenwert der $(n \times n)$ -Matrix \mathbf{A} mit der algebraischen Vielfachheit n und der geometrischen Vielfachheit 1. Neben dem Eigenvektor \mathbf{v}_1 , der definitionsgemäß die Beziehung

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

erfüllt, existieren in diesem Fall $(n - 1)$ linear unabhängige *Hauptvektoren* \mathbf{v}_j , $j = 2, \dots, n$, die Lösungen der Gleichungen

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (3.19)$$

sind. Aus (3.18) und (3.19) folgt nun unmittelbar die Beziehung

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{V} \underbrace{(\lambda \mathbf{E} + \mathbf{N})}_{=\mathbf{S}} \quad (3.21)$$

mit $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$ und der $(n \times n)$ -Matrix

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Die Matrix \mathbf{N} hat nun eine ganz spezielle Struktur, sie ist nämlich *nilpotent der Ordnung* n . Dazu folgende Definition:

Definition 3.1 (Nilpotente Matrix). Man nennt eine $(n \times n)$ -Matrix \mathbf{N} nilpotent der Ordnung k , wenn gilt $\mathbf{N}^{k-1} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{N}^k = \mathbf{0}$.

Man erkennt unmittelbar aus (3.21), dass sich durch die Wahl der Transformationsmatrix \mathbf{V} mit dem Eigenvektor und den zugehörigen Hauptvektoren als Spalten die Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des transformierten Systems zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

ergibt.

Die Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$ des transformierten Systems mit der Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}$ von (3.23) lässt sich sehr einfach in geschlossener Form

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(t) &= \underbrace{\exp((\lambda \mathbf{E} + \mathbf{N})t)}_{(*)} = \exp(\lambda \mathbf{E}t) \exp(\mathbf{N}t) \\ &= \exp(\lambda \mathbf{E}t) \left(\mathbf{E} + \mathbf{N}t + \dots + \frac{\mathbf{N}^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

bzw.

$$\tilde{\Phi}(t) = e^{(\lambda t)} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & t \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

anschreiben. Man beachte, dass die Gleichung (*) in (3.24) nur deshalb gilt, da die Matrizen \mathbf{E} und \mathbf{N} kommutieren, d. h., die Beziehung $\mathbf{E}\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{E}$ erfüllen.

Lösen Sie dazu folgende Aufgabe.

Aufgabe 3.3. Zeigen Sie, dass

$$\exp((\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)t) = \exp(\mathbf{A}_1 t) \exp(\mathbf{A}_2 t)$$

gilt, wenn die beiden Matrizen \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 die Bedingung $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$ erfüllen.

Lösung von Aufgabe 3.3. Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich

Aufgabe 3.4. Transformieren Sie das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

auf die Form von (3.23). Berechnen Sie anschließend die Transformationsmatrix.

Lösung von Aufgabe 3.4. Die Transformationsmatrix \mathbf{V} und die Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des transformierten Systems lauten

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kontrollieren Sie die Transformationsmatrix mit MAPLE mit Hilfe des Befehls `MatrixExponential` im `LinearAlgebra`-package.

3.2.3. Reelle Jordansche Normalform

Man überzeugt sich leicht, dass eine $(n \times n)$ -Matrix \mathbf{A} mit reellen Koeffizienten nur Eigenwerte besitzen kann, die *entweder reell* oder *konjugiert komplex* sind. Man kann natürlich die soeben besprochene Methode der Diagonalisierung bzw. die Konstruktion der Hauptvektoren auch für Systeme mit konjugiert komplexen Eigenwerten anwenden. Es sei aber an dieser Stelle angemerkt, dass in diesem Fall sowohl die Transformationsmatrix \mathbf{V} als auch die transformierte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ komplexwertige Matrizen sind. Dies stört zwar nicht Weiters, doch besteht oft der Wunsch, dass die Matrizen des transformierten Systems $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}})$ von (3.3) ebenfalls reellwertig sind. Wie diese Transformation dann im Detail aussieht, wird im Folgenden anhand einer Dynamikmatrix \mathbf{A} besprochen, die $r = n/2$ paarweise verschiedene konjugiert komplexe Eigenwerte der Form $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ mit dem konjugiert komplexen $\lambda_j^* = \alpha_j - i\beta_j$, $j = 1, \dots, r$ besitzt. Es gilt nun folgender Satz:

Satz 3.1. *Besitzt eine Matrix \mathbf{A} einen konjugiert komplexen Eigenwert, dann sind auch die zugehörigen Eigenvektoren konjugiert komplex.*

Aufgabe 3.5. Beweisen Sie Satz 3.1.

Wählt man als Transformationsmatrix \mathbf{V} die mit der regulären Matrix \mathbf{T} von rechts multiplizierte Matrix $\bar{\mathbf{V}}$ der konjugiert komplexen Eigenvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^* & \cdots & \mathbf{v}_r & \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{V}}} \mathbf{T} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^*) & \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_1) & \cdots & \frac{1}{2}(\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_r^*) & \frac{1}{2}(\mathbf{v}_r^* - \mathbf{v}_r) \\ \text{Re}(\mathbf{v}_1) & \text{Im}(\mathbf{v}_1) & & \text{Re}(\mathbf{v}_r) & \text{Im}(\mathbf{v}_r) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

mit

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{I} & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{I} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\mathbf{I} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

dann errechnet sich die Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des transformierten Systems zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{T}^{-1} \underbrace{\bar{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{A} \bar{\mathbf{V}}}_{=\mathbf{\Lambda}} \mathbf{T} = \mathbf{\Omega} \quad (3.28)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \mathbf{T}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 + \mathbf{I}\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 - \mathbf{I}\beta_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r + \mathbf{I}\beta_r & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_r - \mathbf{I}\beta_r \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{T} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r & \beta_r \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta_r & \alpha_r \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$ des transformierten Systems mit der Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{\Omega}$ von (3.29) lässt sich sehr einfach in geschlossener Form angeben

$$\tilde{\Phi}(t) = \exp(\mathbf{\Omega}t) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t) & e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ -e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t) & e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t) & e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t) \\ 0 & 0 & \cdots & -e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t) & e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t) \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Aufgabe 3.6. Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Lösung von Aufgabe 3.6. Transitionsmatrix

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \exp(t) \cos(2t) & \frac{1}{2} \exp(t) \sin(2t) \\ -2 \exp(t) \sin(2t) & \exp(t) \cos(2t) \end{bmatrix}$$

3.2.4. Zusammenfassung

Die Ergebnisse der Abschnitte 3.2.1, 3.2.2 und 3.2.3 lassen sich nun wie folgt für ein allgemeines lineares, zeitinvariantes System (3.2) kombinieren.

Satz 3.2 (Reelle Jordansche Normalform). *Es sei die reellwertige $(n \times n)$ -Matrix \mathbf{A} die Dynamikmatrix des linearen, zeitinvarianten Systems (3.2). Angenommen, \mathbf{A} habe k reelle und $(n - k) / 2$ konjugiert komplexe Eigenwerte. Dann existiert eine reguläre Zustandstransformation der Form (3.1)*

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_k \quad \operatorname{Re}(\mathbf{v}_{k+1}) \quad \operatorname{Im}(\mathbf{v}_{k+1}) \quad \dots \quad \operatorname{Re}(\mathbf{v}_r) \quad \operatorname{Im}(\mathbf{v}_r)] \quad (3.31)$$

bestehend aus linear unabhängigen (komplexwertigen) Eigen- und Hauptvektoren \mathbf{v}_j , $j = 1, \dots, r$ mit $r = (n + k) / 2$ so, dass die Dynamikmatrix des transformierten Systems folgende Form

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_l \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

annimmt. Dabei bezeichnen \mathbf{J}_i , $i = 1, \dots, l$ die so genannten Jordanblöcke, deren Struktur für reelle Eigenwerte λ_i in der Form

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

bzw. für konjugiert komplexe Eigenwerte $\alpha_i \pm I\beta_i$ in der Form

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{E}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{W} & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

mit

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

gegeben ist.

Beispiel 3.2. Als Beispiel betrachte man das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -6 & -8 & -10 \\ -\frac{3}{2} & 4 & 8 & 12 & 15 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & -4 & -\frac{9}{4} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.36)$$

mit dem reellen Eigenwert $\lambda_1 = -3$ der algebraischen Vielfachheit 1 und dem konjugiert komplexen Eigenwert $\lambda_2 = 1 \pm I2$ der algebraischen Vielfachheit 2 und geometrischen Vielfachheit 1. Der Eigenvektor zu $\lambda_1 = -3$ lautet

$$\mathbf{v}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

und der Eigenvektor zu $\lambda_2 = 1 + I2$ ergibt sich zu

$$\mathbf{v}_2^T = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} + I\frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Den Hauptvektor \mathbf{v}_3 erhält man aus der Beziehung (3.19) mit

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \quad (3.39)$$

zu

$$\mathbf{v}_3^T = \begin{bmatrix} -\frac{8}{9} & 1 & I\frac{2}{3} & -\frac{5}{18} - I\frac{5}{18} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Damit lautet die Transformationsmatrix \mathbf{V}

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \operatorname{Re}(\mathbf{v}_2) \quad \operatorname{Im}(\mathbf{v}_2) \quad \operatorname{Re}(\mathbf{v}_3) \quad \operatorname{Im}(\mathbf{v}_3)] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{18} & -\frac{5}{18} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

und die transformierte Dynamikmatrix in der reellen Jordanschen Normalform errechnet sich zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix}}_{\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\lambda_2) & \operatorname{Im}(\lambda_2) \\ -\operatorname{Im}(\lambda_2) & \operatorname{Re}(\lambda_2) \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Aus den Überlegungen der Abschnitte 3.2.1, 3.2.2 und 3.2.3 folgt die Transitionsmatrix des transformierten Systems zu

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) & te^t \cos(2t) & te^t \sin(2t) \\ 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) & -te^t \sin(2t) & te^t \cos(2t) \\ 0 & 0 & 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \\ 0 & 0 & 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

bzw. für das Originalsystem (3.36) nach (3.8)

$$\Phi(t) = \mathbf{V}\tilde{\Phi}(t)\mathbf{V}^{-1} \quad (3.44)$$

mit \mathbf{V} von (3.41).

Aufgabe 3.7. Berechnen Sie die reelle Jordansche Normalform des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Lösung von Aufgabe 3.7. Die Jordansche Normalform ergibt sich zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.8. Berechnen Sie die reelle Jordansche Normalform des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} .$$

Lösung von Aufgabe 3.8. Die Jordansche Normalform ergibt sich zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.3. Allgemeines Lösungsverhalten

Aus dem bisher Gesagten lässt sich auf einfache Art und Weise das Lösungsverhalten eines linearen, zeitinvarianten autonomen Systems der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.45)$$

angeben.

Satz 3.3. Jede Lösung $x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ des Systems (3.45) ist eine Linearkombination der Funktionen

$$t^{k_1} e^{\lambda t}, \quad t^{k_2} e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{und} \quad t^{k_3} e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (3.46)$$

für die reellen Eigenwerte λ , die konjugiert komplexen Eigenwerte $\alpha \pm i\beta$ und $k_1, k_2, k_3 = 0, \dots, (r-1)$ mit r als der jeweiligen Dimension der Jordanblöcke.

Aus Satz 3.3 kann man schließen, dass die Trajektorien eines linearen zeitkontinuierlichen Systems der Form (3.45) weder in endlicher Zeit nach Null noch nach Unendlich streben können. Dies gilt nicht für nichtlineare und zeitdiskrete Systeme.

Als direkte Konsequenz von Satz 3.3 lässt sich noch folgender Satz angeben:

Satz 3.4 (Globale asymptotische Stabilität). Für alle Anfangswerte $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt genau dann

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} , \quad (3.47)$$

wenn alle Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} negativen Realteil besitzen. Man sagt dann auch, die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ ist global asymptotisch stabil.

Aufgabe 3.9. Beweisen Sie Satz 3.4.

Aufgabe 3.10. Ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

global asymptotisch stabil?

Lösung von Aufgabe 3.10. Nein

Aufgabe 3.11. Ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

global asymptotisch stabil?

Lösung von Aufgabe 3.11. Nein

Zur geometrischen Interpretation des Eigenvektors wird im Folgenden der Begriff eines *invarianten Unterraums* definiert.

Definition 3.2. Es sei \mathcal{V} ein linearer Unterraum des \mathbb{R}^n mit der Basis $\{\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_k\}$. Man nennt \mathcal{V} *invariant* gegenüber einer $(n \times n)$ -Matrix \mathbf{A} , wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ auch $\mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ gilt.

Aus der Definition des Eigenvektors $\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$ zu einem Eigenwert λ_j sieht man unmittelbar, dass \mathbf{v}_j invariant gegenüber \mathbf{A} ist. Mit anderen Worten heißt dies, dass wenn man mit einem Anfangswert \mathbf{x}_0 auf einem Eigenvektor startet, also z. B.

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_0 \mathbf{v}_1, \quad \gamma_0 \in \mathbb{R} , \quad (3.48)$$

dann verbleibt die Trajektorie für alle Zeiten in dieser Richtung des Eigenvektors, d. h. die Lösung hat die Form

$$\mathbf{x}(t) = \gamma(t) \mathbf{v}_1 . \quad (3.49)$$

Um dies zu zeigen, setzt man (3.49) in das System (3.45) ein und erhält

$$\dot{\gamma}(t) \mathbf{v}_1 = \gamma(t) \mathbf{A} \mathbf{v}_1 = \gamma(t) \lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad (3.50)$$

bzw.

$$(\dot{\gamma}(t) - \gamma(t) \lambda_1) \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} . \quad (3.51)$$

Da der Eigenvektor $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ ist, muss demnach gelten

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t) \lambda_1 \quad (3.52)$$

bzw.

$$\gamma(t) = \gamma_0 \exp(\lambda_1 t) . \quad (3.53)$$

Dies bedeutet, dass sich das System entlang eines Eigenvektors durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung beschreiben lässt. Die spezielle Lösung (3.49) mit (3.53)

$$\mathbf{x}(t) = \gamma_0 \exp(\lambda_1 t) \mathbf{v}_1 \quad (3.54)$$

wird auch als *Eigenschwingung des Systems* (3.45) bezeichnet.

Beispiel 3.3. Als Beispiel betrachte man folgendes System zweiter Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.4 & -1.2 \\ -1.2 & -0.4 \end{bmatrix} \mathbf{x} . \quad (3.55)$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix \mathbf{A} errechnen sich zu $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$, die Eigenvektoren lauten

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.447 \\ -0.894 \end{bmatrix} \quad (3.56a)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.894 \\ 0.447 \end{bmatrix} \quad (3.56b)$$

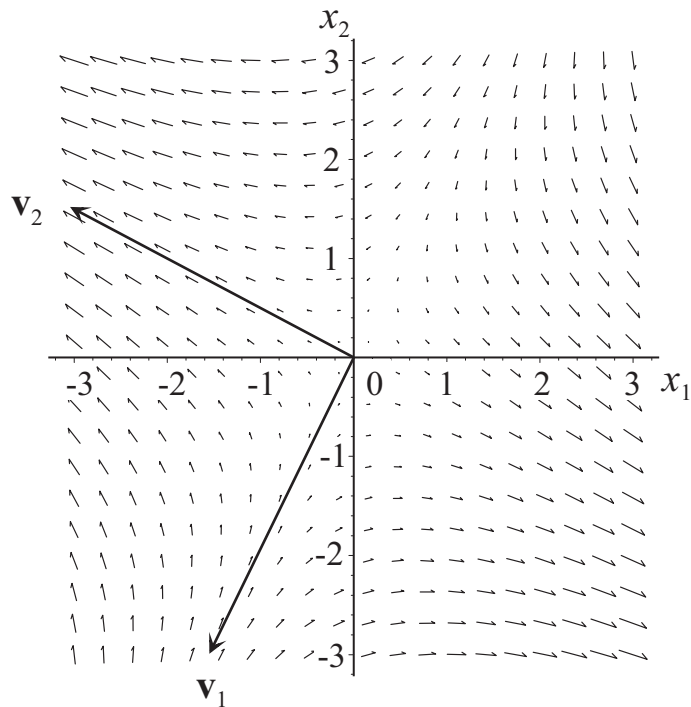
und die zugehörige Jordansche Normalform ergibt sich zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} . \quad (3.57)$$

Abbildung 3.2 zeigt den Verlauf der Trajektorien mit den zugehörigen Eigenvektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 .

3.4. Eingangs-Ausgangsverhalten

Neben der bisher behandelten mathematischen Formulierung linearer, zeitinvarianter Systeme in Form von Zustandsdifferentialgleichungen und Ausgangsgleichungen (siehe (3.2)) ist sehr häufig eine Beschreibung des Systemverhaltens vom Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ zum Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ ohne Kenntnis des Zustandes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gewünscht. Wie im Folgenden gezeigt

Abbildung 3.2.: Verlauf der Trajektorien für $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$.

wird, kann dieses so genannte *Eingangs-Ausgangsverhalten* in Form von Übertragungsfunktionen im Eingrößenfall ($p = q = 1$) bzw. Übertragungsmatrizen im Mehrgrößenfall beschrieben werden. Die hierfür erforderlichen Grundlagen der Laplace-Transformation \mathcal{L} wurden bereits in Signale und Systeme 1 (Kapitel 7) besprochen und sind der Vollständigkeit halber im Anhang A nochmals zusammengefasst. Im weiteren Verlauf des Skriptums werden Laplace-transformierte Zeitsignale immer mit einem $\hat{}$ versehen, d. h. $\mathcal{L}(f(t)) = \hat{f}(s)$.

3.4.1. Übertragungsfunktion

Wendet man die Laplace-Transformation auf das lineare zeitinvariante Eingrößensystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.58a)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du \quad (3.58b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem skalaren Eingang $u \in \mathbb{R}$ und dem skalaren Ausgang $y \in \mathbb{R}$ an, so erhält man

$$s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{b}\hat{u}(s) \quad (3.59a)$$

$$\hat{y}(s) = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(s) + d\hat{u}(s) \quad (3.59b)$$

Berechnet man nun aus (3.59a) die Größe $\hat{\mathbf{x}}(s)$

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}\hat{u}(s) \quad (3.60)$$

und setzt dies in (3.59b) ein, ergibt sich

$$\hat{y}(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + \left(\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \right) \hat{u}(s) . \quad (3.61)$$

Daraus lässt sich unmittelbar der Begriff der *Übertragungsfunktion* definieren:

Definition 3.3 (Übertragungsfunktion). Für das lineare zeitinvariante Eingrößensystem von (3.58) mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, der Eingangsgröße $u \in \mathbb{R}$ und der Ausgangsgröße $y \in \mathbb{R}$ gelte $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Die von der speziellen Wahl von u unabhängige Funktion $G(s)$

$$\hat{y}(s) = G(s) \hat{u}(s) \quad (3.62)$$

heißt *Übertragungsfunktion* von (3.58).

Im Abschnitt 2.4, Satz 2.4, haben wir festgestellt, dass sich die allgemeine Lösung von (3.58) in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t - \tau) \mathbf{b}u(\tau) d\tau \quad (3.63a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t) \quad (3.63b)$$

mit der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ anschreiben lässt. Wendet man nun auf die erste Zeile von (3.63) die Laplace-Transformation an, so ergibt sich unter Verwendung des Faltungssatzes X aus Anhang A die Beziehung

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = \hat{\mathbf{\Phi}}(s) \mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{\Phi}}(s) \mathbf{b}\hat{u}(s) . \quad (3.64)$$

Durch Vergleich von (3.60) mit (3.64) zeigt sich unmittelbar, dass sich die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ in der Form

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \quad (3.65)$$

errechnet.

Aufgabe 3.12. Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Lösung von Aufgabe 3.12. Transitionsmatrix

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(t) \cos(2t) & \frac{1}{2} \exp(t) \sin(2t) \\ -2 \exp(t) \sin(2t) & \exp(t) \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Damit ist neben der im vorigen Kapitel diskutierten Transformation auf Jordansche Normalform eine weitere Möglichkeit zur effizienten Berechnung der Transitionsmatrix gegeben.

Satz 3.5 (Übertragungsfunktion). Die Übertragungsfunktion $G(s)$ des linearen, zeitinvarianten Eingrößensystems (3.58) errechnet sich zu

$$G(s) = \frac{z(s)}{n(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (3.66)$$

mit den Polynomen $z(s)$ und $n(s)$. Sind die Polynome $z(s)$, auch Zählerpolynom genannt, und $n(s)$, auch Nennerpolynom genannt, teilerfremd, dann gilt $\text{grad}(z(s)) \leq \text{grad}(n(s)) \leq n$ und die Nullstellen des Nennerpolynoms $n(s)$, die so genannten Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$, sind auch Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} . Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Der Grad des Nennerpolynoms $\text{grad}(n(s))$ gibt auch die Ordnung der Übertragungsfunktion $G(s)$ an.

Beweis. Den Beweis für die Beziehung (3.66) erhält man unmittelbar indem man in (3.61) $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ setzt. Die Inverse der Matrix $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ lässt sich in der Form

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} \quad (3.67)$$

anschreiben, wobei mit $\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ die *adjunkte Matrix* der Matrix $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ bezeichnet wird.

(Anmerkung: Die Elemente A_{ij} der adjunkten Matrix $\text{adj}(\mathbf{A}) = [A_{ij}]$ einer Matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ entsprechen den Subdeterminanten der $((n-1) \times (n-1))$ -Matrizen von \mathbf{A} , die durch Streichen der j -ten Zeile und der i -ten Spalte hervorgehen, multipliziert mit dem Faktor $(-1)^{i+j}$.)

Setzt man (3.67) in die Übertragungsfunktion (3.66) ein

$$G(s) = \frac{z(s)}{n(s)} = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{b} + d \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})}, \quad (3.68)$$

erkennt man unmittelbar, dass

- die Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$ auch Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} sind, da $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ dem charakteristischen Polynom der Matrix \mathbf{A} entspricht,
- das Nennerpolynom $n(s)$ von $G(s)$ maximal die Ordnung n haben kann und
- der Grad des Zählerpolynoms $z(s)$ kleiner oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms $n(s)$ sein muss, da $\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ zufolge der Definition lediglich aus Polynomen $(n-1)$ -ter Ordnung in s besteht.

□

Aufgabe 3.13. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des linearisierten Zweitanksystems von Aufgabe 2.18

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} = \frac{a^2 g}{Aq_R} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta q$$

$$\Delta q_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2 g}{q_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix}$$

mit der Eingangsgröße Δq und der Ausgangsgröße Δq_2 .

Lösung von Aufgabe 3.13. Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{1}{\left(s \frac{Aq_R}{a^2 g} + 1\right)^2} .$$

Aufgabe 3.14. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des elektrischen Systems von Abbildung 1.6 mit der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$.

Lösung von Aufgabe 3.14. Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = -\frac{1 + sCR_2}{sR_1C} .$$

3.4.2. Zusammenschaltung von Übertragungsfunktionen

Mit Übertragungsfunktionen kann sehr einfach das Übertragungsverhalten zusammengesetzter Systeme aufgrund der Kenntnis des Übertragungsverhaltens ihrer Komponenten bestimmt werden. Dazu betrachte man die Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ zweier Eingrößensysteme mit

$$\hat{y}_1 = G_1(s) \hat{u}_1 \quad (3.69a)$$

$$\hat{y}_2 = G_2(s) \hat{u}_2 . \quad (3.69b)$$

Als *Hintereinanderschaltung* oder *Serienschaltung* bezeichnet man das System von Abbildung 3.3 mit der Eingangsgröße $\hat{u} = \hat{u}_1$, der Ausgangsgröße $\hat{y} = \hat{y}_2$ und der Zusammenschaltungsbedingung $\hat{u}_2 = \hat{y}_1$.

Für das Gesamtsystem mit der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ erhält man die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = G_2(s) G_1(s) . \quad (3.70)$$

Man beachte, dass die Beziehung (3.70) nur dann gültig ist, wenn die Zusammenschaltung von Abbildung 3.3 *rückwirkungsfrei* ist.

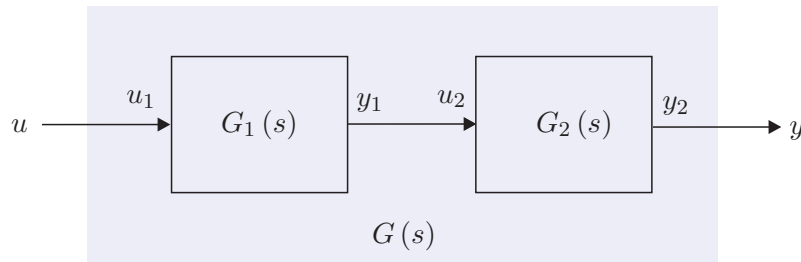


Abbildung 3.3.: Serienschaltung zweier Übertragungsfunktionen.

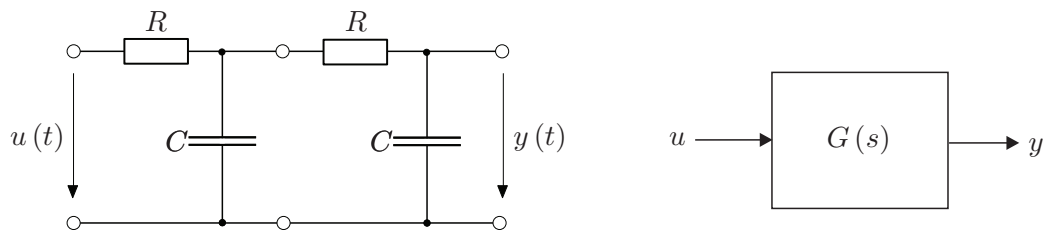


Abbildung 3.4.: Elektrisches Netzwerk.

Zur Erläuterung betrachte man das elektrische System von Abbildung 3.4. Die Übertragungsfunktion errechnet sich zu

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{1}{s^2 C^2 R^2 + 3sCR + 1} \quad (3.71)$$

und dies entspricht offensichtlich nicht der Serienschaltung zweier Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ nach Abbildung 3.5

$$G(s) \neq G_1(s) G_1(s) = \frac{1}{(sCR + 1)^2} . \quad (3.72)$$

Der Grund liegt darin, dass die Zusammenschaltung zweier Netzwerke nach Abbildung 3.5 nicht rückwirkungsfrei ist. Man kann die Rückwirkungsfreiheit beispielsweise dadurch erreichen, dass man die Teilnetzwerke durch einen Spannungsfolger gemäß Abbildung 3.6 trennt.

Als *Parallelschaltung* bezeichnet man das System von Abbildung 3.7 mit der Eingangsgröße $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \hat{u}$ und der Ausgangsgröße $\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$. Für die Übertragungsfunktion der Parallelschaltung folgt unmittelbar

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = G_1(s) + G_2(s) . \quad (3.73)$$

Die so genannte *Gegenkopplung* (*Mitkopplung*) oder *Rückkopplung mit negativem Vorzeichen* (*mit positivem Vorzeichen*) ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Die Übertragungs-

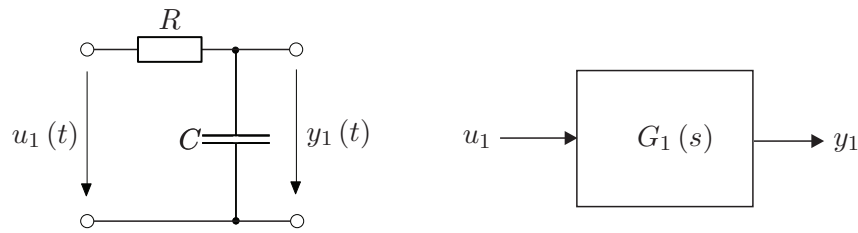


Abbildung 3.5.: Teilnetzwerk von Abbildung 3.4.

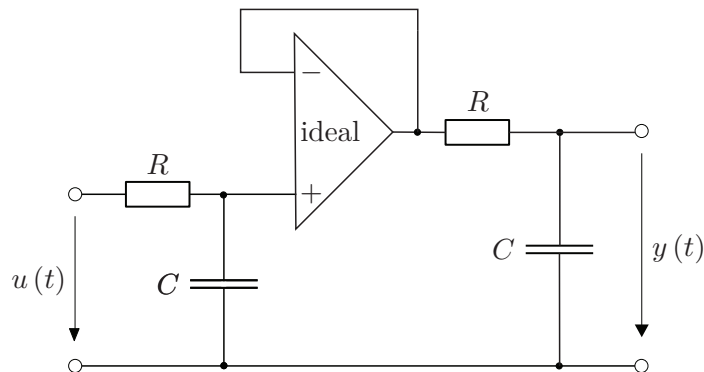


Abbildung 3.6.: Auftrennung der Teilnetzwerke durch einen Spannungsfolger.

funktion des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße $\hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{y}_2$, der Ausgangsgröße $\hat{y} = \hat{y}_1$ und der Zusammenschaltungsbedingung $\hat{u}_2 = \hat{y}_1$ folgt zu

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = (1 + G_1(s) G_2(s))^{-1} G_1(s) . \quad (3.74)$$

Aufgabe 3.15. Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen $G_{r,y}(s)$, $G_{r,u}(s)$, $G_{d,y}(s)$, $G_{d,u}(s)$, $G_{n,y}(s)$ sowie $G_{n,u}(s)$ des Regelkreises von Abbildung 3.9 mit der Führungsgröße r , der Störgröße d , dem Messrauschen n , der Stellgröße u und der Ausgangsgröße y . Beachten Sie, dass mit $G_{\eta,\chi}(s)$ die Übertragungsfunktion vom Eingang η zum Ausgang χ gemeint ist.

Lösung von Aufgabe 3.15. (für drei Übertragungsfunktionen)

$$G_{r,y} = \frac{VG_1}{1 + G_1R} \quad G_{r,u} = \frac{V}{1 + G_1R} \quad G_{d,u} = \frac{-G_2R}{1 + G_1R}$$

3.4.3. Übertragungsmatrix

Im Mehrgrößenfall (p Eingänge und q Ausgänge) tritt an Stelle der Übertragungsfunktion $G(s)$ die so genannte Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$. Die Herleitung erfolgt vollkommen

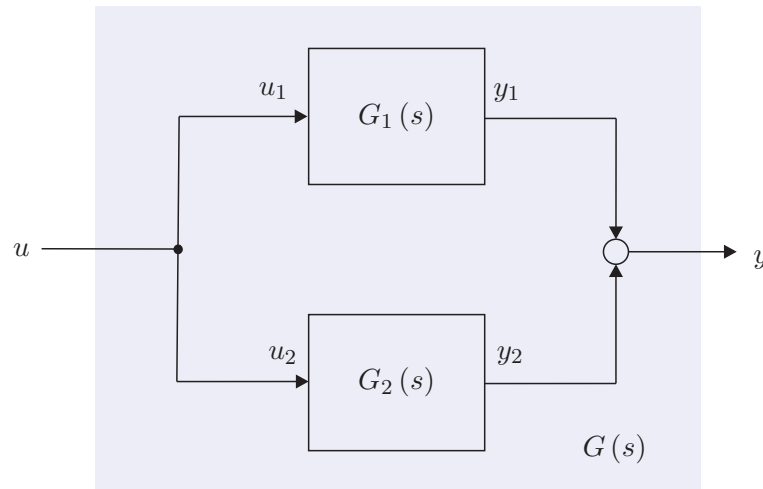


Abbildung 3.7.: Parallelschaltung zweier Übertragungsfunktionen.

analog zur Übertragungsfunktion und wird wegen der Ähnlichkeit zu Abschnitt 3.4.1 relativ kurz gehalten. Die Laplace-Transformation angewandt auf das lineare, zeitinvariante System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.75a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.75b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ und dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ ergibt

$$s\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \quad (3.76a)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}} . \quad (3.76b)$$

Durch Elimination der Größe $\hat{\mathbf{x}}$ mit

$$\hat{\mathbf{x}} = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (3.77)$$

folgt unmittelbar

$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 , \quad (3.78)$$

und für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ erhält man die $(q \times p)$ -Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}\hat{\Phi}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} . \quad (3.79)$$

Aufgabe 3.16. Betrachten Sie das elektromechanische System vom Abschnitt 1.4 mit der Zustandsgleichung (1.25) und der Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x \\ M_{el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\varphi \\ k\psi_F(i_F) i_A \end{bmatrix} .$$

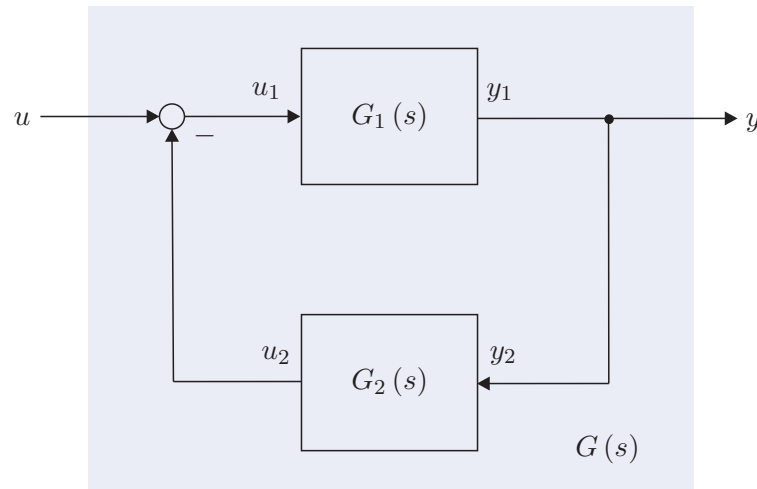


Abbildung 3.8.: Gegenkopplung zweier Übertragungsfunktionen.

Linearisieren Sie das System für $\psi_F(i_F) = L_F i_F$ mit konstantem L_F und $u_F = u_{F,R}$ um den Arbeitspunkt

$$u_{A,R} = \frac{R_A R_F m g r}{k L_F u_{F,R}}, \quad i_{A,R} = \frac{R_F m g r}{k L_F u_{F,R}}, \quad i_{F,R} = \frac{u_{F,R}}{R_F}, \quad \omega_R = 0, \quad \varphi_R = \text{const.}$$

und berechnen Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ des linearisierten Systems vom Eingang $\Delta \mathbf{u}^T = [\Delta u_A \quad \Delta u_F]$ zum Ausgang $\Delta \mathbf{y}^T = [\Delta x \quad \Delta M_{el}]$.

Lösung von Aufgabe 3.16. Die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ lautet

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{r k u_{F,R} R_F L_F}{s \tilde{n}(s)} & \frac{(s L_A + R_A) m g r^2 R_F^3}{s (s L_F + R_F) \tilde{n}(s) u_{F,R}} \\ \frac{s k L_F u_{F,R} R_F \tilde{\Theta}}{\tilde{n}(s)} & \frac{s (s L_A + R_A) m g r R_F^3 \tilde{\Theta}}{(s L_F + R_F) \tilde{n}(s) u_{F,R}} \end{bmatrix}$$

mit

$$\tilde{n}(s) = s^2 R_F^2 \tilde{\Theta} L_A + s R_F^2 \tilde{\Theta} R_A + k^2 L_F^2 u_{F,R}^2$$

$$\tilde{\Theta} = (\Theta_G + \Theta_T + m r^2) .$$

Aufgabe 3.17. Zeigen Sie, dass äquivalente mathematische Beschreibungen eines linearen, zeitinvarianten Systems $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ (siehe (3.2)) und $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}})$ (siehe (3.3)) die gleiche Übertragungsmatrix besitzen.

Man beachte, dass bei der Zusammenschaltung von Übertragungsmatrizen wegen der *Nichtkommutativität der Matrizenmultiplikation* die Reihenfolge der Teilübertragungs-

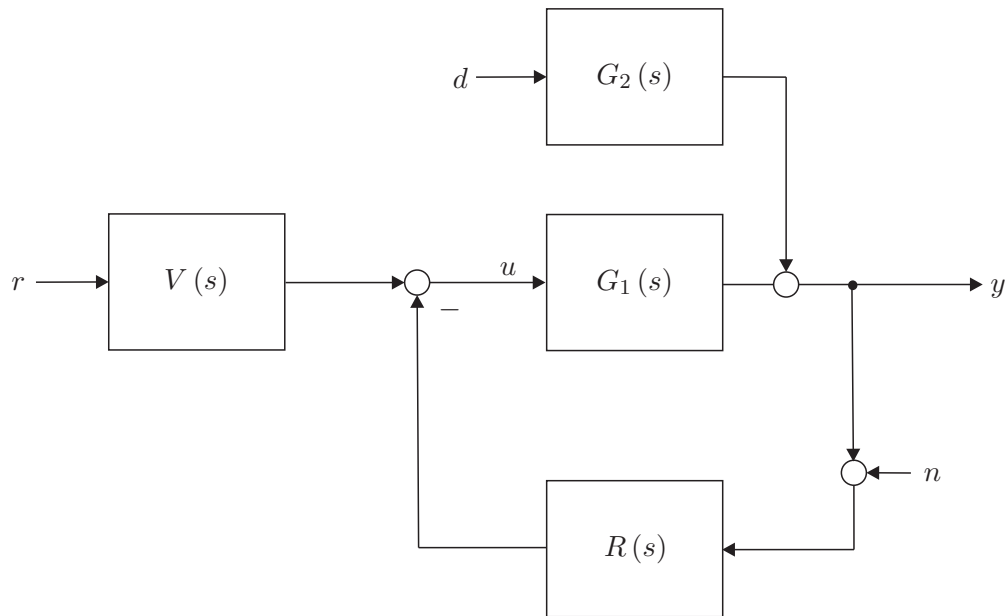


Abbildung 3.9.: Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden.

matrizen entscheidend ist. Die Ergebnisse für die Serienschaltung (3.70) sowie für die Rückkopplung (3.74) von Abschnitt 3.4.2 wurden bereits so angeschrieben, dass sie auch im Mehrgrößenfall gültig sind.

Aufgabe 3.18. Berechnen Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ der Serienschaltung, der Parallelschaltung und der Rückkopplung zweier Übertragungsmatrizen $\mathbf{G}_1(s)$ und $\mathbf{G}_2(s)$. Wie müssen die Dimensionen der Matrizen aussehen, damit die einzelnen Zusammenschaltungen überhaupt möglich sind.

3.5. Realisierungsproblem

Im Satz 3.5, im Speziellen (3.66), wurde gezeigt, dass es sehr einfach ist, zu einem linearen, zeitinvarianten Eingrößensystem (3.58) die Übertragungsfunktion $G(s)$ zu berechnen. Unter dem *Realisierungsproblem* versteht man die umgekehrte Aufgabe, nämlich zu einer gegebenen Übertragungsfunktion $G(s)$ eine Zustandsdarstellung der Form (3.58) mit den Größen \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} und d zu suchen. Jene Zustandsrealisierungen, die eine minimale Anzahl von Zuständen haben, werden auch als *Minimalrealisierung* der Übertragungsfunktion $G(s)$ bezeichnet. Es sei an dieser Stelle nochmals betont, dass die Zustandsrealisierung einer Übertragungsfunktion $G(s)$ natürlich keinesfalls eindeutig ist (siehe dazu auch Aufgabe 3.17).

Satz 3.6 (Realisierbarkeit). Eine Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{z(s)}{n(s)} \quad (3.80)$$

mit dem Zähler- und Nennerpolynom $z(s)$ und $n(s)$ ist genau dann realisierbar, wenn $\text{grad}(z(s)) \leq \text{grad}(n(s))$ oder äquivalent dazu

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |G(s)| < \infty \quad (3.81)$$

gilt.

In der englischsprachigen Literatur bezeichnet man eine Übertragungsfunktion (3.80) mit $\text{grad}(z(s)) \leq \text{grad}(n(s))$ auch als *proper* bzw. für $\text{grad}(z(s)) < \text{grad}(n(s))$ als *strictly proper*. Durch Polynomdivision von $z(s)$ durch $n(s)$ ist es unmittelbar einsichtig, dass für $\text{grad}(z(s)) > \text{grad}(n(s))$ in der zugehörigen Zustandsdarstellung Ableitungen der Eingangsgröße u auftreten müssen, und man somit nicht mehr direkt die Struktur von (3.58) erhält. Um für $G(s)$ von (3.80) eine Minimalrealisierung zu finden, müssen die Polynome $z(s)$ und $n(s)$ teilerfremd sein.

Im Folgenden werden zwei *kanonische Minimalrealisierungen* der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{z(s)}{n(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1} + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (3.82)$$

angegeben, wobei vorausgesetzt wird, dass die Polynome $z(s)$ und $n(s)$ teilerfremd sind, und das Nennerpolynom *monisch* ist, d. h. der höchstwertigste Koeffizient von $n(s)$ ist 1. Führt man für (3.82) eine Polynomdivision in der Form

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{(b_0 - a_0 b_n) + (b_1 - a_1 b_n) s + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_n) s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} + b_n \quad (3.83)$$

durch und vergleicht diesen Ausdruck mit (3.66), dann erhält man unmittelbar

$$d = b_n . \quad (3.84)$$

Für den echt rationalen Anteil von (3.83) folgt durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} a_0 (\hat{y} - b_n \hat{u}) + a_1 s (\hat{y} - b_n \hat{u}) + \dots + s^n (\hat{y} - b_n \hat{u}) \\ = (b_0 - a_0 b_n) \hat{u} + (b_1 - a_1 b_n) s \hat{u} + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_n) s^{n-1} \hat{u} \end{aligned} \quad (3.85)$$

bzw. mit

$$\hat{x}_n = \hat{y} - b_n \hat{u} \quad (3.86a)$$

$$\tilde{b}_i = b_i - a_i b_n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.86b)$$

folgt

$$a_0 \hat{x}_n + a_1 s \hat{x}_n + \dots + a_{n-1} s^{n-1} \hat{x}_n + s^n \hat{x}_n = \tilde{b}_0 \hat{u} + \tilde{b}_1 s \hat{u} + \dots + \tilde{b}_{n-1} s^{n-1} \hat{u} . \quad (3.87)$$

Formt man (3.87) in der Form

$$a_0 \frac{1}{s^n} \hat{x}_n + a_1 \frac{1}{s^{n-1}} \hat{x}_n + \dots + a_{n-1} \frac{1}{s} \hat{x}_n + \hat{x}_n = \tilde{b}_0 \frac{1}{s^n} \hat{u} + \tilde{b}_1 \frac{1}{s^{n-1}} \hat{u} + \dots + \tilde{b}_{n-1} \frac{1}{s} \hat{u} \quad (3.88)$$

bzw.

$$\hat{x}_n = \underbrace{\left(\dots \left(\left(\tilde{b}_0 \hat{u} - a_0 \hat{x}_n \right) \frac{1}{s} + \tilde{b}_1 \hat{u} - a_1 \hat{x}_n \right) \frac{1}{s} + \dots \right) \frac{1}{s} + \tilde{b}_{n-1} \hat{u} - a_{n-1} \hat{x}_n \right) \frac{1}{s}}_{n \text{ mal}} \quad (3.89)$$

um und führt die Größen

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{s} (\tilde{b}_0 \hat{u} - a_0 \hat{x}_n) \quad (3.90a)$$

$$\hat{x}_2 = \frac{1}{s} (\hat{x}_1 + \tilde{b}_1 \hat{u} - a_1 \hat{x}_n) \quad (3.90b)$$

⋮

$$\hat{x}_n = \frac{1}{s} (\hat{x}_{n-1} + \tilde{b}_{n-1} \hat{u} - a_{n-1} \hat{x}_n) \quad (3.90c)$$

ein, so erhält man unmittelbar das System

$$s \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-2} \\ \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \hat{u} \quad (3.91a)$$

$$\hat{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} + \underbrace{b_n}_{d} \hat{u}. \quad (3.91b)$$

Durch die inverse Laplace-Transformation von (3.91) ist aber unmittelbar eine Zustandsrealisierung der Übertragungsfunktion $G(s)$ von (3.82) gefunden. Man nennt diese Realisierung auch *2-te Standardform* oder *Beobachtbarkeitsnormalform*. Abbildung 3.10 zeigt das zugehörige Strukturschaltbild.

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ als skalare rationale Funktion in s bleibt unverändert, wenn man sie transponiert, d. h.

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \left(\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \right)^T = \mathbf{b}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{c} + d. \quad (3.92)$$

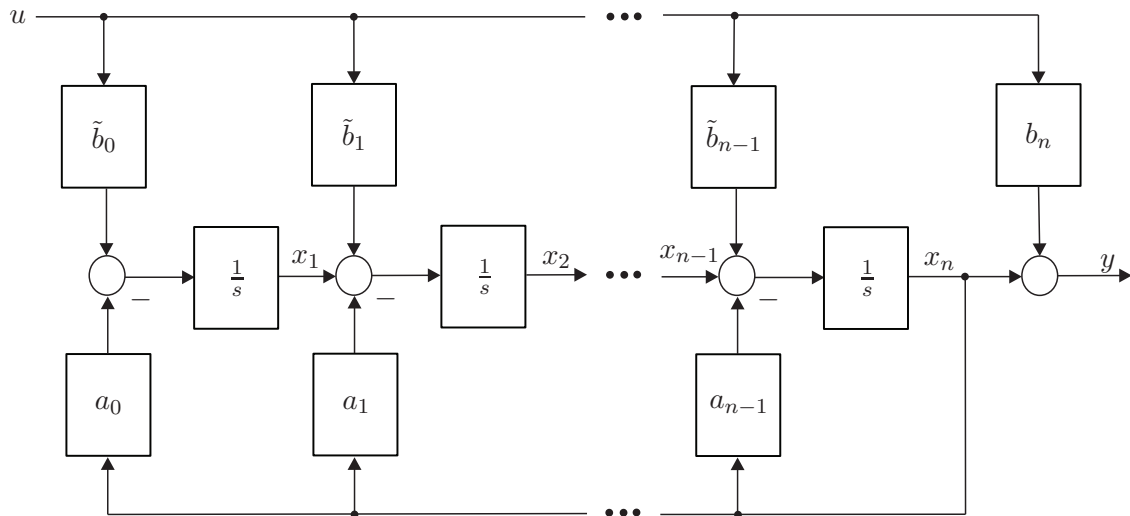


Abbildung 3.10.: Beobachtbarkeitsnormalform oder 2-te Standardform.

Gleichung (3.92) besagt offensichtlich, dass das Eingrößensystem (3.58) und

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{c}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{3.93a}$$

$$y = \mathbf{b}^T \mathbf{x} + du \tag{3.93b}$$

die gleiche Übertragungsfunktion $G(s)$ haben. Das System (3.93) nennt man auch das zu (3.58) *duale System*. Wendet man dies auf (3.91) an, erhält man die Realisierung

$$s \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^T} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \hat{u} \tag{3.94a}$$

$$\hat{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_{n-2} & \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}^T} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} + \underbrace{b_n}_d \hat{u}. \tag{3.94b}$$

Das zugehörige Strukturschaltbild ist Abbildung 3.11 zu entnehmen. Die Form (3.94) heißt auch *1-te Standardform* oder *Steuerbarkeitsnormalform*.

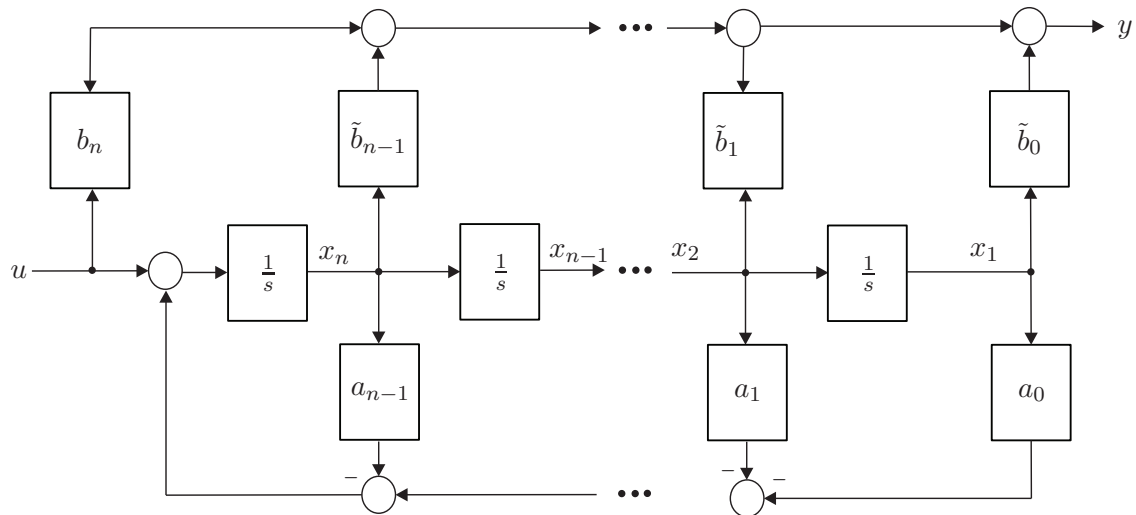


Abbildung 3.11.: Steuerbarkeitsnormalform oder 1-te Standardform.

Als Beispiel bestimme man für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{s^3 + 2s}{(s-1)(-2+3s)(s+1)} \quad (3.95)$$

die 1-te Standardform. Dazu zerlegt man die Übertragungsfunktion in einen konstanten und einen echt rationalen Anteil in der Form

$$G(s) = \frac{\frac{1}{3}s^3 + \frac{2}{3}s}{s^3 - \frac{2}{3}s^2 - s + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}s - \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}s^2 - s + \frac{2}{3} \right)}{s^3 - \frac{2}{3}s^2 - s + \frac{2}{3}} + \frac{1}{3} = \frac{\frac{2}{9}s^2 + s - \frac{2}{9}}{s^3 - \frac{2}{3}s^2 - s + \frac{2}{3}} + \frac{1}{3}. \quad (3.96)$$

Die 1-te Standardform lässt sich nun unmittelbar aus (3.96) ablesen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.97a)$$

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & 1 & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} u. \quad (3.97b)$$

Aufgabe 3.19. Bestimmen Sie die 2-te Standardform für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{-3s + 1}{2s^2 + 3s + 1}.$$

Lösung von Aufgabe 3.19. Die 2-te Standardform lautet

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} .$$

Aufgabe 3.20. Starten Sie das Programm MATLAB und tippen Sie `help control` ein. Studieren Sie die Befehle `tf`, `tfdata`, `canon`, `ss2tf`, `tf2ss`, `feedback` etc.

3.6. BIBO-Stabilität

Die *globale asymptotische Stabilität der Ruhelage* nach Satz 3.4 bezieht sich auf ein lineares, zeitinvariantes, autonomes System. Mit Hilfe der so genannten *BIBO-Stabilität* (**BIBO** - **B**ounded **I**nput **B**ounded **O**utput) lässt sich die Stabilität des Eingangs-Ausgangsverhaltens eines linearen, zeitinvarianten Systems der Form (3.58) beurteilen.

Definition 3.4 (BIBO-Stabilität). Für ein lineares, zeitinvariantes Eingrößensystem (3.58) mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y gelte $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Das System heißt *BIBO-stabil*, wenn zu jeder *beschränkten Eingangsfunktion* $u(t)$ eine *beschränkte Ausgangsfunktion* $y(t)$ gehört, d. h. zu jedem finiten $a > 0$ mit $|u(t)| \leq a$ existiert ein finites $b > 0$ so, dass $|y(t)| \leq b$ gilt.

Die BIBO-Stabilität lässt sich nun sehr einfach anhand der so genannten Impulsantwort

$$g(t) = \int_0^t g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1}(G(s) \mathbf{1}) = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{b}, \quad t > 0 \quad (3.98)$$

der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \underbrace{\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d}_{\hat{g}(s)} \quad (3.99)$$

mit $\delta(t)$ als der Dirac Delta-Funktion (siehe Anhang A) überprüfen – es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 3.7 (BIBO-Stabilität anhand der Impulsantwort). Ein lineares, zeitinvariantes Eingrößensystem der Form (3.58) ist genau dann BIBO-stabil, wenn die Impulsantwort $g(t)$ nach (3.98) absolut integrierbar ist, d. h. die Ungleichung

$$\int_0^\infty |g(t)| dt < \infty \quad (3.100)$$

erfüllt ist.

Beweis: siehe Anhang C

Eine weitere Möglichkeit zur Überprüfung der BIBO-Stabilität erfolgt über die Übertragungsfunktion $G(s)$ von (3.66).

Satz 3.8 (BIBO-Stabilität anhand der Übertragungsfunktion). Ein lineares, zeitinvariantes Eingrößensystem der Form (3.58) ist genau dann BIBO-stabil, wenn für alle Pole $s_i = \alpha_i + j\omega_i$ der zugehörigen Übertragungsfunktion $G(s)$ von (3.66) gilt

$$\operatorname{Re}(s_i) = \alpha_i < 0. \quad (3.101)$$

Beweis: siehe Anhang C

Da nach Satz 3.5 jeder Pol von $G(s)$ ein Eigenwert der Dynamikmatrix \mathbf{A} ist folgt aus der globalen asymptotischen Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (siehe Satz 3.4), dass das System auch BIBO-stabil ist. Die Umkehrung gilt nur dann, wenn die Ordnung der Übertragungsfunktion $G(s)$ und die des Systems übereinstimmen.

Aufgabe 3.21. Geben Sie für das nicht BIBO-stabile, lineare, zeitinvariante Eingrößensystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

eine beschränkte Eingangsgröße $u(t)$ so an, dass die Ausgangsgröße $y(t)$ unbeschränkt ist.

Lösung von Aufgabe 3.21.

$$u(t) = A \sin(t)$$

Aufgabe 3.22. Überprüfen Sie anhand der Sätze 3.7 und 3.8, ob die Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{1}{s}, \quad G_2(s) = \frac{s-1}{s+2}, \quad G_3(s) = s, \quad G_4(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

BIBO-stabil sind.

Lösung von Aufgabe 3.22. $G_1(s)$, $G_3(s)$ sind nicht BIBO-stabil; $G_2(s)$, $G_4(s)$ sind BIBO-stabil.

Aufgabe 3.23. Ist das System

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}u$$

BIBO-stabil?

Lösung von Aufgabe 3.23. Ja.

3.7. Kontinuierlicher Frequenzgang

Schaltet man auf ein lineares zeitinvariantes System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ eine harmonische Eingangsgröße der Form

$$u(t) = A_0 \sin(\omega_0 t) \quad (3.102)$$

auf und nimmt an, dass $G(s)$ BIBO-stabil ist, dann erhält man für die Ausgangsgröße $y(t)$ im *eingeschwungenen Zustand* (d. h. nach Abklingen der transienten Vorgänge) wieder eine harmonische Funktion mit identischer Frequenz ω_0 aber veränderter Phase und Amplitude (siehe auch Kapitel 4 von Signale und Systeme 1)

$$y(t) = A_0 |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg(G(j\omega_0))) . \quad (3.103)$$

Wertet man die Übertragungsfunktion $G(s)$ entlang der imaginären Achse $s = j\omega$ aus, so ist mit $G(j\omega)$ eine Abbildung der imaginären Achse $j\omega$ mit der reellen Größe ω in die komplexen Zahlen gegeben. Man nennt nun die Funktion $G(j\omega)$ den *Frequenzgang* der Übertragungsfunktion $G(s)$ und die reellwertigen Funktionen $|G(j\omega)|$ bzw. $\arg(G(j\omega))$ bezeichnet man als *Betragsfrequenzgang* oder *Amplitudengang* bzw. *Winkelfrequenzgang* oder *Phasengang* von $G(s)$.

Beispiel 3.4. Als Beispiel berechne man für das elektrische System von Abbildung 3.12 die Ausgangsspannung $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand für die Eingangsspannung

$$u(t) = 3 \sin(2t + 15^\circ) . \quad (3.104)$$

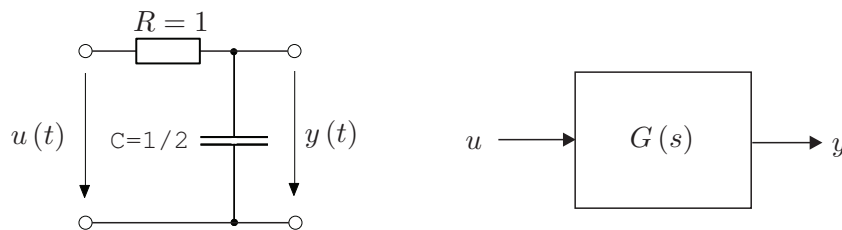


Abbildung 3.12.: Einfaches elektrisches System.

Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + \frac{s}{2}} \quad (3.105)$$

und damit errechnet sich der komplexe Frequenzgang zu

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{2})^2}} e^{-j \arctan(\frac{\omega}{2})} . \quad (3.106)$$

Da $G(s)$ BIBO-stabil ist, lautet die Ausgangsspannung $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand mit $\omega_0 = 2$

$$y(t) = 3 |G(I2)| \sin(2t + 15^\circ + \arg(G(I2))) = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin(2t - 30^\circ) . \quad (3.107)$$

Aufgabe 3.24. Bestimmen Sie für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{s - \sqrt{3}}{s^2 + s + 1}$$

die Ausgangsgröße $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand für die Eingangsgröße

$$u(t) = 10 \cos(t - 10^\circ) + e^{-3t} .$$

Lösung von Aufgabe 3.24. Die Ausgangsgröße $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand lautet

$$y(t) = 20 \cos(t + 50^\circ) .$$

Aufgabe 3.25. Das mechanische System von Abschnitt 1.3 (Abbildung 1.7 und Gleichung (1.16)) wird mit einer harmonischen Kraft der Form

$$F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

angeregt. Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω_0 so, dass die mittlere Leistung im eingeschwungenen Zustand

$$p_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) v(t) dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

mit der Geschwindigkeit $v(t)$ maximal wird.

Lösung von Aufgabe 3.25. Die Kreisfrequenz lautet $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ und die zugehörige mittlere Leistung im eingeschwungenen Zustand ergibt sich zu $p_m = \frac{F_0^2}{2d}$.

Aus der Berechnung des eingeschwungenen Zustandes ist es bereits naheliegend, wie man den Frequenzgang $G(I\omega)$ einer BIBO-stabilen Übertragungsfunktion $G(s)$ punktweise messtechnisch ermitteln kann. Dazu schaltet man einfach auf das System eine harmonische Eingangsgröße der Form

$$u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t) \quad (3.108)$$

auf, wartet ab, bis sämtliche transienten Vorgänge abgeklungen sind, und misst anschließend die Ausgangsgröße im eingeschwungenen Zustand

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) . \quad (3.109)$$

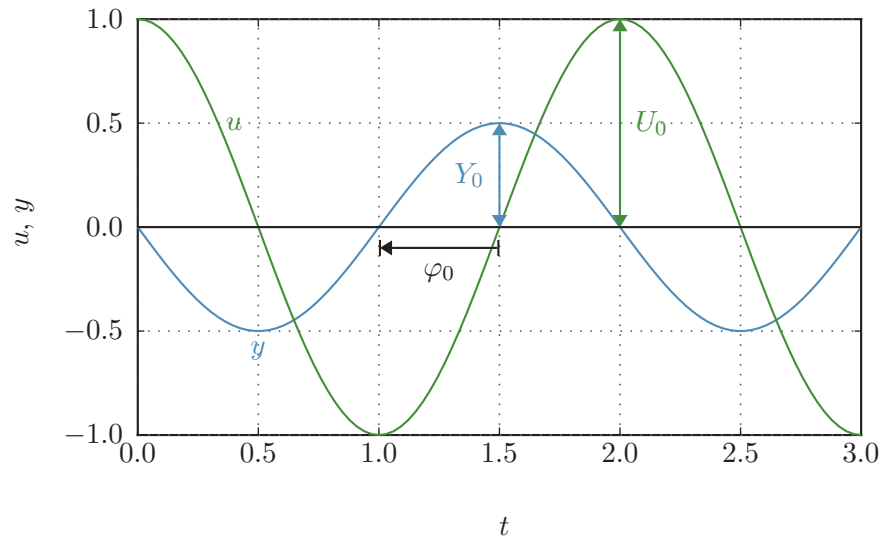


Abbildung 3.13.: Zur punktweisen Aufnahme des Frequenzganges.

Aus dieser Messung erhält man den Punkt $\omega = \omega_0$ des Frequenzganges $G(I\omega)$ über die Beziehungen

$$|G(I\omega_0)| = \frac{Y_0}{U_0} \quad (3.110)$$

$$\arg(G(I\omega_0)) = \varphi_0 . \quad (3.111)$$

In Abbildung 3.13 ist diese Vorgangsweise grafisch veranschaulicht.

Die Aufgabe, aus Messungen der Ein- und Ausgangsgrößen das mathematische Modell des zugehörigen Systems zu ermitteln, wird als *Identifikationsaufgabe* bezeichnet. Eine einfache Möglichkeit, den Frequenzgang eines linearen, zeitinvarianten Systems punktweise zu bestimmen, wurde soeben gezeigt. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass es zur Identifikation des Frequenzganges wesentlich intelligentere Methoden gibt, die im Rahmen dieser Vorlesung nicht behandelt werden. Für nähere Details dazu sei auf die Vorlesung Prozessidentifikation im Masterstudiengang Automatisierungstechnik verwiesen.

3.7.1. Nyquist-Ortskurve

Wie bereits erwähnt, ist der Frequenzgang $G(I\omega)$ eine Abbildung von den reellen in die komplexen Zahlen. Eine Möglichkeit den Frequenzgang grafisch zu veranschaulichen, besteht darin, den Graphen $(\operatorname{Re}(G(I\omega)), \operatorname{Im}(G(I\omega)))$ in Abhängigkeit des Parameters ω in der komplexen Ebene zu zeichnen. Diese Art der Darstellung nennt man *Nyquist-Ortskurve* und diese ist für viele weitere Betrachtungen im Rahmen der Regelung linearer, zeitinvarianter Systeme von essentieller Bedeutung.

Als Beispiel betrachte man die Übertragungsfunktion $G(s)$ des elektrischen Systems

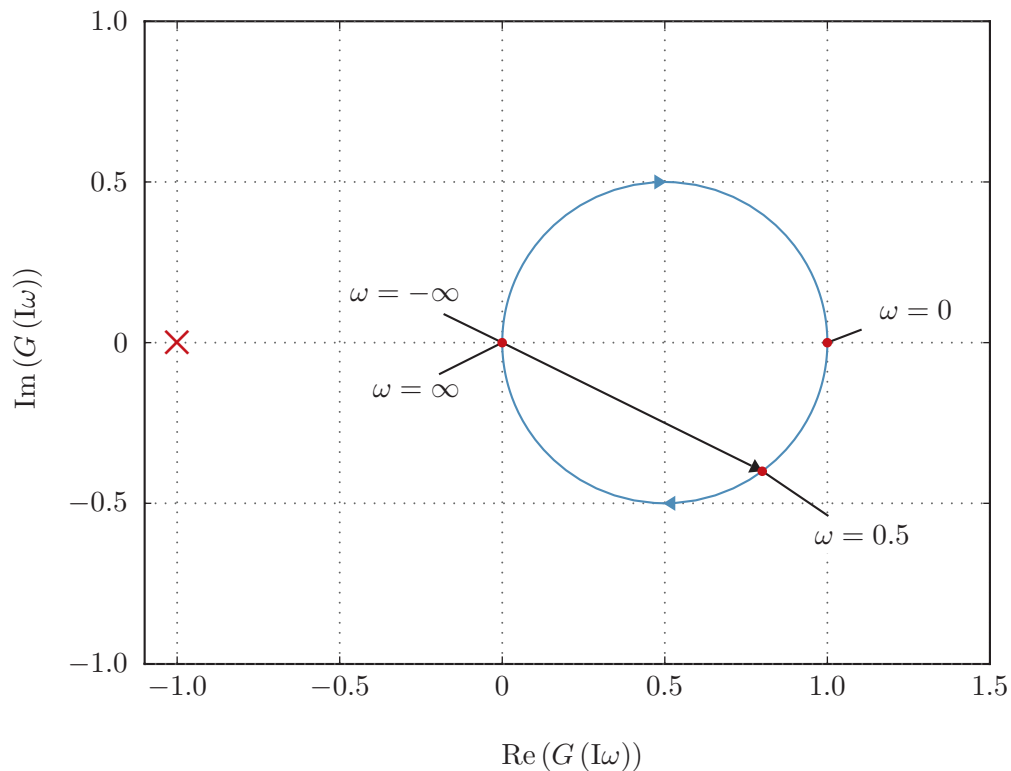


Abbildung 3.14.: Nyquist-Ortskurve der Übertragungsfunktion von Abbildung 3.12.

von Abbildung 3.12 mit dem zugehörigen Frequenzgang

$$G(I\omega) = \frac{1}{1 + I\frac{\omega}{2}} = \underbrace{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}}_{\text{Re}(G(I\omega))} + I \underbrace{\frac{-\frac{\omega}{2}}{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}}_{\text{Im}(G(I\omega))}. \quad (3.112)$$

Aus der Beziehung

$$\left(\text{Re}(G(I\omega)) - \frac{1}{2}\right)^2 + \text{Im}(G(I\omega))^2 = \frac{1}{4} \quad (3.113)$$

überzeugt man sich leicht, dass die Nyquist-Ortskurve von (3.112) ein Kreis mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ und dem Radius $\frac{1}{2}$ ist (siehe Abbildung 3.14).

Abbildung 3.15 zeigt als zweites Beispiel die Nyquist-Ortskurve der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10s^2 + 15s + 10}{s^2 + s + 3}. \quad (3.114)$$

Aufgabe 3.26. Berechnen Sie für die Nyquist-Ortskurve von Abbildung 3.15 die Kreisfrequenz ω_0 .

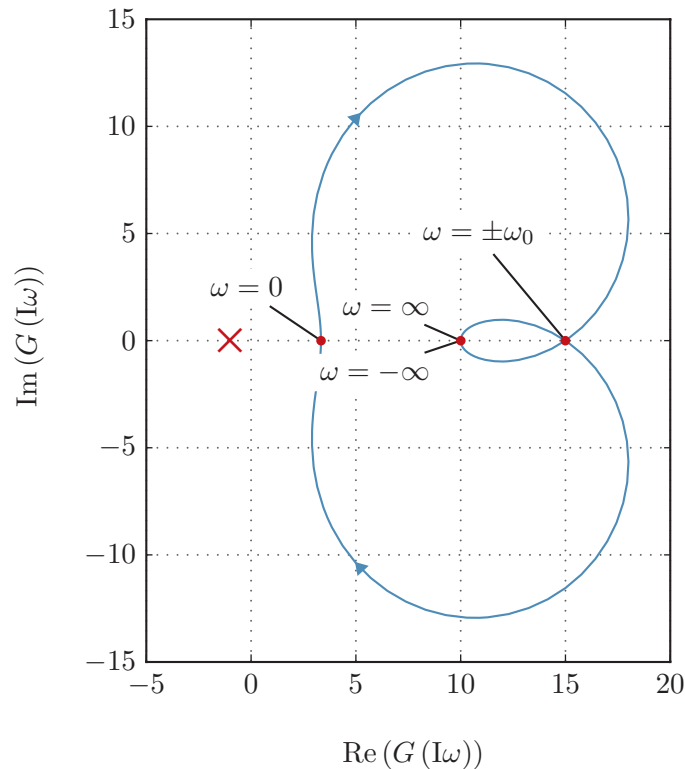


Abbildung 3.15.: Nyquist-Ortskurve zum zweiten Beispiel.

Lösung von Aufgabe 3.26. Die Kreisfrequenz ergibt sich zu $\omega_0 = \sqrt{7}$.

Aufgabe 3.27. Zeichnen Sie die Nyquist-Ortskurven der Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad G_3(s) = \frac{s}{s+2},$$

$$G_4(s) = \frac{3}{s}, \quad G_5(s) = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Welche Nyquist-Ortskurven beschreiben als geometrischen Ort einen Kreis? Geben Sie die zugehörigen Kreisgleichungen an.

Hinweis: Versuchen Sie den prinzipiellen Verlauf der Ortskurve mit der Hand zu skizzieren und vergleichen Sie anschließend das Ergebnis mit MATLAB (Befehl `nyquist`).

3.7.2. Bode-Diagramm

Neben der soeben besprochenen Nyquist-Ortskurve zur Darstellung des Frequenzganges $G(j\omega)$ einer Übertragungsfunktion $G(s)$ sind die so genannten *Logarithmischen Frequenzkennlinien* oder *Bode-Diagramme* von essentieller Bedeutung. Zur Definition der

Bode-Diagramme wird im Nachfolgenden der Begriff einer einfach- und doppellogarithmischen Darstellung eines Graphen erläutert. Man nennt den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *einfach logarithmisch*, wenn er in der Parameterdarstellung $(\log(x), f(x))$ mit dem Parameter x gezeichnet wird, man nennt ihn *doppellogarithmisch*, wenn man die Darstellung $(\log(x), \log(f(x)))$ wählt. Bei den Bode-Diagrammen ist es im Rahmen der doppellogarithmischen Darstellung üblich, auf der Ordinate anstelle von $\log(f(x))$ die Größe $20 \log(f(x))$ aufzutragen. Man sagt dann auch, die Größe $f(x)$ liege in *Dezibel* ($f(x)$ in dB) vor mit $(f(x))_{\text{dB}} = 20 \log(f(x))$.

Definition 3.5 (Bode-Diagramm). Unter dem *Bode-Diagramm* einer Übertragungsfunktion $G(s)$ versteht man die beiden Graphen

- *Amplitudengang*: $(\log(\omega), |G(j\omega)|_{\text{dB}})$ (doppellogarithmisch) und
- *Phasengang*: $(\log(\omega), \arg(G(j\omega)))$ (einfach logarithmisch). Die Phase wird hier in $^\circ$ angegeben.

Der große Vorteil dieser logarithmischen Darstellung liegt darin, dass bei der Serienschaltung von Systemen auf sehr einfache Art und Weise der Einfluss der Teilsysteme erkennbar ist. Dazu betrachte man die beiden Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{z_1(s)}{n_1(s)} \quad (3.115a)$$

$$G_2(s) = \frac{z_2(s)}{n_2(s)} \quad (3.115b)$$

und deren Serienschaltung

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) = \frac{z_1(s)}{n_1(s)} \frac{z_2(s)}{n_2(s)}. \quad (3.116)$$

Berechnet man nun $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$, so erhält man

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log \left(\left| \frac{z_1(j\omega)}{n_1(j\omega)} \frac{z_2(j\omega)}{n_2(j\omega)} \right| \right) \\ &= 20 \log (|z_1(j\omega)|) + 20 \log (|z_2(j\omega)|) \\ &\quad - 20 \log (|n_1(j\omega)|) - 20 \log (|n_2(j\omega)|) \end{aligned} \quad (3.117)$$

und $\arg(G(j\omega))$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \arg(G(j\omega)) &= \arg \left(\frac{z_1(j\omega)}{n_1(j\omega)} \frac{z_2(j\omega)}{n_2(j\omega)} \right) \\ &= \arg(z_1(j\omega)) + \arg(z_2(j\omega)) - \arg(n_1(j\omega)) - \arg(n_2(j\omega)). \end{aligned} \quad (3.118)$$

Man erkennt, dass sowohl bei der Logarithmusbildung als auch beim Argument Multiplikationen zu Additionen und Divisionen zu Subtraktionen werden.

Zur einfacheren Konstruktion und Interpretation des Bode-Diagrammes einer Übertragungsfunktion $G(s)$ wird die Übertragungsfunktion in *normierter Form* wie folgt

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{V z(s)}{s^r n(s)} = \frac{V \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{s}{\omega_{z,i}}\right) \prod_{i=k+1}^m \left(1 + 2\xi_{z,i} \left(\frac{s}{\omega_{z,i}}\right) + \left(\frac{s}{\omega_{z,i}}\right)^2\right)}{s^r \prod_{j=1}^l \left(1 + \frac{s}{\omega_{n,j}}\right) \prod_{j=l+1}^n \left(1 + 2\xi_{n,j} \left(\frac{s}{\omega_{n,j}}\right) + \left(\frac{s}{\omega_{n,j}}\right)^2\right)} \quad (3.119)$$

mit $z(0) = n(0) = 1$, $r \in \mathbb{Z}$ sowie $\omega_{z,i}$, $\omega_{n,j} \neq 0$ und $|\xi_{z,i}|$, $|\xi_{n,j}| < 1$ angeschrieben. Dabei bezeichnet V den *Verstärkungsfaktor*, $\omega_{z,i}$ und $\omega_{n,j}$ die *Knickfrequenzen* und $\xi_{z,i}$ und $\xi_{n,j}$ die *Dämpfungsgrade* der Übertragungsfunktion $G(s)$. Zur Interpretation des Verstärkungsfaktors betrachte man den Fall, dass $r = 0$ gilt und die Nullstellen von $n(s)$ alle in der linken offenen s -Halbebene sind. Damit ist aber nach der Definition 3.4 der BIBO-Stabilität garantiert, dass die Antwort $y(t)$ des Systems (3.119) auf einen Einheitssprung $u(t) = \sigma(t)$ beschränkt ist und somit der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ existiert.

Wendet man den Endwertsatz der Laplace-Transformation an, so folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{y}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} V \frac{z(s)}{n(s)} = V. \quad (3.120)$$

Damit wird also stationär die Höhe des Eingangssprunges um den Faktor V auf die Ausgangsgröße verstärkt.

Für den Amplitudengang von (3.119) erhält man

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= |V|_{\text{dB}} + \sum_{i=1}^k \left| 1 + \text{I} \frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right|_{\text{dB}} + \sum_{i=k+1}^m \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right)^2 + \text{I} 2\xi_{z,i} \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right) \right|_{\text{dB}} \\ &\quad - r |\omega|_{\text{dB}} - \sum_{j=1}^l \left| 1 + \text{I} \frac{\omega}{\omega_{n,j}} \right|_{\text{dB}} - \sum_{j=l+1}^n \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n,j}} \right)^2 + \text{I} 2\xi_{n,j} \left(\frac{\omega}{\omega_{n,j}} \right) \right|_{\text{dB}} \end{aligned} \quad (3.121a)$$

und für den Phasengang folgt

$$\begin{aligned} \arg(G(j\omega)) &= \arg(V) + \sum_{i=1}^k \arg \left(1 + \text{I} \frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right) \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^m \arg \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right)^2 + \text{I} 2\xi_{z,i} \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right) \right) - r \arg(j\omega) \\ &\quad - \sum_{j=1}^l \arg \left(1 + \text{I} \frac{\omega}{\omega_{n,j}} \right) - \sum_{j=l+1}^n \arg \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n,j}} \right)^2 + \text{I} 2\xi_{n,j} \left(\frac{\omega}{\omega_{n,j}} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.121b)$$

Aus (3.121) erkennt man, dass sich der Amplituden- und Phasengang der Übertragungsfunktion $G(s)$ additiv aus den Amplituden- und Phasengängen der einzelnen Terme zusammensetzt.

Deshalb sollen im Folgenden die einzelnen Terme genauer untersucht werden, wobei für alle Betrachtungen $\omega > 0$ vorausgesetzt wird:

(1) Verstärkungsfaktor $G_1(I\omega) = V$:

$$|G_1|_{\text{dB}} = 20 \log |V| \quad (3.122a)$$

$$\arg(G_1) = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } V > 0 \\ \pm 180^\circ & \text{für } V < 0 \end{cases} \quad (3.122b)$$

(2) Integrierer, Differenzierer $G_2(I\omega) = (I\omega)^r$:

$$|G_2|_{\text{dB}} = 20r \log(\omega) \quad (3.123a)$$

$$\arg(G_2) = 90^\circ r \quad (3.123b)$$

(3) Linearer Term $G_3(I\omega) = \left(1 + I\frac{\omega}{\omega_k}\right)$:

$$|G_3|_{\text{dB}} = 20 \log \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} \ll 1 \\ 3.0103 & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} = 1 \\ 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right) & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} \gg 1 \end{cases} \quad (3.124a)$$

$$\arg(G_3) = \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right) = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} \ll 1 \\ 45^\circ \text{ sign}(\omega_k) & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} = 1 \\ 90^\circ \text{ sign}(\omega_k) & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} \gg 1 \end{cases} \quad (3.124b)$$

(4) Quadratischer Term $G_4(I\omega) = \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2 + I2\xi_k \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)\right)$, $\omega_k > 0$:

$$|G_4|_{\text{dB}} = 20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_k \frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} \right) \quad (3.125a)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} \ll 1 \\ 40 \log \left(\sqrt{2|\xi_k|}\right) & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} = 1 \\ 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right) & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} \gg 1 \end{cases}$$

$$\arg(G_4) = \arctan \left(\frac{2\xi_k \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} \right) \quad (3.125b)$$

$$= \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} \ll 1 \\ 90^\circ \text{ sign}(\xi_k) & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} = 1 \\ 180^\circ \text{ sign}(\xi_k) & \text{für } \frac{\omega}{\omega_k} \gg 1 \end{cases}$$

Man erkennt aus (3.124) bzw. (3.125), dass bei einem linearen Term bzw. einem quadratischen Term im Zähler (Nenner) der Amplitudengang für $\omega \gg \omega_k$ mit 20 dB/Dekade bzw. 40 dB/Dekade steigt (abfällt) und für $\omega \ll \omega_k$ der Amplitudengang konstant 0 dB

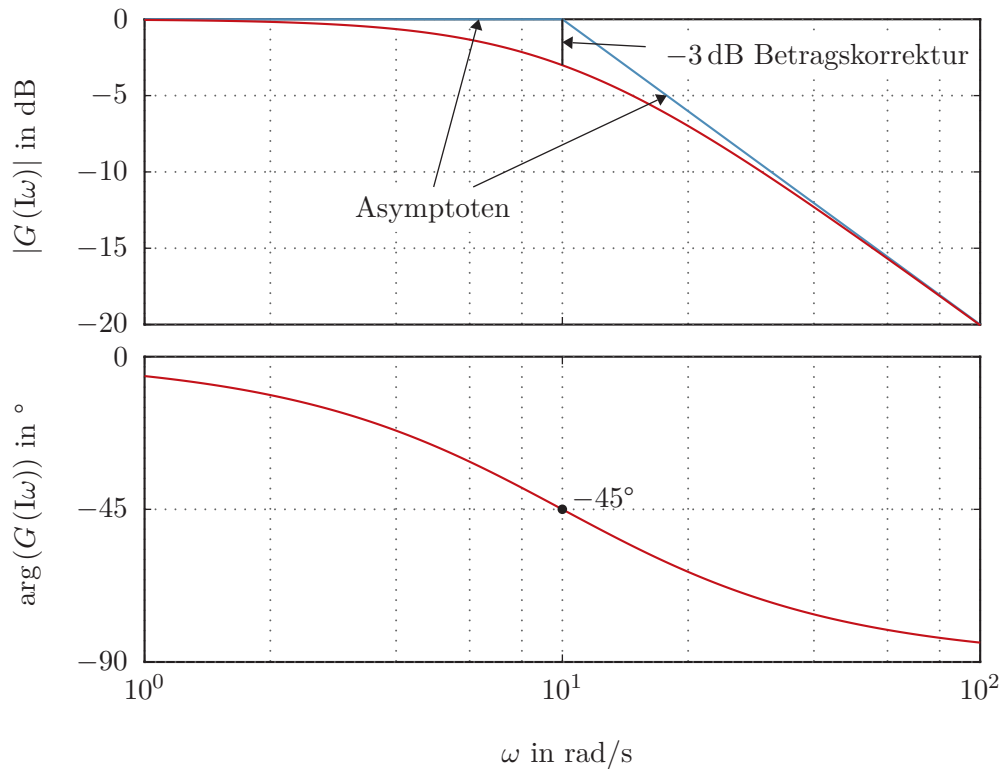


Abbildung 3.16.: Bode-Diagramm für einen linearen Term im Nenner.

beträgt. Beim Zeichnen der Betragsgänge wird nun oftmals der exakte Verlauf um ω_k vernachlässigt und durch die so genannten *Asymptoten* angenähert (siehe Kapitel 4 von Signale und Systeme 1). Abbildung 3.16 zeigt dies beispielsweise für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{10}}. \quad (3.126)$$

Aufgabe 3.28. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm von $G(s) = s^r$ für verschiedene $r \in \mathbb{Z}$.

Das Bode-Diagramm eines quadratischen Terms im Nenner für verschiedene Dämpfungsgrade ξ wird in Abbildung 3.17 anhand der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi\left(\frac{s}{10}\right) + \left(\frac{s}{10}\right)^2} \quad (3.127)$$

für $\xi = 0.01, 0.1, 0.5$ und 1 gezeigt.

Die Eigenschaft, dass sich der Amplituden- und Phasengang einer allgemeinen Übertragungsfunktion $G(s)$ gemäß (3.121) als Summe der Amplituden- und Phasengänge der einzelnen Teile von $G(s)$ zusammensetzt, wird im Weiteren zur Konstruktion des Bode-Diagramms von $G(s)$ gezielt genutzt. Als Beispiel betrachte man die Übertragungsfunktion

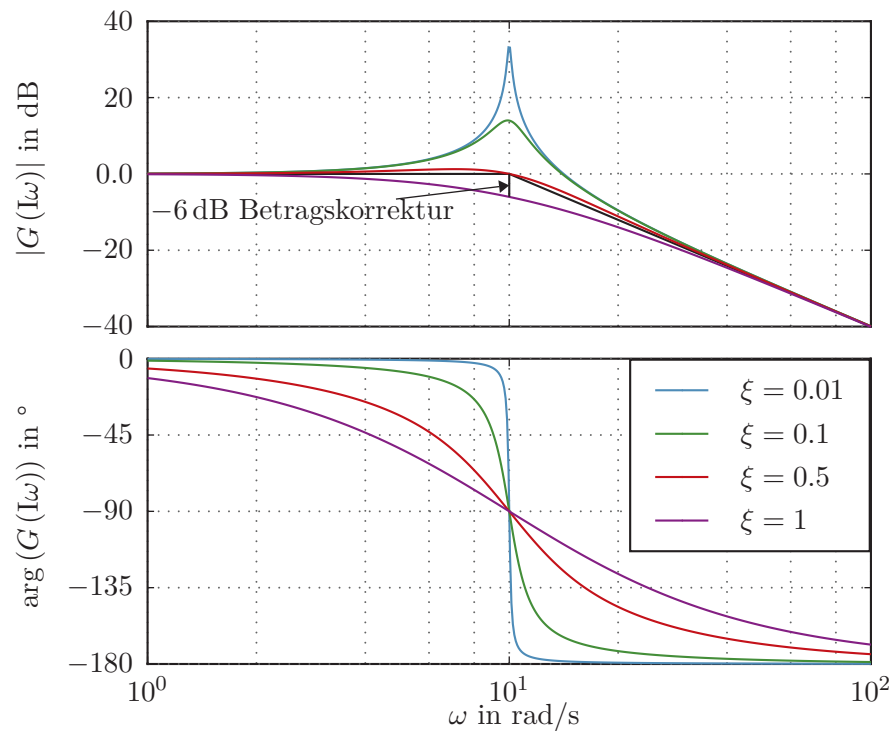


Abbildung 3.17.: Bode-Diagramm eines quadratischen Terms im Nenner für verschiedene Dämpfungsgrade.

tion

$$G(s) = -10^{-2} \frac{(s - 10)}{s(s^2 + 0.1s + 0.01)} \quad (3.128)$$

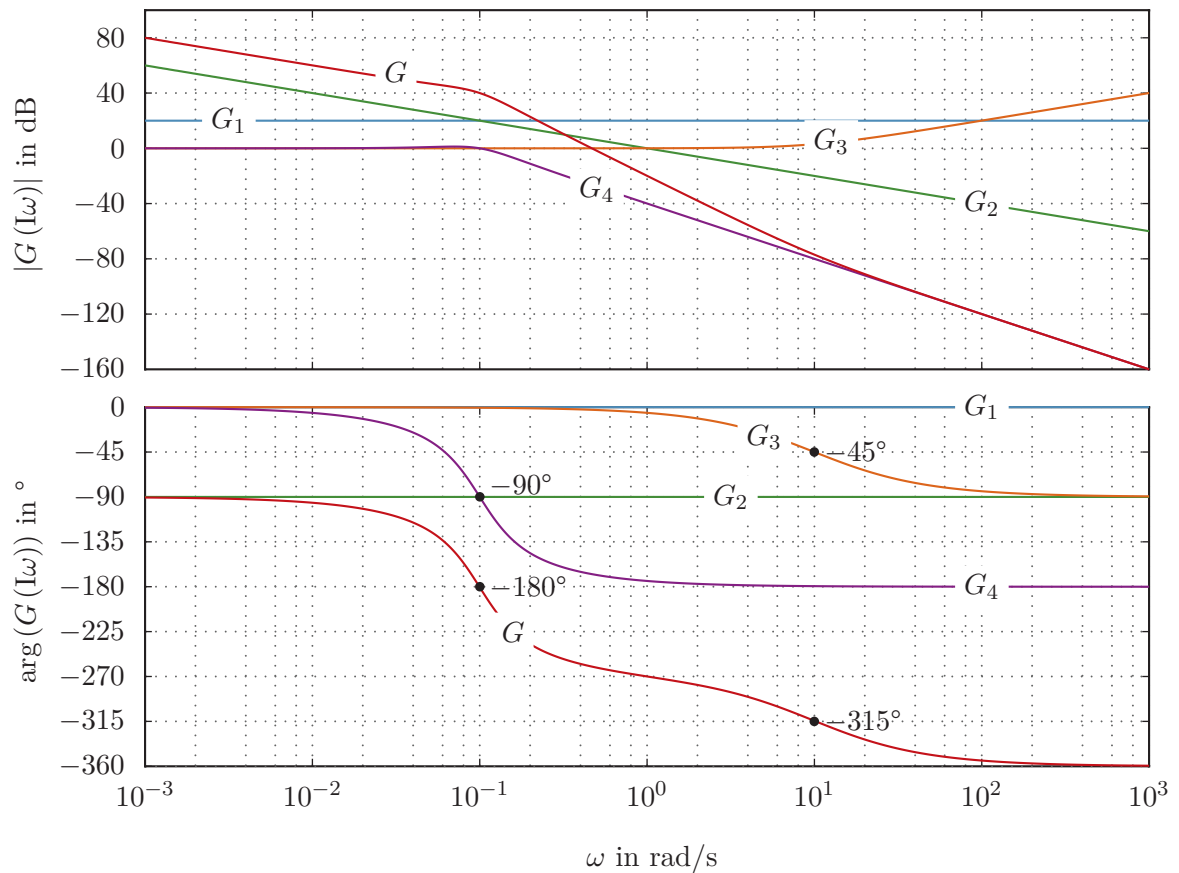
bzw. in normierter Form angeschrieben

$$G(s) = \underbrace{\frac{10^{-2} \cdot 10}{0.01}}_{V=10} \frac{1 - \frac{s}{10}}{s \left(1 + 2\frac{1}{2} \left(\frac{s}{0.1} \right) + \left(\frac{s}{0.1} \right)^2 \right)}. \quad (3.129)$$

Dem bisher Gesagten folgend lässt sich der Amplituden- und Phasengang von $G(s)$ durch Summation der Amplituden- und Phasengänge folgender Teilübertragungsfunktionen

$$G_1 = 10, \quad G_2 = \frac{1}{s}, \quad G_3 = \left(1 - \frac{s}{10} \right), \quad G_4 = \frac{1}{1 + 2\frac{1}{2} \left(\frac{s}{0.1} \right) + \left(\frac{s}{0.1} \right)^2} \quad (3.130)$$

konstruieren (siehe dazu Abbildung 3.18).

Abbildung 3.18.: Bode-Diagramm für $G(s)$ von (3.128).

Aufgabe 3.29. Zeichnen Sie die Bode-Diagramme für die Übertragungsfunktionen

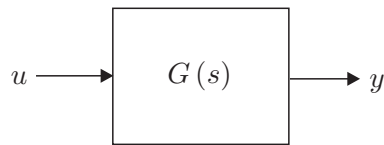
$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad G_3(s) = \frac{s}{s+2},$$

$$G_4(s) = \frac{3}{s}, \quad G_5(s) = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Aufgabe 3.30. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10(s^2 + 0.01s + 1)}{s \left(\left(\frac{s}{8} \right)^2 + 0.02 \left(\frac{s}{8} \right) + 1 \right)}$$

und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit MATLAB (Befehl `bode`).

Abbildung 3.19.: Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion $G(s)$.

Am Ende dieses Teilabschnittes soll noch kurz der Begriff einer *phasenminimalen Übertragungsfunktion* erläutert werden:

Definition 3.6 (Phasenminimale Übertragungsfunktion). Man nennt eine Übertragungsfunktion $G(s)$ *phasenminimal*, wenn alle Pole und Nullstellen von $G(s)$ in der linken offenen s -Halbebene liegen.

Der Name kommt daher, da es für diese Klasse von Systemen möglich ist, den Phasengang allein aus der Kenntnis des Amplitudenganges über die Beziehung

$$\arg(G(j\omega_x)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \log(|G(j\omega)|)}{d \log(\omega)} \ln\left(\coth\left(\left|\frac{u}{2}\right|\right)\right) du, \quad u = \ln\left(\frac{\omega}{\omega_x}\right) \quad (3.131)$$

zu ermitteln, wobei angenommen wird, dass der Verstärkungsfaktor V der Übertragungsfunktion $G(s)$ positiv ist. Man kann sich anhand der Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{1+s}{1+\frac{s}{10}}, \quad G_2(s) = \frac{-(1-s)}{1+\frac{s}{10}}, \quad G_3(s) = \frac{-(1+s)}{1-\frac{s}{10}} \quad (3.132)$$

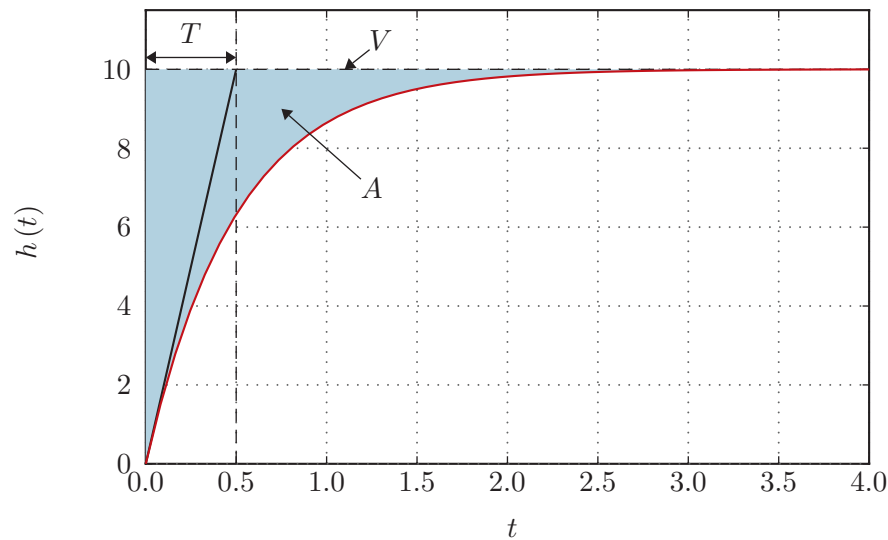
einfach überzeugen, dass die Beziehung (3.131) bei *nicht phasenminimalen Übertragungsfunktionen* nicht mehr gültig ist, da in (3.132) zwar alle Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$ den gleichen Amplitudengang aber vollkommen unterschiedliche Phasengänge aufweisen.

Aufgabe 3.31. Zeichnen Sie die Bode-Diagramme der Übertragungsfunktionen von (3.132).

3.8. Regelungstechnische Übertragungsglieder

Im Folgenden sollen einige, für die Regelungstechnik wichtige Übertragungsglieder erläutert werden. Auf die Bedeutung dieser Übertragungsglieder im Rahmen der Regelung linearer, zeitkontinuierlicher Systeme wird in den nächsten Abschnitten noch näher eingegangen. Als Grundlage aller weiterer Betrachtungen liege die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}$ des jeweiligen Übertragungsgliedes gemäß Abbildung 3.19 zugrunde.

Neben den bisher besprochenen harmonischen Testsignalen sind auch die Antwort eines Systems zufolge eines Einheitssprungs $u(t) = \sigma(t)$ (siehe auch A.6), die so genannte *Sprungantwort* $h(t)$, und die Antwort des Systems auf einen Einheitsimpuls $u(t) = \delta(t)$ (siehe auch A.7), die so genannte *Impulsantwort* $g(t)$, von Bedeutung.

Abbildung 3.20.: Sprungantwort eines P-T₁-Gliedes.

3.8.1. Verzögerungsglied 1-ter Ordnung (P-T₁-Glied)

Die Übertragungsfunktion eines Verzögerungsgliedes 1-ter Ordnung lautet

$$G(s) = \frac{V}{1 + sT} \quad (3.133)$$

mit dem Verstärkungsfaktor (Beiwert) V und der Zeitkonstanten $T > 0$. Die Nyquist-Ortskurve und das Bode-Diagramm eines P-T₁-Gliedes sind den Abbildungen 3.14 und 3.16 zu entnehmen. Die Sprungantwort errechnet sich allgemein zu

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \frac{1}{s} \right\} = V \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \sigma(t) \quad (3.134)$$

und die zugehörige Impulsantwort lautet

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ G(s) \} = \frac{d}{dt} h(t) = \frac{V}{T} e^{-\frac{t}{T}} \sigma(t) . \quad (3.135)$$

Abbildung 3.20 zeigt den Verlauf der Sprungantwort der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10}{1 + \frac{s}{2}} . \quad (3.136)$$

Aufgabe 3.32. Berechnen Sie für ein allgemeines P-T₁-Glied (3.133) die in Abbildung 3.20 grau hinterlegte Fläche.

Lösung von Aufgabe 3.32. Die Fläche berechnet sich zu $A = VT$.

Aufgabe 3.33. Berechnen Sie mit Hilfe des Anfangswertsatzes der Laplace-Transformation (siehe Anhang A) die Steigung k_0 der Sprungantwort zum Zeitpunkt $t = 0$.

Lösung von Aufgabe 3.33. $k_0 = \frac{V}{T}$

3.8.2. Verzögerungsglied 2-ter Ordnung (P-T₂-Glied)

Die Übertragungsfunktion eines Verzögerungsgliedes 2-ter Ordnung lautet

$$G(s) = \frac{V}{1 + 2\xi(sT) + (sT)^2} \quad (3.137)$$

mit dem Verstärkungsfaktor V , der Zeitkonstanten $T > 0$ und dem Dämpfungsgrad $0 \leq \xi < 1$. Das Bode-Diagramm eines P-T₂-Gliedes für verschiedene Dämpfungsgrade ξ ist Abbildung 3.17 zu entnehmen. Die Sprungantwort ergibt sich in allgemeiner Form zu

$$h(t) = V \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \left(\xi \sin \left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{T} \right) + \sqrt{1-\xi^2} \cos \left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{T} \right) \right) e^{-\xi \frac{t}{T}} \right) \sigma(t) \quad (3.138)$$

und die Impulsantwort lautet

$$g(t) = \frac{V}{T\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \frac{t}{T}} \sin \left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{T} \right) \sigma(t) . \quad (3.139)$$

Abbildung 3.21 zeigt den Verlauf der Sprungantwort der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{5}{1 + 2\xi \left(\frac{s}{10} \right) + \left(\frac{s}{10} \right)^2} \quad (3.140)$$

für die verschiedenen Dämpfungsgrade $\xi = 0.01, 0.1, 0.5$ und 0.9 .

Aufgabe 3.34. Berechnen Sie allgemein für die Sprungantwort $h(t)$ von (3.138) die so genannten *Hüllkurven* $\theta_{1/2}(t)$ wie sie für die Sprungantwort der Übertragungsfunktion $G(s)$ von (3.140) dargestellt sind.

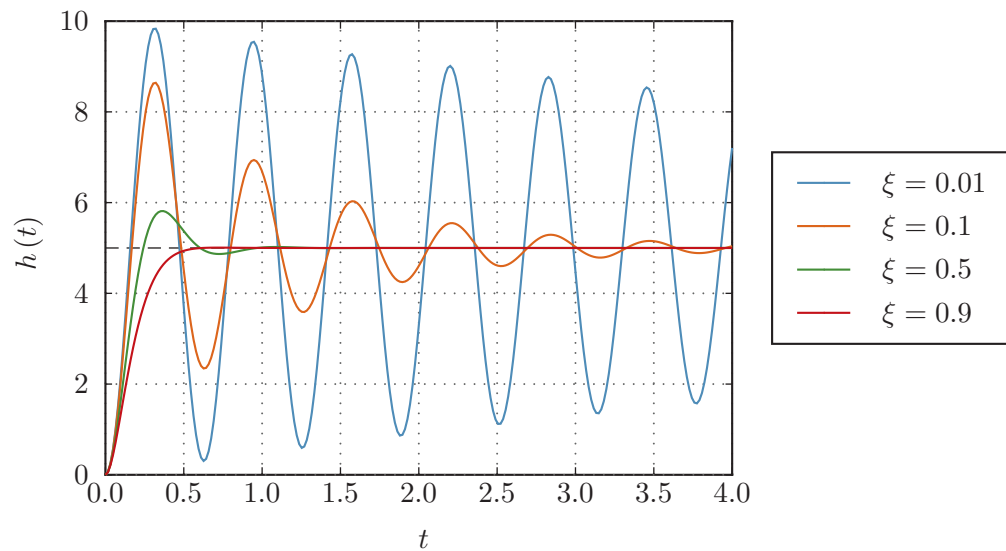
Lösung von Aufgabe 3.34. Die Hüllkurven lauten

$$\theta_{1/2}(t) = V \left(1 \pm \frac{e^{-\xi \frac{t}{T}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) .$$

3.8.3. Proportional-Glied (P-Glied, P-Regler)

Die Übertragungsfunktion eines Proportional-Gliedes hat die Form

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = V_P . \quad (3.141)$$

Abbildung 3.21.: Sprungantwort eines P-T₂-Gliedes.

Der Name kommt daher, da die Ausgangsgröße $y(t)$ proportional zur Eingangsgröße $u(t)$ ist, es gilt nämlich

$$y(t) = V_p u(t) . \quad (3.142)$$

3.8.4. Integrator (I-Glied, I-Regler)

Die Übertragungsfunktion des Integrators lautet

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{V_I}{s} . \quad (3.143)$$

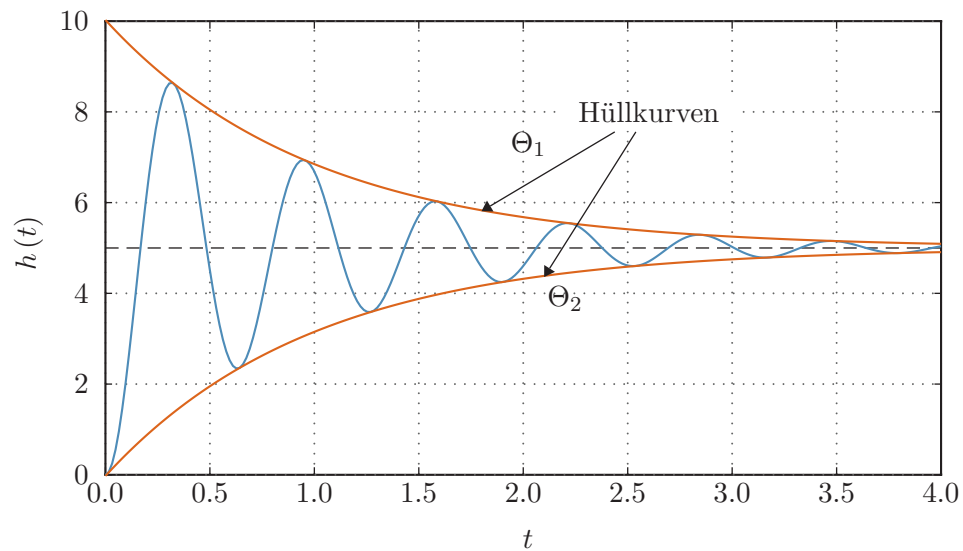
Wie der Name schon sagt, ist die Ausgangsgröße $y(t)$ die integrierte Eingangsgröße $u(t)$, also

$$y(t) = V_I \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad y(0) = 0 . \quad (3.144)$$

Aufgabe 3.35. Berechnen Sie die Sprungantwort des Integrators.

Lösung von Aufgabe 3.35. $h(t) = V_I t \sigma(t)$

Aufgabe 3.36. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve des Integrators.

Abbildung 3.22.: Die Hüllkurven der Sprungantwort eines P-T₂-Gliedes.

3.8.5. Proportional-Integral-Glied (PI-Glied, PI-Regler)

Die Parallelschaltung eines Proportional-Gliedes und eines Integrators ergibt das Proportional-Integral-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{V_I(1 + sT_I)}{s} = \frac{V_I}{s} + \underbrace{V_I T_I}_{V_P} \quad (3.145)$$

mit $T_I > 0$. Die Ausgangsgröße $y(t)$ ergibt sich in diesem Fall zu

$$y(t) = V_I \int_0^t u(\tau) d\tau + V_I T_I u(t), \quad y(0) = V_I T_I u(0) . \quad (3.146)$$

Aufgabe 3.37. Berechnen Sie die Sprungantwort des Proportional-Integral-Gliedes.

Lösung von Aufgabe 3.37. $h(t) = (V_I t + V_I T_I) \sigma(t)$

Aufgabe 3.38. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve des Proportional-Integral-Gliedes.

Die Operationsverstärkerschaltung von Abbildung 1.6 gibt eine schaltungstechnische Realisierung eines Proportional-Integral-Gliedes an.

Aufgabe 3.39. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}$ der Operationsverstärkerschaltung von Abbildung 1.6 und drücken Sie die Parameter V_I und T_I von (3.145) als Funktion der Bauteile R_1 , R_2 und C aus.

Lösung von Aufgabe 3.39. Aus der Übertragungsfunktion $G(s) = -\frac{1+sR_2C}{sR_1C}$ erhält man unmittelbar $V_I = -\frac{1}{R_1C}$ und $T_I = R_2C$.

3.8.6. Differenzierer (D-Glied, D-Regler, D-T₁-Glied)

Die Übertragungsfunktion eines idealen Differenzierers lautet

$$G(s) = V_D s . \quad (3.147)$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass nach Satz 3.6 die Übertragungsfunktion des idealen Differenzierers nicht realisierbar ist.

Aufgabe 3.40. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve des Differenzierers.

Um eine realisierbare Version des Differenzierers zu erhalten, fügt man im Nenner einen so genannten *Realisierungsterm* in der Form

$$G_R(s) = \frac{V_D s}{1 + T_R s} , \quad T_R \ll \quad (3.148)$$

mit $T_R > 0$ hinzu. Ein Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion $G_R(s)$ gemäß (3.148) wird auch als *D-T₁-Glied* bezeichnet.

Wie man aus Abbildung 3.23 für

$$G(s) = 10s \quad (3.149a)$$

$$G_R(s) = \frac{10s}{1 + 0.1s} \quad (3.149b)$$

erkennt, verhält sich $G_R(s)$ natürlich nur noch in einem bestimmten Frequenzbereich, nämlich für $\omega \ll \frac{1}{T_R}$, wie ein Differenzierer.

3.8.7. Proportional-Differential-Glied (PD-Glied, PD-Regler)

Die Übertragungsfunktion des Proportional-Differential-Gliedes hat die Form

$$G(s) = V_P (1 + T_D s) = V_P + \underbrace{V_P T_D}_{V_D} s \quad (3.150)$$

mit $T_D > 0$ und ist nach Satz 3.6 ebenfalls nicht realisierbar.

Aufgabe 3.41. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve des Proportional-Differential-Gliedes.

Fügt man beim Proportional-Differential-Glied analog zu (3.148) einen Realisierungsterm mit $T_R \ll T_D$ hinzu, dann erhält man ein so genanntes Lead-Glied.

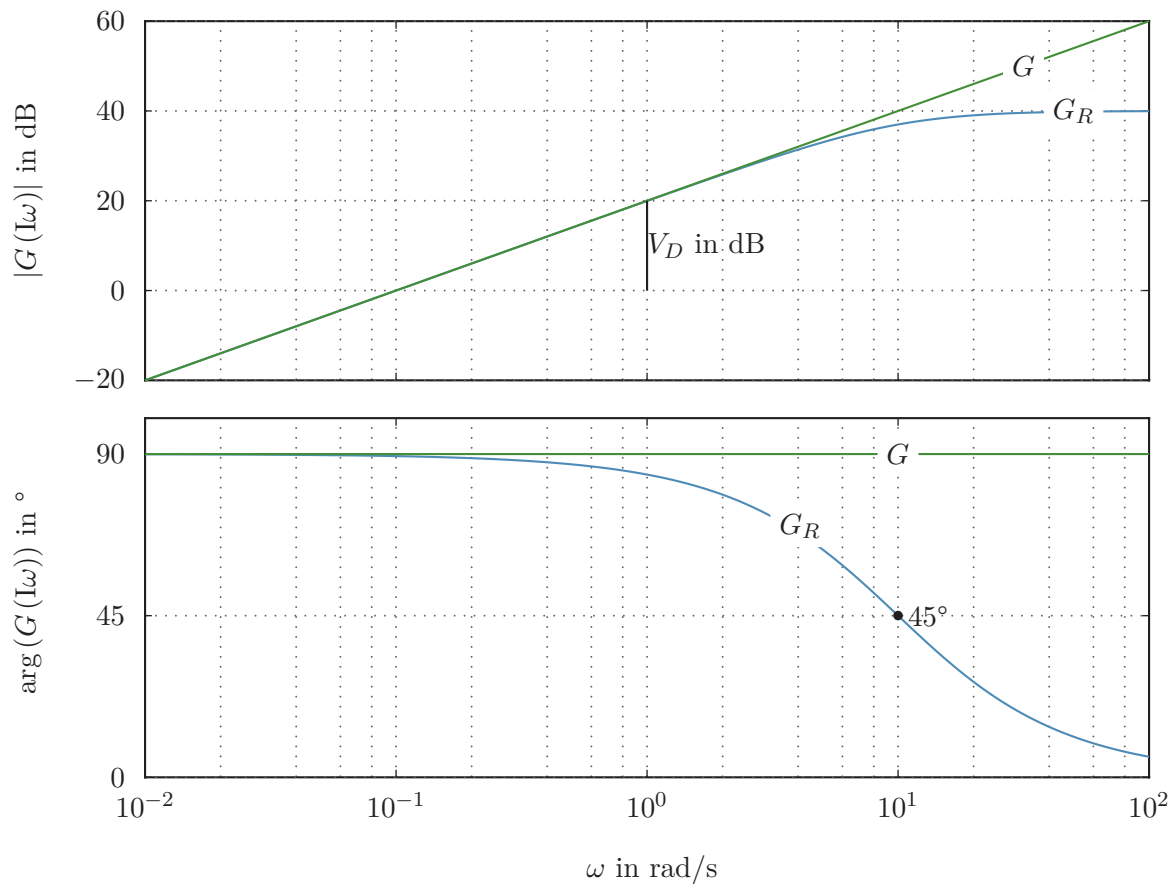


Abbildung 3.23.: Differenzierer mit und ohne Realisierungsterm.

3.8.8. Lead-Glied (PD-T₁-Glied)

Die Übertragungsfunktion des Lead-Gliedes lautet

$$G(s) = V \frac{1 + sT}{1 + s\eta T}, \quad 0 < \eta < 1 \quad (3.151)$$

mit $T > 0$. Die Sprungantwort ergibt sich in allgemeiner Form zu

$$h(t) = V \left(1 + \frac{1 - \eta}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta T}} \right) \sigma(t) . \quad (3.152)$$

Aufgabe 3.42. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve des Lead-Gliedes für $T = V = 1$ und $\eta = 0.1$.

Wie man dem Phasengang des Lead-Gliedes von Aufgabe 3.42 sofort entnehmen kann, bedingt das Lead-Glied in einem bestimmten Frequenzbereich eine Phasenhebung. Deshalb ist die Frage naheliegend, an welcher Frequenz die Phasenhebung des Lead-Gliedes

maximal wird? Dazu berechne man

$$\arg(G(I\omega)) = \arctan(\omega T) - \arctan(\omega\eta T) \quad (3.153)$$

und bestimme jenes $\omega = \omega_{\max}$, für das gilt

$$\frac{d}{d\omega} \arg(G(I\omega)) = \frac{T}{1 + (\omega T)^2} - \frac{T\eta}{1 + (\omega\eta T)^2} = 0. \quad (3.154)$$

Als Lösung von (3.154) erhält man

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\eta}T} \quad (3.155)$$

und damit errechnet sich die maximale Phasenhebung φ_{\max} zu

$$\varphi_{\max} = \arg(G(I\omega_{\max})) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right) - \arctan(\sqrt{\eta}). \quad (3.156)$$

Aufgabe 3.43. Wenn für die Übertragungsfunktion $G(s)$ von (3.151) gilt $\eta > 1$, dann spricht man auch von einem *Lag-Glied* (*PP- T_1 -Glied*). Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve eines Lag-Gliedes für $T = V = 1$ und $\eta = 10$. Berechnen und zeichnen Sie die Sprungantwort dieses Lag-Gliedes.

Aufgabe 3.44. Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze der Laplace-Transformation die Werte der Sprungantwort $h(t)$ des Lead- und Lag-Gliedes zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t \rightarrow \infty$.

Lösung von Aufgabe 3.44. Es gilt $h(0) = \frac{V}{\eta}$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = V$.

3.8.9. Proportional-Differential-Integral-Glied (PID-Glied, PID-Regler)

Kombiniert man das Proportional-Glied, den Integrator und den Differenzierer mit einem Realisierungsterm, so erhält man das Proportional-Differential-Integral-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = V_P \frac{(1 + T_I s)(1 + T_D s)}{s(1 + T_R s)}, \quad T_R \ll \quad (3.157)$$

mit $T_I, T_D, T_R > 0$.

Aufgabe 3.45. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm des Proportional-Differential-Integral-Gliedes (3.157) für $V_P = 10$, $T_I = 1$, $T_D = 10$ und $T_R = 0.1$.

3.8.10. Totzeit-Glied

Wenn durch das System $G(s)$ von Abbildung 3.19 die Eingangsgröße $u(t)$ um eine konstante Zeit T_t nach rechts verschoben wird (vergleiche auch Abbildung 2.3), also die Ausgangsgröße die Form

$$y(t) = u(t - T_t) \quad (3.158)$$

mit $T_t > 0$ annimmt, dann bezeichnet man das System auch als Totzeit-Glied und T_t als *Totzeit*. Nach dem ersten Verschiebungssatz der Laplace-Transformation lautet die zugehörige Übertragungsfunktion

$$G(s) = e^{-sT_t} . \quad (3.159)$$

Solche Totzeit-Glieder treten typischerweise bei Systemen mit Transportvorgängen (z. B. Förderbänder) auf. Es sei aber an dieser Stelle erwähnt, dass bei diesen Systemen die Totzeit T_t sehr häufig nicht konstant ist (beispielsweise zufolge der Abhängigkeit von der Förderbandgeschwindigkeit), sondern sich zeitlich ändert und damit die Formulierung von (3.159) nicht mehr gültig ist.

Aufgabe 3.46. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Nyquist-Ortskurve eines Totzeit-Gliedes.

3.9. Schaltungstechnische Realisierung

Wie man bereits in Abbildung 1.6 gesehen hat, lässt sich das Proportional-Integral-Glied sehr einfach als Operationsverstärkerschaltung realisieren. Es liegt daher die Frage nahe, ob es eine einfache Möglichkeit gibt, für eine vorgegebene Übertragungsfunktion $G(s)$ eine schaltungstechnische Realisierung in Form von Operationsverstärkerschaltungen zu finden? Für die Übertragungsfunktionen wie sie auch im vorigen Abschnitt beschrieben wurden, ist dies sehr einfach möglich. Man betrachte dazu die Operationsverstärkerschaltung in Vierpoldarstellung von Abbildung 3.24.

Mit den Admittanzmatrizen der beiden Vierpol-Netzwerke a und b

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{a,1} \\ \hat{i}_{a,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{a,11}(s) & Y_{a,12}(s) \\ Y_{a,21}(s) & Y_{a,22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{a,1} \\ \hat{u}_{a,2} \end{bmatrix} \quad (3.160a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{b,1} \\ \hat{i}_{b,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{b,11}(s) & Y_{b,12}(s) \\ Y_{b,21}(s) & Y_{b,22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{b,1} \\ \hat{u}_{b,2} \end{bmatrix} \quad (3.160b)$$

sowie den Beziehungen

$$\hat{u} = \hat{u}_{a,1}, \quad \hat{u}_{a,2} = \hat{u}_{b,1} = 0, \quad \hat{i}_{a,2} = -\hat{i}_{b,1} \quad \text{und} \quad \hat{y} = \hat{u}_{b,2} \quad (3.161)$$

folgt unmittelbar die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{\hat{u}_{b,2}}{\hat{u}_{a,1}} = \frac{\hat{i}_{b,1}}{Y_{b,12}(s)} \frac{Y_{a,21}(s)}{\hat{i}_{a,2}} = -\frac{Y_{a,21}(s)}{Y_{b,12}(s)} . \quad (3.162)$$

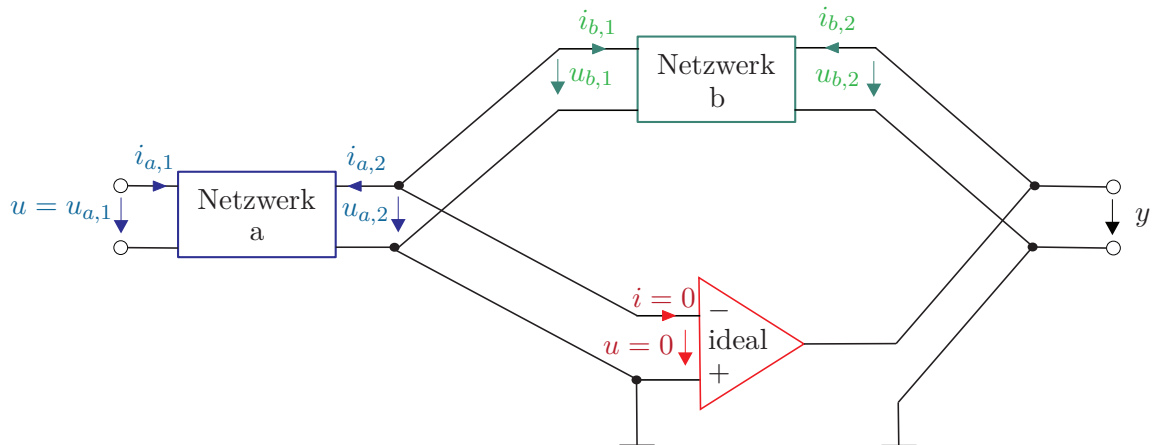
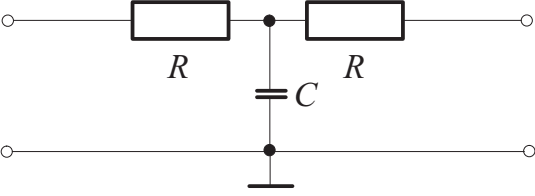
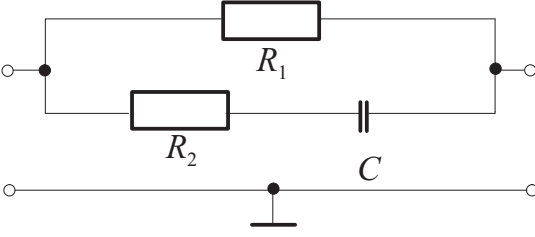
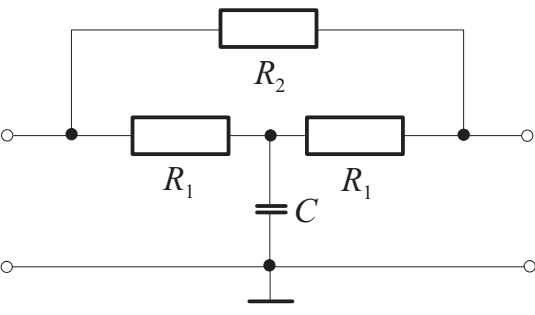


Abbildung 3.24.: Operationsverstärkerschaltung in Vierpoldarstellung.

Da passive *RLC*-Netzwerke reziprok sind, gilt allgemein, dass die Admittanzmatrix symmetrisch ist, d.h. $Y_{12}(s) = Y_{21}(s)$. Der nachfolgenden Tabelle sind die Leitwerte einiger Netzwerke zu entnehmen und damit lassen sich relativ einfach die Operationsverstärkerschaltungsrealisierung verschiedener Übertragungsfunktionen bestimmen.

Schaltung	Y_{12}	Koeffizienten
	$\frac{-1}{R}$	
	$-sC$	
	$-V(1 + sT)$	$V = \frac{1}{R}$ $T = RC$

Schaltung	Y_{12}	Koeffizienten
	$-\frac{V}{(1+sT)}$	$V = \frac{1}{2R}$ $T = \frac{RC}{2}$
	$-V \frac{1+sT}{1+s\eta T}$ $\eta < 1$	$V = \frac{1}{R_1}$ $T = (R_1 + R_2)C$ $\eta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$
	$-V \frac{1+s\eta T}{1+sT}$ $\eta < 1$	$V = \frac{2R_1 + R_2}{2R_1R_2}$ $T = \frac{R_1C}{2}$ $\eta = \frac{2R_1}{2R_1 + R_2}$

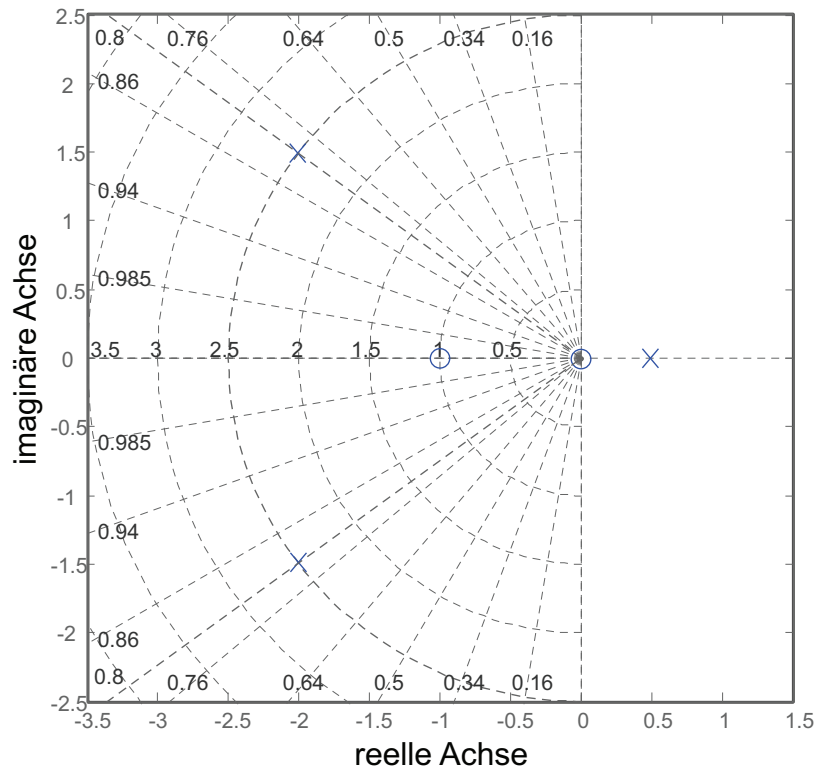
Aufgabe 3.47. Verifizieren Sie die Admittanzen $Y_{12}(s)$ der vorigen Tabelle.

Aufgabe 3.48. Bestimmen Sie mit Hilfe der soeben gezeigten Methode die schaltungstechnische Realisierung eines Lead-, Lag- und eines Proportional-Gliedes sowie eines Integrators.

3.10. Pol-Nullstellen Diagramm

Neben der Möglichkeit, eine Übertragungsfunktion $G(s)$ als Frequenzgang in Form der Nyquist-Ortskurve oder des Bode-Diagramms zu charakterisieren, wird auch sehr oft das so genannte Pol-Nullstellen Diagramm verwendet. Dabei werden die Pole mit einem Kreuz \times und die Nullstellen mit einem Kreis \circ in der komplexen Ebene symbolisiert. Abbildung 3.25 zeigt dies für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10s(s+1)}{(s-0.5)(s^2+4s+6.25)} \quad (3.163)$$

Abbildung 3.25.: Pol-Nullstellen Diagramm der Übertragungsfunktion $G(s)$ von (3.163).

Das Pol-Nullstellen Diagramm von Abbildung 3.25 wurde mit dem Befehl `pzmap` von MATLAB erstellt.

Die Wahl für das von MATLAB eingezeichnete Gitter von Halbkreisen und Strahlen in der linken komplexen Ebene hat folgende Bedeutung. Betrachtet man ein quadratisches Polynom in s in der Form des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion des P-T₂-Gliedes $G(s)$ von (3.137)

$$n(s) = 1 + 2\xi(sT) + (sT)^2 \quad (3.164)$$

und bezeichnet man mit $\lambda = \alpha \pm I\beta$ das zugehörige konjugiert komplexe Nullstellenpaar, dann errechnet sich über die Beziehung

$$n(s) = (s - \alpha - I\beta)(s - \alpha + I\beta) = \frac{1}{T^2} + 2\xi\frac{s}{T} + s^2 \quad (3.165)$$

folgender Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil der Nullstelle und der Zeitkonstanten T bzw. dem Dämpfungsgrad ξ

$$\xi = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{-\text{sign}(\alpha)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}} \quad (3.166)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (3.167)$$

Aus (3.167) erkennt man, dass im Pol-Nullstellen Diagramm Punkte konstanten Dämpfungsgrades, also ξ konstant, auf einem Strahl durch den Nullpunkt mit konstanter Steigung, also $\frac{\beta}{\alpha}$ konstant, liegen. Weiters gilt, dass Punkte konstanter Zeitkonstante, also T konstant oder $\frac{1}{T}$ konstant, im Pol-Nullstellen Diagramm einen Kreis, also $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ konstant, beschreiben. Setzt man voraus, dass $\text{Re}(\lambda) = \alpha < 0$ ist, dann kommt nur die linke komplexe Halbebene in Betracht. Wie man Abbildung 3.25 entnehmen kann, liegt das konjugiert komplexe Polpaar $\lambda = -2 \pm j1.5$ der Übertragungsfunktion (3.163) auf einem Halbkreis mit dem Radius 2.5, was einer Zeitkonstanten $T = 1/2.5 = 0.4$ entspricht, und auf einem Strahl mit der Steigung $\frac{\beta}{\alpha} = \pm 0.75$, was einem Dämpfungsgrad $\xi = \frac{1}{\sqrt{1+0.75^2}} = 0.8$ entspricht.

Aufgabe 3.49. Geben Sie für die Übertragungsfunktion des P-T₂-Gliedes $G(s)$ von (3.137) jene Bereiche im Pol-Nullstellen Diagramm an, in denen die Pole liegen müssen, damit folgende Bedingungen $0.5 \leq \xi \leq 0.7$ und $0.1 \leq T \leq 0.8$ erfüllt sind.

3.11. Literatur

- [3.1] C. Chen, *Control System Design*. New York: Pond Woods Press, 1987.
- [3.2] DIN 19226 – Teil 1, Leittechnik, *Regelungstechnik und Steuerungstechnik; Allgemeine Grundbegriffe*, 1994.
- [3.3] DIN 19226 – Teil 2, Leittechnik, *Regelungstechnik und Steuerungstechnik; Begriffe zum Verhalten dynamischer Systeme*, 1994.
- [3.4] S. W. Director und R. A. Rohrer, *Introduction to Systems Theory*. New York: McGraw-Hill, 1972.
- [3.5] T. Kailath, *Linear Systems*. New York: Prentice Hall, 1980.
- [3.6] G. Ludyk, *Theoretische Regelungstechnik 1*. Berlin Heidelberg: Springer, 1995.
- [3.7] L. Padulo und M. A. Arbib, *System Theory*. Philadelphia: W.B. Saunders Company, 1974.
- [3.8] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer, 1991.
- [3.9] C. Rohrs, J. L. Melsa und D. G. Schultz, *Linear Control Systems*. New York: McGraw-Hill, 1993.
- [3.10] W. J. Rugh, *Linear System Theory*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.