

4. Der Regelkreis

Abbildung 4.1 zeigt die wesentlichen Komponenten eines Regelkreises. Unter der *Strecke* (*plant*) versteht man dabei das zu regelnde System, welches über den *Aktor* (*actuator*) mittels der so genannten *Stellgröße* (*plant input*) $u(t)$ gezielt beeinflusst werden kann. Sehr häufig wird der Aktor nicht separat als Block ausgeführt, sondern ist bereits im Block Strecke beinhaltet. Auf die Strecke wirken im Allgemeinen *externe Störungen* (*disturbances*) $d(t)$, die nicht unserer Kontrolle unterliegen und auch nicht messtechnisch erfassbar sind. Mit Hilfe eines Sensors wird die *Ausgangsgröße* oder *Regelgröße* (*plant output*) $y(t)$ gemessen und das Sensorausgangssignal $\bar{y}(t)$ wird dem *Regler* (*controller*) zur Verfügung gestellt. Der Sensor hat im Allgemeinen einerseits eine nichttriviale Dynamik und andererseits ist dem Messsignal ein *Sensorrauschen* (*sensor noise*) $n(t)$ überlagert, weshalb die beiden Signale $y(t)$ und $\bar{y}(t)$ im allgemeinen Fall nicht gleich sind. Der *Regler* (*controller*) selbst hat als Eingangssignale das so genannte *Führungs- oder Referenzsignal* (*reference input*) $r(t)$ und je nach Reglerstruktur das Messsignal $\bar{y}(t)$ der Ausgangsgröße $y(t)$ – man spricht dann von einer *Ausgangsregelung* (*output feedback control*) – bzw. alle Zustandsgrößen $\mathbf{x}(t)$ der Strecke – man spricht dann auch von einer *Zustandsregelung* (*state feedback control*). In manchen Fällen ist es sogar möglich, die Störung $d(t)$ zu messen, dann kann diese Information im Regelkonzept natürlich vorteilhaft mitberücksichtigt werden. Die drei von außen auf den Regelkreis wirkenden Signale $r(t)$, $d(t)$ und $n(t)$ werden auch als *exogene Eingänge* (*exogenous inputs*) bezeichnet.

Um die einzelnen Begriffe besser zu veranschaulichen, betrachte man als Beispiel die Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2 bestehend aus einem 4-Quadranten dc-dc-Konverter mit Ansterelektronik, einer konstant fremderregten Gleichstrommaschine mit Torsionswelle und Last sowie einem Drehimpulsgeber mit Sensorelektronik.

Aktor: Der Aktor ist im Falle der Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2 der 4-Quadranten dc-dc-Konverter mit Ansterelektronik. Die Schalter S_1 - S_4 werden pulsweitenmoduliert gemäß Abbildung 4.3 angesteuert. Das so genannte *Tastverhältnis* u_T , $0 \leq u_T \leq 1$, entspricht dabei dem Verhältnis der Einschaltzeit der Schalter S_1 und S_3 zur Modulationsperiodendauer T .

Setzt man nun voraus, dass die Zwischenkreisspannung u_{ZW} konstant ist (großer Stützkondensator C_{ZW}) und die Schalter S_1 - S_4 ideal sind (unendlich schnell und verlustlos), dann errechnet sich die Ankerspannung u_A im Mittel zu

$$u_A = u_{ZW}u_T + (-u_{ZW})(1 - u_T) = u_{ZW}(2u_T - 1) = u_{ZW}u_{T,n} \quad (4.1)$$

mit dem normierten Tastverhältnis $u_{T,n} = 2u_T - 1$, $-1 \leq u_{T,n} \leq 1$. Nach Abbildung 4.1 entspricht also das normierte Tastverhältnis $u_{T,n}$ der Stellgröße u und die Ankerspannung u_A der Aktorausgangsgröße \bar{u} . Der Aktor lässt sich damit in unserem Fall als reines

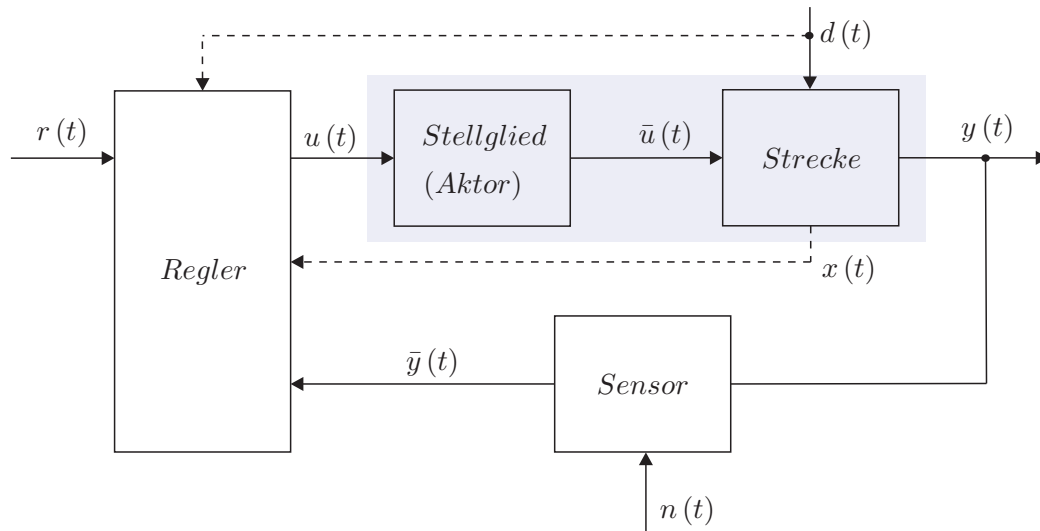


Abbildung 4.1.: Komponenten eines Regelkreises.

Proportionalglied

$$\bar{u} = u_{Zwu} \quad (4.2)$$

beschreiben.

Regelstrecke: Für die Gleichstrommaschine setzte man folgende Modellannahmen voraus:

- Die räumlich verteilten Wicklungen können als konzentrierte Induktivitäten in den jeweiligen Wicklungsachsen modelliert werden,
- der Erregerstrom i_F sei konstant und dementsprechend gilt für die induzierte Spannung $u_{ind} = kL_F i_F \omega_1 = k_A \omega_1$ und für das elektrische Moment $M_{el} = kL_F i_F i_A = k_A i_A$ mit der Konstanten $k_A = kL_F i_F$,
- der Widerstand R_A ist konstant,
- es werden keine Eisenverluste und keine Sättigungserscheinungen berücksichtigt,
- die Kommutierung werde als ideal vorausgesetzt (keine Drehmomentenwelligkeit).

Damit errechnet sich das mathematische Modell der Regelstrecke in Form der Zustandsdifferentialgleichungen zu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_A \\ \varphi_1 \\ \omega_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_A}{L_A} & 0 & \frac{-k_A}{L_A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_A}{\Theta_G} & \frac{-c_T}{\Theta_G} & \frac{-d_T}{\Theta_G} & \frac{c_T}{\Theta_G} & \frac{d_T}{\Theta_G} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{c_T}{\Theta_L} & \frac{d_T}{\Theta_L} & \frac{-c_T}{\Theta_L} & \frac{-d_T}{\Theta_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ \varphi_1 \\ \omega_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_A} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Theta_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ M_L \end{bmatrix} \quad (4.3a)$$

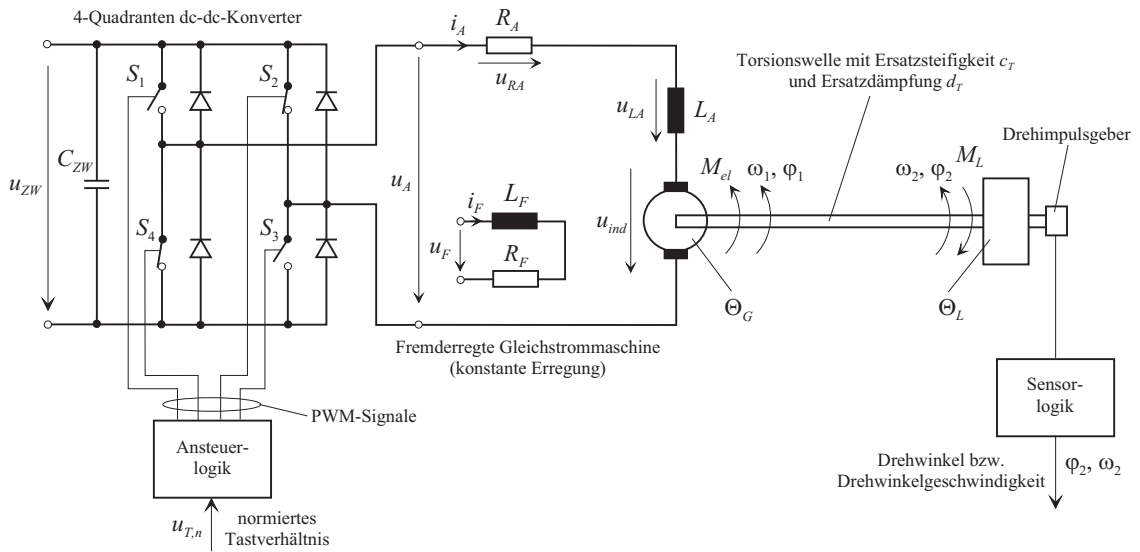


Abbildung 4.2.: Antriebsregelstrecke.

und für ω_2 als Ausgangsgröße erhält man die Ausgangsgleichung

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_A \\ \varphi_1 \\ \omega_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix}. \quad (4.3b)$$

Aufgabe 4.1. Leiten Sie das mathematische Modell (4.3) her. Orientieren Sie sich an Abschnitt 1.4.

Im Sinne des Regelkreises von Abbildung 4.1 entspricht das Lastmoment M_L der Störung d und die Drehwinkelgeschwindigkeit ω_2 der Regelgröße y . Da das System (4.3) linear ist, lässt sich die Ausgangsgröße ω_2 im Laplace-Bereich auch wie folgt

$$\hat{\omega}_2 = G_{u_A, \omega_2}(s) \hat{u}_A + G_{M_L, \omega_2}(s) \hat{M}_L \quad (4.4a)$$

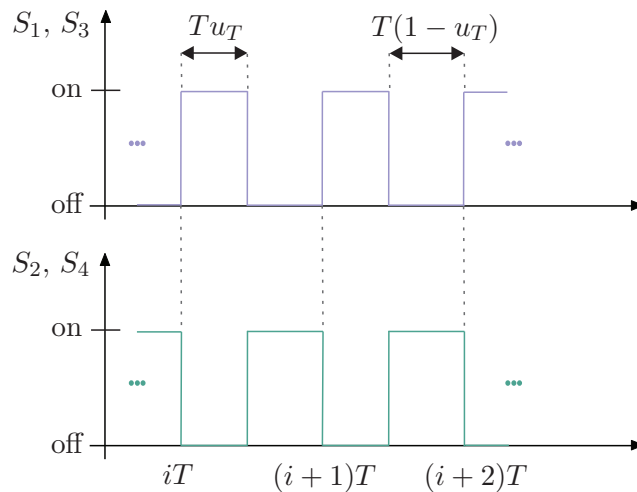


Abbildung 4.3.: Pulsweitenmodulierte Ansteuerung der Schalter S_1 - S_4 des 4-Quadranten dc-dc-Konverters.

mit

$$G_{u_A, \omega_2}(s) = \frac{k_A (sd_T + c_T)}{n(s)} \quad (4.4b)$$

$$G_{M_L, \omega_2}(s) = - \frac{s^3 L_A \Theta_G + s^2 (L_A d_T + R_A \Theta_G) + s (L_A c_T + R_A d_T + k_A^2) + R_A c_T}{n(s)} \quad (4.4c)$$

$$\begin{aligned} n(s) = & s^4 \Theta_G \Theta_L L_A + s^3 (L_A d_T (\Theta_G + \Theta_L) + R_A \Theta_G \Theta_L) \\ & + s^2 (R_A d_T (\Theta_G + \Theta_L) + L_A c_T (\Theta_G + \Theta_L) + k_A^2 \Theta_L) \\ & + s (R_A c_T (\Theta_G + \Theta_L) + k_A^2 d_T) + k_A^2 c_T \end{aligned} \quad (4.4d)$$

anschreiben.

Sensor: Die Ausgangsgröße der Regelstrecke, die Drehwinkelgeschwindigkeit ω_2 , wird gemäß Abbildung 4.2 mit Hilfe eines Drehimpulsgebers mit nachgeschalteter Sensorauswertelektronik erfasst. Dabei kann vorausgesetzt werden, dass die Sensordynamik so schnell ist, dass sie gegenüber der Streckendynamik vernachlässigbar ist. Das Quantisierungsrauschen des Sensors $n(t)$ hängt dabei im Wesentlichen von der Strichanzahl des Drehimpulsgebers ab.

Mit den bisherigen Überlegungen lässt sich die Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2 als Übertragungssystem, wie in Abbildung 4.4 dargestellt, formulieren.

Für sämtliche numerische Simulationen der Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2

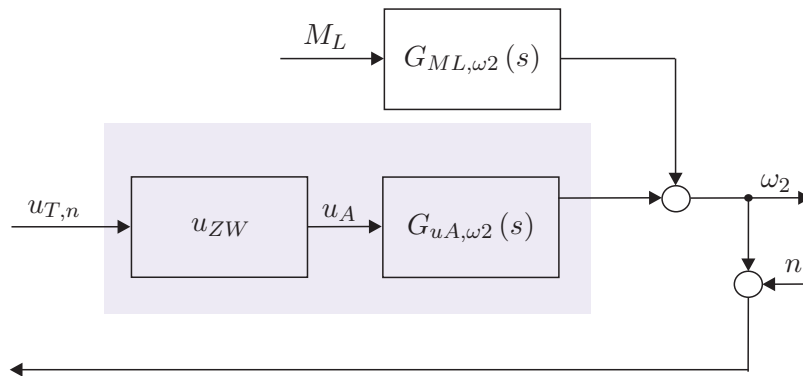


Abbildung 4.4.: Äquivalentes Übertragungssystem zur Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2.

werden folgende Parameter

$$\begin{aligned}
 R_A &= 20 \, \Omega, & L_A &= 15 \cdot 10^{-3} \, \text{H}, & k_A &= 0.9 \frac{\text{Nm}}{\text{A}}, \\
 \Theta_G &= 3.5 \cdot 10^{-3} \, \text{Nm s}^2, & \Theta_L &= 6.3 \cdot 10^{-3} \, \text{Nm s}^2, & c_T &= 0.02 \, \text{Nm}, \\
 d_T &= 0 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}, & u_{ZW} &= 200 \, \text{V}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

verwendet. Für diese Parameter ergeben sich die Übertragungsfunktionen von (4.4) in normierter Form zu

$$G_{u_{T,n},\omega_2}(s) = \frac{222.22}{\left(1 + \frac{s}{11.17}\right) \left(1 + \frac{s}{1321.66}\right) \left(1 + 2 \times 0.138 \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2\right)} \tag{4.6a}$$

bzw.

$$G_{M_L,\omega_2}(s) = -24.69 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.517}\right)}{\left(1 + 2 \times 0.138 \left(\frac{s}{1.82}\right) + \left(\frac{s}{1.82}\right)^2\right)}. \tag{4.6b}$$

4.1. Aufgaben der Regelung

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird im Weiteren vorausgesetzt, dass die Dynamik des Sensors nach Abbildung 4.1 vernachlässigt werden kann. Sämtliche nachfolgende Betrachtungen bleiben aber auch bei nichttrivialer Sensordynamik gültig, doch werden die einzelnen Ausdrücke komplizierter. Da nur lineare, zeitinvariante Systeme in Betracht kommen, kann der allgemeine Regelkreis von Abbildung 4.1 als Übertragungssystem gemäß Abbildung 4.5 dargestellt werden (man vergleiche dazu auch Abbildung 4.4).

Weiters ist in Abbildung 4.5 die Abweichung $\Delta G(s)$ von der nominellen Übertragungsfunktion $G(s)$, die beispielsweise durch Veränderungen der Streckenparameter (*Parametervariationen*) oder durch nichtmodellerte Dynamik verursacht werden, eingezeichnet.

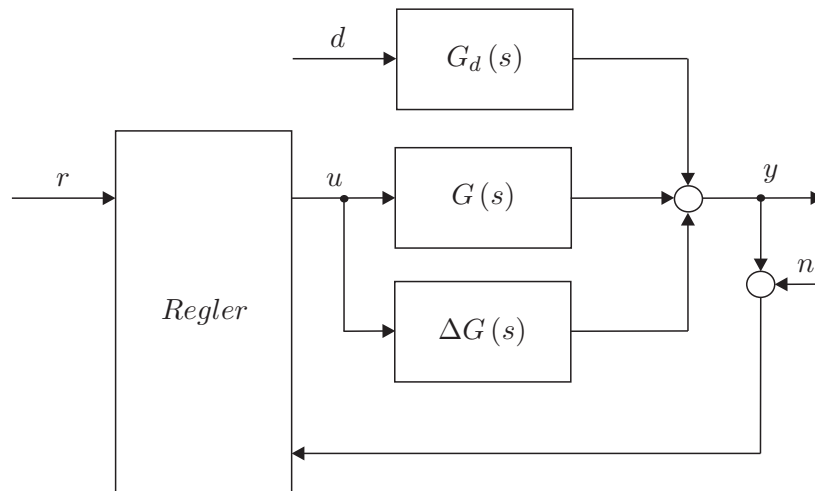


Abbildung 4.5.: Regelkreis als Übertragungssystem.

Die Ausgangsgröße y ergibt sich dann für $\Delta G(s) = 0$ im Laplace-Bereich zu

$$\hat{y} = T_{r,y}(s) \hat{r} + T_{d,y}(s) \hat{d} + T_{n,y}(s) \hat{n} \quad (4.7)$$

mit der *Führungsübertragungsfunktion* $T_{r,y}(s)$, der *Störübertragungsfunktion* $T_{d,y}(s)$ und der Übertragungsfunktion des Messfehlers (Sensorrauschens) $T_{n,y}(s)$.

Die wesentlichen Aufgaben der Regelung sind folgende:

- (1) Stabilisierung einer instabilen Strecke,
- (2) das Ausgangssignal $y(t)$ soll dem Referenzsignal $r(t)$ möglichst gut folgen (*Führungsregelung*),
- (3) der Einfluss der Störung $d(t)$ auf das Ausgangssignal $y(t)$ soll möglichst gut unterdrückt werden (*Störregelung*),
- (4) die Sensitivität gegenüber Parameterschwankungen der Regelstrecke $\Delta G(s)$ soll möglichst klein gemacht werden,
- (5) die Auswirkung des Messrauschens $n(t)$ auf das Regelverhalten soll möglichst gering gehalten werden.

Die Forderungen (2) - (5) können im Idealfall mathematisch wie folgt

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & T_{r,y}(\mathbb{1}\omega) = 1 \\
 (3) \quad & T_{d,y}(\mathbb{1}\omega) = 0 \\
 (4) \quad & \frac{\Delta T_{r,y}(\mathbb{1}\omega)}{T_{r,y}(\mathbb{1}\omega)} = 0 \\
 (5) \quad & T_{n,y}(\mathbb{1}\omega) = 0
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

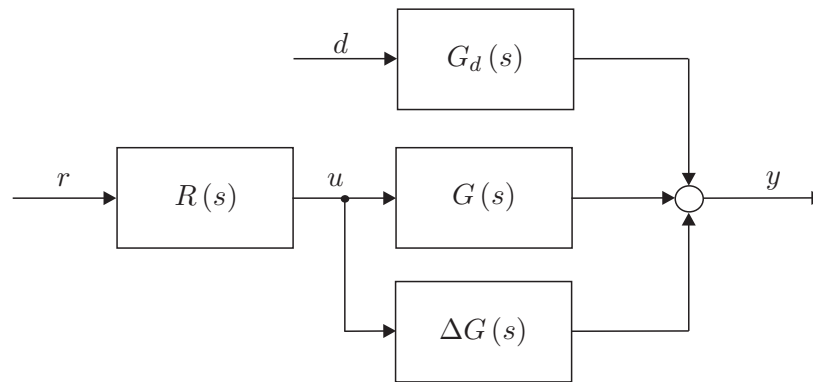


Abbildung 4.6.: Einfache Steuerung.

für alle Frequenzen $\omega \in \mathbb{R}$ formuliert werden.

Da dies praktisch nicht erfüllbar ist, wird (4.8) in der Form modifiziert, dass die Forderungen nur in einem gewissen Frequenzbereich gelten müssen, d. h.,

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & |T_{r,y}(\mathbb{I}\omega) - 1| \ll 1 \\
 (3) \quad & |T_{d,y}(\mathbb{I}\omega)| \ll 1 \\
 (4) \quad & \left| \frac{\Delta T_{r,y}(\mathbb{I}\omega)}{T_{r,y}(\mathbb{I}\omega)} \right| \ll 1 \\
 (5) \quad & |T_{n,y}(\mathbb{I}\omega)| \ll 1
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

für $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$. Im Folgenden soll auf einige unterschiedliche Strukturen von Regelkreisen sowie deren Vor- und Nachteile eingegangen werden. Der eigentliche Entwurf von Reglern wird dann im nächsten Kapitel behandelt.

4.2. Steuerungen

Eine Steuerung ist dadurch gekennzeichnet, dass die Ausgangsgröße y nicht zurückgeführt wird.

4.2.1. Einfache Steuerung

Abbildung 4.6 zeigt eine einfache Steuerung. Man erkennt unmittelbar, dass gilt

$$T_{r,y}(s) = R(s)G(s), \tag{4.10a}$$

$$T_{d,y}(s) = G_d(s), \tag{4.10b}$$

$$\frac{\Delta T_{r,y}(s)}{T_{r,y}(s)} = \frac{\Delta G(s)}{G(s)}. \tag{4.10c}$$

Daraus ergeben sich für eine einfache Steuerung folgende Eigenschaften:

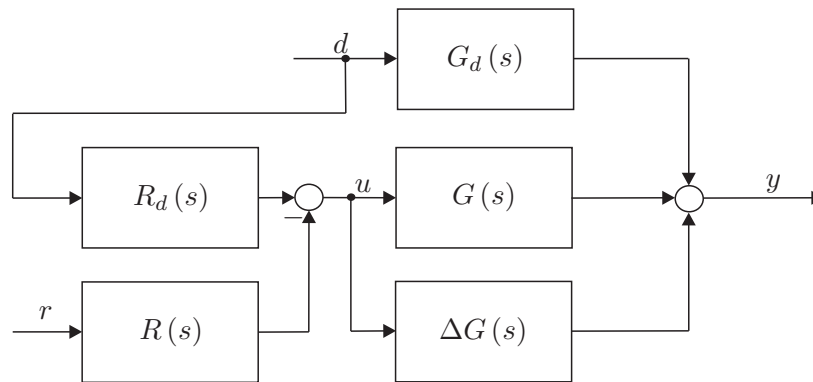


Abbildung 4.7.: Steuerung mit Störgrößenaufschaltung.

- (1) Die Steuerung kann nur für stabile Strecken ($G(s)$, $G_d(s)$ und $R(s)$ müssen BIBO-stabil sein) angewandt werden,
- (2) (✓) die Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$ kann mit Hilfe von $R(s)$ gezielt beeinflusst werden,
- (3) die Störübertragungsfunktion $T_{d,y}(s)$ kann durch $R(s)$ nicht verändert werden,
- (4) die Parameterschwankungen der Strecke $\Delta G(s)$ können in $T_{r,y}(s)$ nicht unterdrückt werden,
- (5) (✓) das Sensorrauschen spielt keine Rolle, da die Ausgangsgröße nicht rückgeführt wird.

Beispiel 4.1 (Simulationsbeispiel). Für die Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2

4.2.2. Steuerung mit Störgrößenaufschaltung

Unter der Annahme, dass die Störung d messbar ist, kann das Störverhalten mit Hilfe einer Störgrößenaufschaltung beeinflusst werden (siehe dazu Abbildung 4.7). Für die einzelnen Übertragungsfunktionen gilt in diesem Fall

$$T_{r,y}(s) = R(s) G(s), \quad (4.11a)$$

$$T_{d,y}(s) = G_d(s) - G(s) R_d(s), \quad (4.11b)$$

$$\frac{\Delta T_{r,y}(s)}{T_{r,y}(s)} = \frac{\Delta G(s)}{G(s)}. \quad (4.11c)$$

Daraus ergeben sich für die Steuerung mit Störgrößenaufschaltung folgende Eigenschaften:

- (1) Die Steuerung kann nur für stabile Strecken ($G(s)$, $G_d(s)$, $R(s)$ und $R_d(s)$ müssen BIBO-stabil sein) angewandt werden,

- (2) (✓) die Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$ kann mit Hilfe von $R(s)$ gezielt beeinflusst werden,
- (3) (✓) die Störübertragungsfunktion $T_{d,y}(s)$ kann durch $R_d(s)$ gezielt verändert werden,
- (4) die Parameterschwankungen der Strecke $\Delta G(s)$ können in $T_{r,y}(s)$ nicht unterdrückt werden,
- (5) (✓) das Sensorrauschen spielt keine Rolle, da die Ausgangsgröße nicht rückgeführt wird.

Beispiel 4.2 (Simulationsbeispiel). für die Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2

4.3. Regelungen

Bei einer Regelung wird nun das Ausgangssignal y in den Regelkreis zurückgeführt.

4.3.1. Regelung mit einem Freiheitsgrad

Abbildung 4.8 zeigt einen Regelkreis mit einem Freiheitsgrad. Die zugehörigen Übertragungsfunktionen lauten

$$T_{r,y}(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}, \quad (4.12a)$$

$$T_{d,y}(s) = \frac{G_d(s)}{1 + R(s)G(s)}, \quad (4.12b)$$

$$T_{n,y}(s) = \frac{-R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}, \quad (4.12c)$$

$$\frac{\Delta T_{r,y}(s)}{T_{r,y}(s)} = \frac{\frac{R(s)(G(s)+\Delta G(s))}{1+R(s)(G(s)+\Delta G(s))} - \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)}}{\frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)}} = \frac{1}{1 + (G(s) + \Delta G(s))R(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}. \quad (4.12d)$$

Man erkennt, dass die Reglerübertragungsfunktion $R(s)$ in allen Übertragungsfunktionen vorkommt und so, zumindest prinzipiell, überall eine gezielte Beeinflussung möglich ist.

ad (1) – Stabilität:

Schreibt man $G(s)$, $G_d(s)$ und $R(s)$ in Form der jeweils teilerfremden Zähler- und Nennerpolynome an

$$G(s) = \frac{z_G(s)}{n_G(s)}, \quad (4.13a)$$

$$G_d(s) = \frac{z_{G_d}(s)}{n_{G_d}(s)}, \quad (4.13b)$$

$$R(s) = \frac{z_R(s)}{n_R(s)}, \quad (4.13c)$$

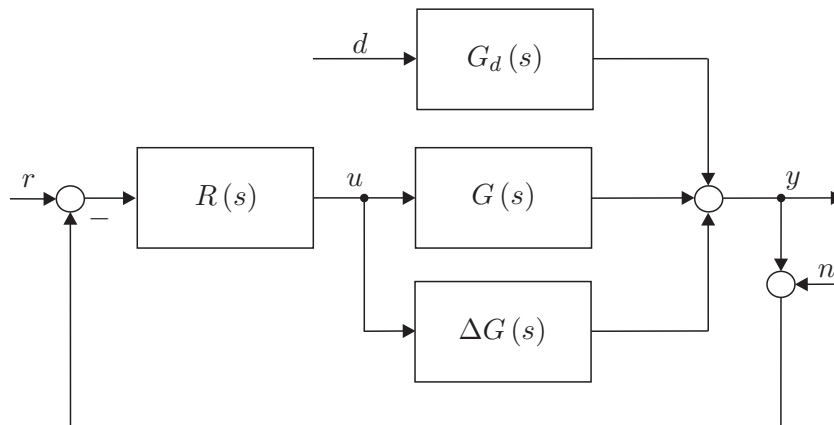


Abbildung 4.8.: Regelung mit einem Freiheitsgrad.

dann erhält man für $T_{r,y}(s)$ bzw. $T_{d,y}(s)$ die Ausdrücke

$$T_{r,y}(s) = \frac{z_G(s) z_R(s)}{z_G(s) z_R(s) + n_G(s) n_R(s)} \quad (4.14a)$$

und

$$T_{d,y}(s) = \frac{z_{G_d}(s) n_R(s) n_G(s)}{(z_G(s) z_R(s) + n_G(s) n_R(s)) n_{G_d}(s)}. \quad (4.14b)$$

Durch geeigneten Entwurf des Reglers $R(s)$ kann also für eine instabile Strecke $G(s)$ ($n_G(s)$ hat zumindest eine Nullstelle s_i mit $\operatorname{Re}(s_i) \geq 0$) eine stabile Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$ (alle Nullstellen von $z_G(s) z_R(s) + n_G(s) n_R(s)$ liegen in der linken offenen s -Halbebene) gefunden werden. Damit die Störübertragungsfunktion $T_{d,y}(s)$ BIBO-stabil ist, muss weiters gelten, dass alle Nullstellen von $n_{G_d}(s)$ in der rechten geschlossenen s -Halbebene entsprechend ihrer Vielfachheit auch Nullstellen von $n_G(s)$ sind. An dieser Stelle ist es wesentlich anzumerken, dass der geschlossene Kreis einer stabilen Strecke auch instabil werden kann. Als Beispiel betrachte man den Regelkreis von Abbildung 4.8 mit

$$G(s) = \frac{s-4}{s^2+s+1}, \quad (4.15a)$$

$$G_d(s) = 1, \quad (4.15b)$$

$$R(s) = 1. \quad (4.15c)$$

Man überzeugt sich leicht, dass in diesem Fall die Führungsübertragungsfunktion

$$T_{r,y}(s) = \frac{s-4}{s^2+2s-3} \quad (4.16)$$

mit den Polstellen bei 1 und -3 nicht BIBO-stabil ist. Als Konsequenz ist zu beachten, dass die Rückkopplung *immer* mit dem *Stabilitätsproblem* verbunden ist.

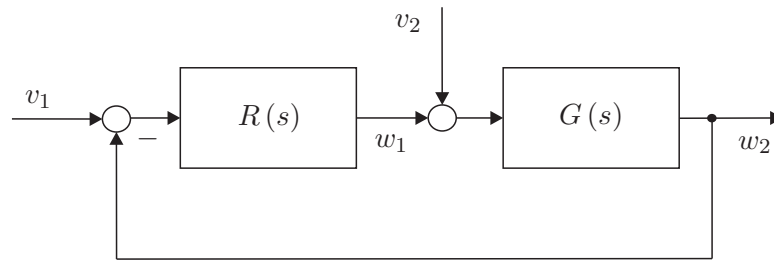


Abbildung 4.9.: Zur internen Stabilität.

Für den Regelkreis von Abbildung 4.8 reicht es nun nicht aus, zu fordern, dass die Übertragungsfunktionen von den Eingängen r , d und n zum Ausgang y BIBO-stabil sind und damit für alle beschränkten Signale r , d und n der Regelkreis mit einem beschränkten Ausgangssignal y antwortet, sondern, dass *sämtliche* im Regelkreis auftretende *interne Größen* beschränkt bleiben. Dies führt nun zum Begriff der *internen Stabilität*.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit liege den nachfolgenden Betrachtungen der Regelkreis von Abbildung 4.9 zugrunde.

Definition 4.1 (Interne Stabilität). Man nennt einen Regelkreis *intern stabil*, wenn sämtliche Übertragungsfunktionen im geschlossenen Kreis BIBO-stabil sind, d. h. für den Regelkreis nach Abbildung 4.9 gilt, dass die Übertragungsfunktionen

$$T_{i,j}(s) = \frac{\hat{w}_i}{\hat{v}_j}, \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (4.17)$$

BIBO-stabil sein müssen.

Zur einfacheren Überprüfung der internen Stabilität lässt sich für den Regelkreis von Abbildung 4.9 folgender Satz angeben:

Satz 4.1 (Interne Stabilität). Der Regelkreis von Abbildung 4.9 ist genau dann *intern stabil*, wenn die zwei Bedingungen

- (A) $1 + R(s)G(s) \neq 0$ für $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ und
- (B) im Produkt $R(s)G(s)$ treten keine Pol/Nullstellenkürzungen für Pole oder Nullstellen s_i mit $\operatorname{Re}(s_i) \geq 0$ auf

erfüllt sind.

Beweis: siehe Anhang C

Aufgabe 4.2. Ist der Regelkreis von Abbildung 4.8 mit

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s^2 - 1}, \\ G_d(s) &= 1, \\ R(s) &= \frac{s - 1}{s + 2} \end{aligned}$$

intern stabil? Berechnen Sie die Führungs- und die Störübertragungsfunktion.

Lösung von Aufgabe 4.2. Der Regelkreis ist nicht intern stabil und die Führungs- und die Störübertragungsfunktion lauten

$$\begin{aligned} T_{r,y}(s) &= \frac{1}{s^2 + 3s + 3}, \\ T_{d,y}(s) &= \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 3s + 3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.3. Zeigen Sie, dass der Regelkreis von Abbildung 4.8 intern stabil ist, wenn einerseits die Bedingungen von Satz 4.1 erfüllt sind und andererseits sämtliche Polstellen von $G_d(s)$ in der rechten geschlossenen s -Halbebene entsprechend ihrer Vielfachheit auch Polstellen von $G(s)$ sind.

ad (2) und (3) – Führungs- und Störverhalten:

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setze man für die nachfolgenden Betrachtungen im Regelkreis von Abbildung 4.8 $G_d(s) = 1$, d. h. die Störung d wirke direkt am Ausgang. Da nahezu jedes physikalische System Tiefpasscharakter aufweist, kann für die Streckenübertragungsfunktion $G(s)$ vorausgesetzt werden, dass der Zählergrad echt kleiner als der Nennergrad ist (*strictly proper*, Satz 3.6). Da der Regler $R(s)$ selbst realisierbar ist (Zählergrad kleiner gleich dem Nennergrad), gilt damit für die Übertragungsfunktion des so genannten *offenen Regelkreises* $L(s) = R(s)G(s)$ die Bedingung

$$|L(j\omega)| \ll 1 \quad \text{für} \quad \omega \gg \omega_C. \quad (4.18)$$

Wird nun der Regler $R(s)$ so entworfen, dass neben der Einhaltung der internen Stabilität die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(s) = R(s)G(s)$ die Bedingung

$$|L(j\omega)| \gg 1 \quad \text{für} \quad \omega \ll \omega_C \quad (4.19)$$

erfüllt, dann erkennt man aus (4.12) mit $G_d(s) = 1$ unmittelbar, dass für die Führungs- und Störübertragungsfunktion

$$T_{r,y}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (4.20a)$$

und

$$T_{d,y}(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (4.20b)$$

folgende Tabelle

Frequenzbereich	Offener Kreis	Führungsverhalten	Störverhalten
$\omega \ll \omega_C$	$ L(\mathbf{I}\omega) \gg 1$	$T_{r,y}(\mathbf{I}\omega) \approx 1$	$T_{d,y}(\mathbf{I}\omega) \approx \frac{1}{L(\mathbf{I}\omega)} \approx 0$
$\omega \gg \omega_C$	$ L(\mathbf{I}\omega) \ll 1$	$T_{r,y}(\mathbf{I}\omega) \approx L(\mathbf{I}\omega)$	$T_{d,y}(\mathbf{I}\omega) \approx 1$

(4.21)

gültig ist.

Die Frequenz ω_C bezeichnet hier und im Folgenden jene Frequenz, bei der die Betragskennlinie des offenen Regelkreises $|L(\mathbf{I}\omega)|_{\text{dB}}$ die 0-dB-Linie schneidet. Man nennt ω_C daher auch *Durchtrittsfrequenz*. Man beachte, dass es in diesem Zusammenhang in der regelungstechnischen Literatur unzählige Definitionen und Begriffe gibt. So wird beispielsweise als *Bandbreite* des Regelkreises jene kleinste Frequenz ω_B bezeichnet, bei der die Betragskennlinie der Führungsübertragungsfunktion $|T_{r,y}(\mathbf{I}\omega)|_{\text{dB}}$ erstmals den Wert von -3 dB annimmt. Da die Frequenzen ω_C und ω_B nahe beieinander liegen, gilt für beide Definitionen, dass im Bereich $\omega \ll \omega_C$ bzw. $\omega \ll \omega_B$ der Regelkreis sowohl ein gutes Führungs- als auch ein gutes Störverhalten aufweist. Abbildung 4.10 zeigt die typischen Bode-Diagramme für $L(s)$, $T_{r,y}(s)$ und $T_{d,y}(s)$.

Stellgröße:

Aus den bisherigen Überlegungen könnte man dazu verleitet werden, zu glauben, dass die Bandbreite des Regelkreises durch einen geeigneten Entwurf des Reglers $R(s)$ beliebig groß gemacht werden kann. Dem wirkt aber entgegen, dass jedes technisch realisierbare Stellglied nur eine begrenzte Stellgröße zur Verfügung stellen kann. Man denke dabei nur an ein Ventil, das nur ganz offen oder ganz geschlossen sein kann, an die Begrenzung einer jeden Spannungsquelle oder an das normierte Tastverhältnis $u_{T,n}$, $-1 \leq u_{T,n} \leq 1$ vom Antriebsregelkreis von Abbildung 4.2. Betrachtet man nämlich die *Stellgrößenübertragungsfunktion*

$$T_{r,u}(s) = -T_{d,u}(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)}, \quad (4.22)$$

dann erkennt man, dass wenn $G(\mathbf{I}\omega)$ in einem Frequenzbereich in dem $|L(\mathbf{I}\omega)|$ groß sein soll (vergleiche Tabelle (4.28)) Tiefpassverhalten aufweist, entsprechend $|R(\mathbf{I}\omega)|$ groß sein muss.

Dies hat aber zur Konsequenz, dass auch $|T_{r,u}(\mathbf{I}\omega)|$ bzw. $|T_{d,u}(\mathbf{I}\omega)|$ und damit die Stellgröße u sehr groß wird. *Beim Entwurf eines Reglers muss daher immer ein Kompromiss zwischen Bandbreite und Stellgröße geschlossen werden.* Im Rahmen von Simulationen wird die Begrenzung des Stellgliedes sehr oft als *Begrenzungs- oder Sättigungskennlinie*, wie in Abbildung 4.11 dargestellt, modelliert. Man beachte, dass wenn die Stellgröße in Sättigung geht, der Regelkreis nichtlinear ist und im Allgemeinen nicht mehr mit linearen Methoden alleinig untersucht werden kann.

ad (4) – Parameterschwankungen: Die Abweichung $\Delta G(s)$ von der nominellen Übertragungsfunktion $G(s)$ kann in Form von so genannten *Störmodellen* erfasst werden und basierend darauf kann man die *Robustheit des Regelkreises* gegenüber Parametervariationen untersuchen. Dieser Zugang soll aber im Rahmen dieser einführenden Vorlesung

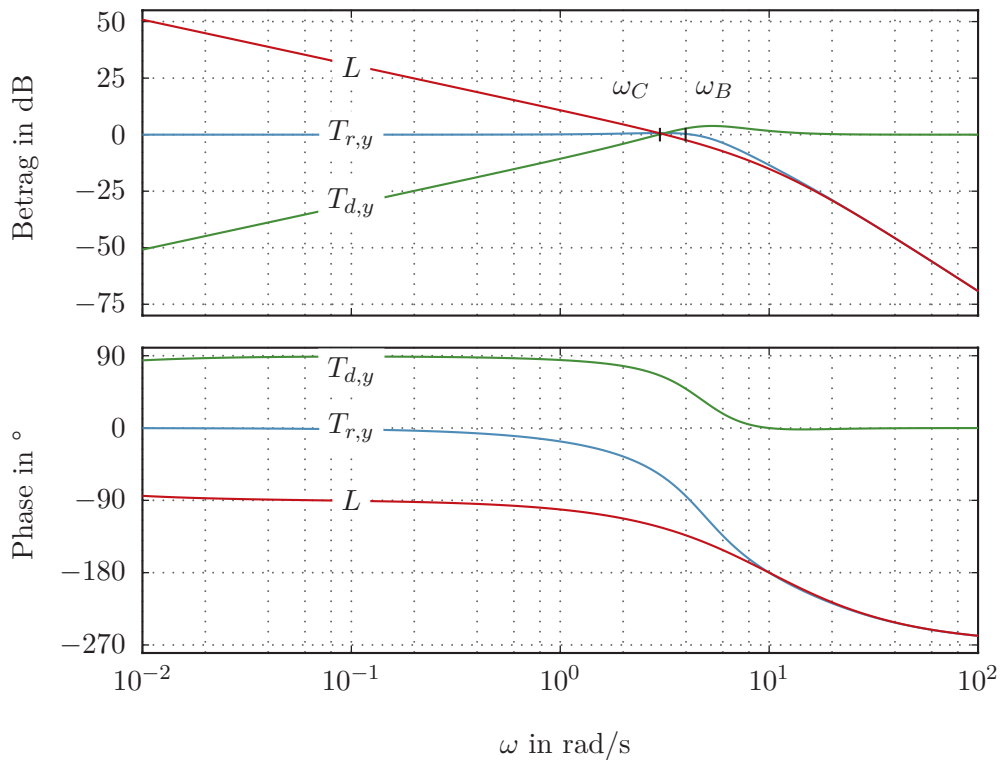


Abbildung 4.10.: Typischer Verlauf der Bode-Diagramme des offenen Kreises, der Führungs- und der Störübertragungsfunktion.

nicht mehr weiter verfolgt werden. Es sei lediglich angemerkt, dass das Verhältnis der relativen Abweichung der Führungsübertragungsfunktion ($\Delta T_{r,y}/T_{r,y}$) zur relativen Abweichung der Streckenübertragungsfunktion ($\Delta G/G$) im Grenzübergang $\Delta G \rightarrow 0$ als *Sensitivitätsfunktion*

$$S = \lim_{\Delta G \rightarrow 0} \frac{\Delta T_{r,y}}{T_{r,y}} \frac{G}{\Delta G} = \frac{dT_{r,y}}{dG} \frac{G}{T_{r,y}} = \frac{1}{1 + RG} \quad (4.23)$$

bezeichnet wird.

Wie man erkennt, entspricht die Sensitivitätsfunktion S der Störübertragungsfunktion $T_{d,y}$ des Regelkreises von Abbildung 4.8 mit $G_d(s) = 1$. Weiters gilt die Beziehung

$$T_{r,y} + T_{d,y} = \frac{RG}{1 + RG} + \frac{1}{1 + RG} = 1, \quad (4.24)$$

weshalb man $T_{r,y}$ sehr oft auch *komplementäre Sensitivitätsfunktion* $T = 1 - S$ nennt.

ad (5) – Sensorrauschen bzw. Messfehler:

Berechnet man in Abbildung 4.8 die Übertragungsfunktionen $T_{n,y}(s)$ und $T_{n,u}(s)$ vom Messrauschen n zur Ausgangsgröße y bzw. vom Messrauschen n zur Stellgröße u , erhält

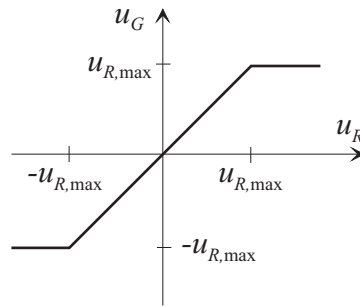


Abbildung 4.11.: Sättigungskennlinie.

man

$$T_{n,y}(s) = \frac{-R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}, \quad (4.25a)$$

$$T_{n,u}(s) = \frac{-R(s)}{1 + R(s)G(s)}. \quad (4.25b)$$

Man sieht unmittelbar aus der Beziehung $T_{n,y}(s) = -T_{r,y}(s)$, dass gutes Führungsverhalten ($T_{r,y}(s) \approx 1$) auch bedingt, dass das Sensorrauschen oder der Messfehler sich direkt auf den Ausgang auswirkt und nicht unterdrückt werden kann. Weiters gilt die Beziehung $T_{n,u}(s) = -T_{r,u}(s) = T_{d,u}(s)$, was zur Konsequenz hat, dass bei großen Verstärkungen der Stellgrößenübertragungsfunktion in einem Frequenzbereich, in dem das Rauschspektrum des Sensorrauschens liegt, das Sensorrauschen entsprechend stark in der Stellgröße verstärkt wird. *Beim Entwurf eines Reglers muss daher immer das Spektrum des Sensorrauschens bei der Wahl der Bandbreite des Regelkreises mitberücksichtigt werden.*

Zusammenfassend ergeben sich für die Regelung mit einem Freiheitsgrad nach Abbildung 4.8 nachfolgende Eigenschaften, wobei entsprechend den bisherigen Überlegungen natürlich nicht alle Forderungen uneingeschränkt erfüllbar sind, sondern immer geeignete den Gegebenheiten angepasste Kompromisse eingegangen werden müssen:

- (1) (✓) Mit Hilfe der Regelung können instabile Strecken stabilisiert werden,
- (2) (✓) die Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$ kann mit Hilfe von $R(s)$ prinzipiell gezielt beeinflusst werden,
- (3) (✓) die Störübertragungsfunktion $T_{d,y}(s)$ kann durch $R(s)$ prinzipiell gezielt verändert werden,
- (4) (✓) die Parameterschwankungen der Strecke $\Delta G(s)$ können in $T_{r,y}(s)$ prinzipiell unterdrückt werden,
- (5) das Sensorrauschen wirkt sich im Bereich guten Führungsverhaltens direkt auf die Ausgangsgröße aus.

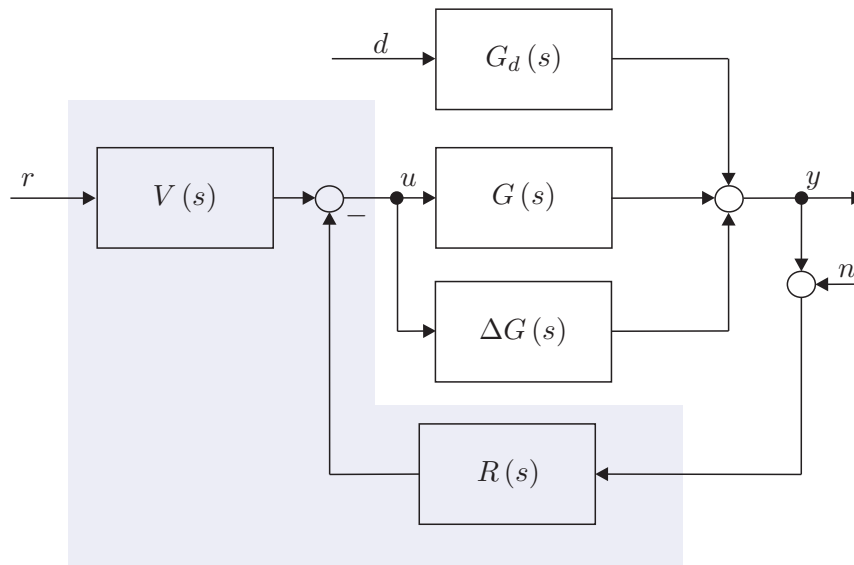


Abbildung 4.12.: Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden.

Beispiel 4.3 (Simulationsbeispiel). für die Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2

4.3.2. Regelung mit zwei Freiheitsgraden

Abbildung 4.12 zeigt einen Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden. Die zugehörigen Übertragungsfunktionen lauten

$$T_{r,y}(s) = \frac{V(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}, \quad (4.26a)$$

$$T_{d,y}(s) = \frac{G_d(s)}{1 + R(s)G(s)}, \quad (4.26b)$$

$$T_{n,y}(s) = \frac{-R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}, \quad (4.26c)$$

$$\frac{\Delta T_{r,y}(s)}{T_{r,y}(s)} = \frac{1}{1 + (G(s) + \Delta G(s))R(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}. \quad (4.26d)$$

Aufgabe 4.4. Zeigen Sie, dass als notwendige Bedingung für die interne Stabilität des Regelkreises von Abbildung 4.12 die Polstellen von $V(s)$ in der rechten geschlossenen s -Halbebene entsprechend ihrer Vielfachheit auch Polstellen von $R(s)$ sein müssen.

Man erkennt direkt durch Vergleich von (4.26) mit (4.12), dass man abgesehen von $T_{r,y}(s)$ die gleichen Übertragungsfunktionen wie beim Regelkreis mit einem Freiheitsgrad von Abbildung 4.8 erhält. Damit gelten für die Eigenschaften des Regelkreises mit zwei Freiheitsgraden die gleichen Aussagen wie im vorigen Abschnitt, lediglich das Führungsverhalten kann zusätzlich mit der Übertragungsfunktion $V(s)$ beeinflusst werden.

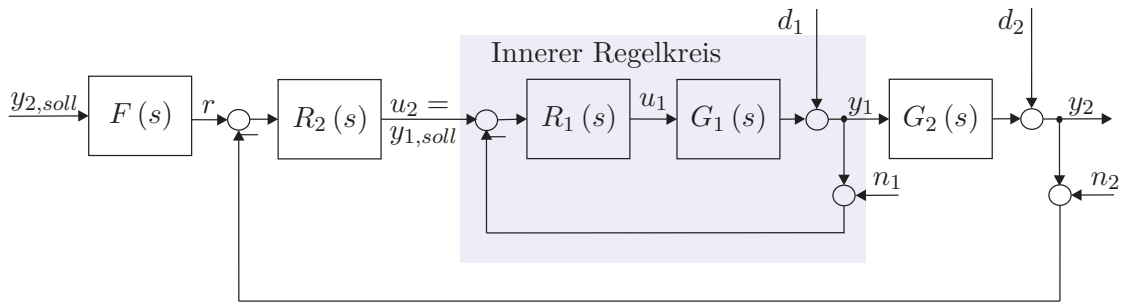


Abbildung 4.13.: Kaskadenregelkreis.

Generell sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Bandbreite des Regelkreises und damit der Aufwand an Stellgröße $u(t)$ im Allgemeinen durch das gewünschte Störverhalten festgelegt wird, da die Störung $d(t)$ per Definition eine nicht beeinflussbare Größe darstellt. Im Gegensatz dazu kann das Führungssignal $r(t)$ gezielt vorgegeben werden. So soll das Führungssignal $r(t)$ nie sprungförmig, d. h. $r(t) = y_{soll}\sigma(t)$, auf den Regelkreis aufgeschaltet werden, obwohl dies oft zum Zwecke der Überprüfung der Dynamik des geschlossenen Kreises so gemacht wird, sondern es soll darauf geachtet werden, dass das Führungssignal hinreichend oft stetig differenzierbar ist.

Dies kann beispielsweise durch Vorschalten eines so genannten Vorfilters $F(s) = \frac{\hat{r}}{\hat{y}_{soll}}$ oder durch Konstruktion eines geeigneten Führungssignals erreicht werden. In der Antriebstechnik werden beispielsweise häufig so genannte Hochlaufführungsvorgaben der Form

$$r(t) = y_{soll} \left(1 - \exp(-kt^2) \right), \quad k > 0 \quad (4.27)$$

verwendet.

4.3.3. Kaskadenregelung

Bei sehr vielen praktischen Regelkreisen, insbesondere in der Antriebstechnik, wird das Konzept der so genannten Kaskadenregelung, wie in Abbildung 4.13 gezeigt, verwendet.

Dies setzt natürlich voraus, dass abgesehen von der eigentlichen Ausgangsgröße y_2 (im Falle der Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2 die Drehwinkelgeschwindigkeit ω_2) auch noch weitere Größe(n) y_1 (im Falle der Antriebsregelstrecke von Abbildung 4.2 beispielsweise der Ankerstrom i_A) messbar sind. Dabei wird in einem ersten Schritt der innerste Regelkreis (in Abbildung 4.13 $R_1(s)$) so entworfen, dass er eine wesentlich größere Bandbreite (ca. 1 Dekade) als der äußere Regelkreis besitzt. Für den äußeren Regelkreis (in Abbildung 4.13 $R_2(s)$) verhält sich dann die Führungsübertragungsfunktion des inneren Regelkreises

$$T_{u_2, y_1}(s) = \frac{R_1(s) G_1(s)}{1 + R_1(s) G_1(s)} \quad (4.28)$$

im interessierenden Frequenzbereich wegen der wesentlich größeren Bandbreite wie eine Durchschaltung $T_{u_2, y_1}(s) \approx 1$. Damit kann nun in einem weiteren Schritt sehr einfach der Regler $R_2(s)$ direkt für die Strecke $G_2(s)$ entworfen werden.

4.4. Stabilitätskriterien

Im Abschnitt 3.6, im Speziellen Satz 3.8, wurde gezeigt, dass eine Übertragungsfunktion $G(s)$ genau dann BIBO-stabil ist, wenn alle Pole in der linken offenen s -Halbebene liegen. Um dies zu überprüfen, müsste man immer die Nullstellen des Nennerpolynoms von $G(s)$ berechnen, was bei Polynomen höherer Ordnung nicht immer numerisch zuverlässig sein muss. Weiters ist zu beachten, dass man eigentlich nicht an der genauen Lage der Polstellen interessiert ist, sondern lediglich wissen will, ob sie alle in der linken offenen s -Halbebene liegen oder nicht.

Definition 4.2 (Hurwitzpolynom). Man nennt ein Polynom

$$n(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^j \quad (4.29)$$

Hurwitzpolynom, wenn alle Nullstellen von $n(s)$ in der linken offenen s -Halbebene liegen bzw. für alle Wurzeln s_i , $i = 1, \dots, n$, gilt $\operatorname{Re}(s_i) < 0$.

Mit Hilfe von so genannten *Stabilitätskriterien* kann man nun feststellen, ob ein Polynom ein Hurwitzpolynom ist, ohne dabei die Wurzeln des Polynoms explizit zu berechnen.

4.4.1. Numerisches Verfahren von Routh-Hurwitz

Allen weiteren Betrachtungen liege ein Polynom der Form (4.29) mit reellen Koeffizienten a_j , $j = 0, \dots, n$, zugrunde. Da das Polynom ausschließlich reelle Koeffizienten besitzt, sind die Nullstellen s_i , $i = 1, \dots, n$, entweder reell oder konjugiert komplex. Damit kann unmittelbar anhand der Koeffizienten eines Polynoms eine notwendige Bedingung für ein Hurwitzpolynom angegeben werden.

Satz 4.2 (Notwendige Bedingung für ein Hurwitzpolynom). Die Koeffizienten a_j , $j = 0, \dots, n$, eines Hurwitzpolynoms $n(s)$ sind alle von Null verschieden und haben gleiches Vorzeichen. Für ein Polynom zweiter Ordnung ist diese Bedingung auch hinreichend.

Aufgabe 4.5. Beweisen Sie Satz 4.2.

Hinweis: Das Polynom $n(s)$ von (4.29) lässt sich auch als Produkt

$$n(s) = a_n \prod_{i=1}^n (s - s_i)$$

mit den Nullstellen s_i , $i = 1, \dots, n$, anschreiben.

Dass Satz 4.2 für Polynome mit einem Grad größer als 2 nur notwendig ist, zeigt nachfolgendes Beispiel

$$n(s) = s^3 + s^2 + 11s + 51 = (s + 3)(s - 1 + 4I)(s - 1 - 4I) . \quad (4.30)$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für ein Hurwitzpolynom $n(s)$ ist durch das so genannte Routh-Hurwitz Verfahren gegeben.

Satz 4.3 (Routh-Hurwitz Verfahren). Ein Polynom $n(s)$ der Form (4.29) mit den reellen Koeffizienten a_j , $j = 0, \dots, n$, ist genau dann ein Hurwitzpolynom, wenn alle Elemente der Pivotspalte des nachfolgenden Routh-Schemas

s^n	$a_{01} = a_n$	$a_{02} = a_{n-2}$	$a_{03} = a_{n-4}$	\dots	
s^{n-1}	$a_{11} = a_{n-1}$	$a_{12} = a_{n-3}$	$a_{13} = a_{n-5}$	\dots	
s^{n-2}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	\dots	
s^{n-3}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	\dots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
s^1	$a_{n-1,1}$	0	0	\dots	
s^0	$a_{n,1}$				
	<i>Pivotspalte</i>				

(4.31)

mit

$$a_{ij} = \frac{a_{i-1,1}a_{i-2,j+1} - a_{i-2,1}a_{i-1,j+1}}{a_{i-1,1}} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n \quad \text{und } j = 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

von Null verschieden sind und gleiches Vorzeichen besitzen.

Auf einen Beweis dieses Satzes wird hier verzichtet, er ist aber in der angeführten Literatur nachzulesen.

Beispiel 4.4. Als Beispiel betrachte man den Regelkreis von Abbildung 4.14 mit

$$R(s) = \frac{K}{s}, \quad (4.33a)$$

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 3s + 9} . \quad (4.33b)$$

Man bestimme den Wertebereich für K so, dass der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist.

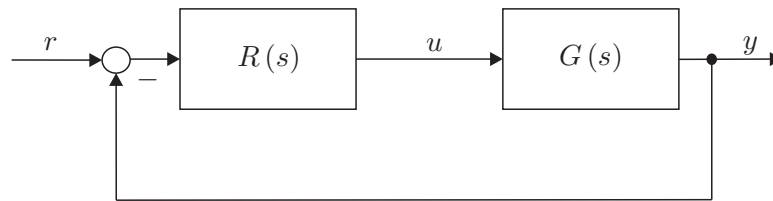


Abbildung 4.14.: Einfacher Regelkreis.

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises lautet

$$T_{r,y}(s) = \frac{RG}{1 + RG} = \frac{9K}{s^3 + 3s^2 + 9s + 9K}. \quad (4.34)$$

Nach Satz 4.2 muss notwendigerweise für den Parameter K gelten $K > 0$. Eine notwendige und hinreichende Bedingung erhält man gemäß Satz 4.3 über das Routh-Schema:

s^3	1	9	0	(4.35)
s^2	3	$9K$	0	
s^1	$\frac{3 \times 9 - 9K \times 1}{9 - 3K} = 9 - 3K$		0	
s^0	$\frac{(9 - 3K)^3}{9 - 3K} = 9K$			
	Pivotspalte			

Da alle Elemente der Pivotspalte von Null verschieden sein und gleiches Vorzeichen haben müssen, folgen die Bedingungen

$$9 - 3K > 0, \quad (4.36a)$$

$$9K > 0, \quad (4.36b)$$

$$0 < K < 3. \quad (4.36c)$$

Aufgabe 4.6. Sind nachfolgende Polynome

$$n_1(s) = s^8 + 7s^7 + 4s^6 - s^5 + 7s^4 + 2s^2 + s + 3$$

$$n_2(s) = s^4 + 9s^3 + 13s^2 + 54s + 40$$

$$n_3(s) = s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 30s + 40$$

Hurwitzpolynome?

Lösung von Aufgabe 4.6. Nur das Polynom $n_2(s)$ ist ein Hurwitzpolynom.

Aufgabe 4.7. Gegeben ist der Regelkreis von Abbildung 4.14 mit

$$R(s) = K,$$

$$G(s) = \frac{(s+T)^2}{s^3}.$$

Bestimmen Sie den Wertebereich der Parameter K und T so, dass der geschlossene Kreis BIBO-stabil ist. Zeichnen Sie den Wertebereich in der (K, T) -Ebene.

Lösung von Aufgabe 4.7. $K > 0$ und $(2K - T)T > 0$

4.4.2. Graphisches Verfahren: Kriterium von Michailow

Unter der *stetigen Winkeländerung* $\Delta \arg(G(I\omega))$ einer rationalen Funktion $G(s)$ versteht man die Änderung von $\arg(G(I\omega))$, wenn ω den Wertebereich $-\infty \leq \omega \leq +\infty$ stetig und monoton wachsend durchläuft. Dabei wird die Winkeländerung *gegen den Uhrzeigersinn positiv* gezählt und Sprünge von $\arg(G(I\omega))$ werden nicht mitberücksichtigt. Abbildung 4.15 zeigt die Ortskurve der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2s-1}{s(s^2+s+1)}. \quad (4.37)$$

Wenn ω stetig von $-\infty$ bis -0 wächst, so ist die stetige Winkeländerung $-3\pi/2$. Der Sprung im $\arg(G(I\omega))$ beim Übergang von -0 zu $+0$ wird vereinbarungsgemäß nicht mitgezählt. Von $+0$ bis $+\infty$ beträgt die Winkeländerung ebenfalls $-3\pi/2$. Es ergibt sich also insgesamt für $G(s)$ von (4.37) eine stetige Winkeländerung $\Delta \arg(G(I\omega)) = -3\pi$.

Aufgabe 4.8. Zeigen Sie, dass die stetige Winkeländerung einer rationalen Funktion $G(s)$ für $-\infty \leq \omega \leq 0$ immer gleich der stetigen Winkeländerung für $+0 \leq \omega \leq +\infty$ ist.

Hinweis: Es gilt $\arg(G(I\omega)) = -\arg G(-I\omega)$.

Das Argument einer rationalen Funktion

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - \alpha_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \beta_i)} \quad (4.38)$$

errechnet sich nun in der Form

$$\arg(G(I\omega)) = \arg(K) + \sum_{i=1}^m \arg(I\omega - \alpha_i) - \sum_{i=1}^n \arg(I\omega - \beta_i) \quad (4.39)$$

und damit ergibt sich die stetige Winkeländerung von $G(s)$ zu

$$\Delta \arg(G(I\omega)) = \sum_{i=1}^m \Delta \arg(I\omega - \alpha_i) - \sum_{i=1}^n \Delta \arg(I\omega - \beta_i). \quad (4.40)$$

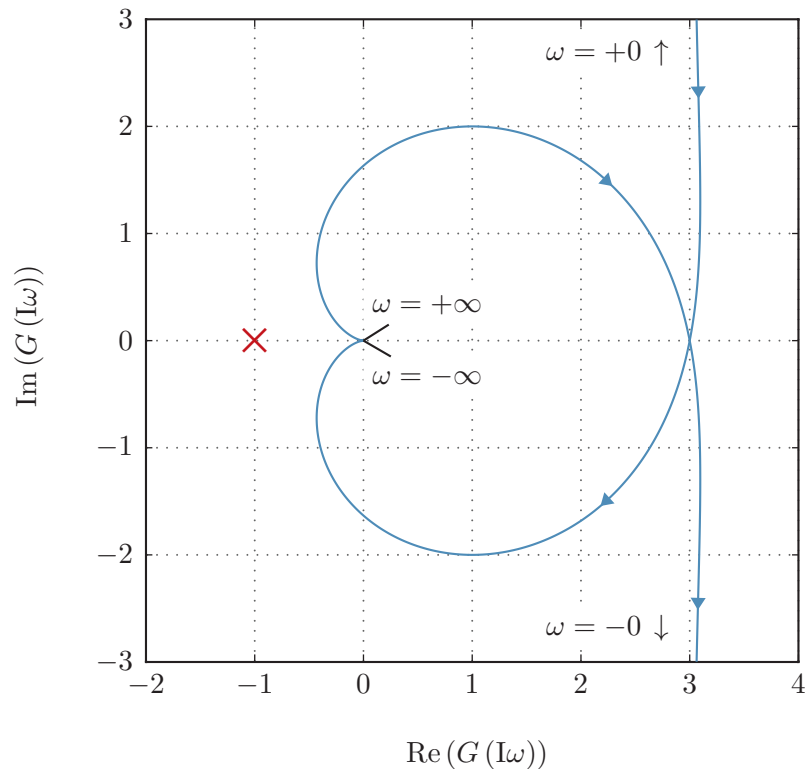


Abbildung 4.15.: Ortskurve zur Übertragungsfunktion (4.37).

Man erkennt also, dass sich die stetige Winkeländerung der rationalen Funktion $G(s)$ aus den stetigen Winkeländerungen der Faktoren $(s - s_i)$ zusammensetzt.

Wie man Abbildung 4.16 sofort entnehmen kann, ergibt sich die stetige Winkeländerung von $(s - s_i)$ zu

$$\Delta \arg(\mathbb{I}\omega - s_i) = \begin{cases} \pi & \text{für } \operatorname{Re}(s_i) < 0 \\ 0 & \text{für } \operatorname{Re}(s_i) = 0 \\ -\pi & \text{für } \operatorname{Re}(s_i) > 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

Damit lässt sich unmittelbar folgender Satz angeben:

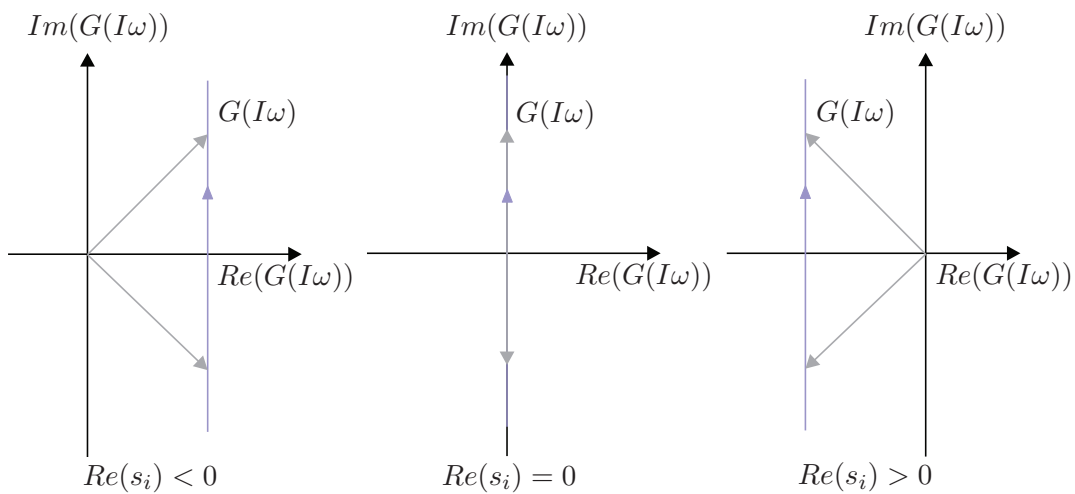
Satz 4.4 (Kriterium von Michailov). *Ein Polynom $n(s)$ vom Grad n ist genau dann ein Hurwitzpolynom, wenn*

$$\Delta \arg(n(\mathbb{I}\omega)) = n\pi \quad (4.42)$$

gilt.

Aufgabe 4.9. Beweisen Sie Satz 4.4.

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung (4.41).

Abbildung 4.16.: Stetige Winkeländerung von $(s - s_i)$.

Aufgabe 4.10. Wenden Sie das Kriterium von Michailow auf die Polynome $n_1(s)$, $n_2(s)$ und $n_3(s)$ von Aufgabe 4.6 an.

4.4.3. Graphisches Verfahren: Nyquist-Kriterium

Das Nyquist-Kriterium ist nun auf Regelkreise der Form nach Abbildung 4.17 zugeschnitten. Dabei wird für alle Betrachtungen vorausgesetzt, dass der Regelkreis *nicht degeneriert* ist, d. h. es gilt $\lim_{s \rightarrow \infty} L(s) \neq -1$. Beim Nyquist-Kriterium wird anhand der Ortskurve

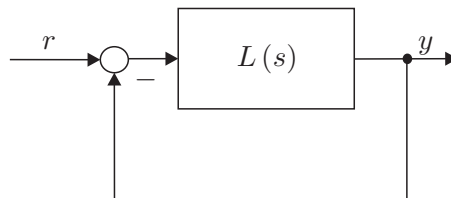


Abbildung 4.17.: Geschlossener Regelkreis.

des offenen Kreises

$$L(s) = \frac{z_L(s)}{n_L(s)} \quad (4.43)$$

mit den teilerfremden Polynomen $z_L(s)$ und $n_L(s)$ die BIBO-Stabilität des geschlossenen Kreises

$$T_{r,y}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{z_L(s)}{z_L(s) + n_L(s)} \quad (4.44)$$

untersucht.

Bezeichnet man mit $N_0(p(s))$, $N_+(p(s))$ und $N_-(p(s))$ die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms $p(s)$ auf der imaginären Achse, in der rechten offenen s -Halbebene und in der linken offenen s -Halbebene, dann kann man das Nyquist-Kriterium wie folgt formulieren:

Satz 4.5 (Nyquist-Kriterium). Der geschlossene Regelkreis $T_{r,y}(s)$ nach Abbildung 4.17 mit der Übertragungsfunktion $L(s)$ des offenen Kreises nach (4.43) ist genau dann BIBO-stabil, wenn die stetige Winkeländerung von $1 + L(s)$ folgender Bedingung

$$\Delta \arg(1 + L(\mathbf{I}\omega)) = (\max(\text{grad}(z_L), \text{grad}(n_L)) - N_-(n_L) + N_+(n_L))\pi \quad (4.45)$$

genügt.

Beweis. $T_{r,y}(s)$ ist BIBO-stabil \Rightarrow Bedingung (4.45): Wenn $T_{r,y}(s)$ BIBO-stabil ist, dann ist $z_L(s) + n_L(s)$ ein Hurwitzpolynom. Daher gilt für die stetige Winkeländerung von $1 + L(s)$

$$\Delta \arg\left(1 + \frac{z_L(\mathbf{I}\omega)}{n_L(\mathbf{I}\omega)}\right) = \Delta \arg(n_L(\mathbf{I}\omega) + z_L(\mathbf{I}\omega)) - \Delta \arg(n_L(\mathbf{I}\omega)) \quad (4.46)$$

und mit Satz 4.4 und (4.41) erhält man damit unmittelbar die Bedingung (4.45). \square

Aufgabe 4.11. Beweisen Sie, dass wenn die Bedingung (4.45) erfüllt ist $\Rightarrow T_{r,y}(s)$ ist BIBO-stabil.

Hinweis: Führen Sie den Beweis durch Widerspruch.

Als Beispiel betrachte man den Regelkreis von Abbildung 4.17 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$L(s) = K \frac{2s - 1}{s(s^2 + s + 1)}. \quad (4.47)$$

Für $K = 1$ entspricht die Ortskurve von $L(s)$ der von Abbildung 4.15. Es soll mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums der Bereich des Parameters K so bestimmt werden, dass der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist.

- Im ersten Schritt wird untersucht, ob der geschlossene Regelkreis für $K = 1$ BIBO-stabil ist. Aus Abbildung 4.15 erkennt man, dass gilt

$$\Delta \arg(1 + L(\mathbf{I}\omega)) = -\pi \quad (4.48)$$

und die Auswertung der Beziehung (4.45) führt zum Wert

$$(\max(\text{grad}(z_L), \text{grad}(n_L)) - N_-(n_L) + N_+(n_L))\pi = (\max(1, 3) - 2 + 0)\pi = \pi. \quad (4.49)$$

Da die Ergebnisse von (4.48) und (4.49) unterschiedlich sind, kann man folgern, dass für $K = 1$ der geschlossene Regelkreis nicht BIBO-stabil ist.

- Aus der Ortskurve von $L(s)$ ist ersichtlich, dass ein Vergrößern von $K > 1$ zu keiner Änderung der stetigen Winkeländerung führt und damit dieser Bereich sicherlich auch nicht zu einem BIBO-stabilen geschlossenen Kreis führt.
- Für $K = -1$ und alle anderen Werte von K , bei denen die Ortskurve des offenen Kreises den Punkt -1 umschlingt (siehe Abbildung 4.18), ergibt sich eine stetige Winkeländerung von

$$\Delta \arg(1 + L(I\omega)) = -3\pi . \quad (4.50)$$

Aufgrund von (4.49) folgt auch für diesen Bereich, dass der geschlossene Kreis nicht BIBO-stabil ist. In diesem Zusammenhang beachte man, dass zum Beschriften der Ortskurve folgende Beziehung

$$L(I\omega) = \frac{K(2\omega + 1)}{\omega(1 - \omega^2 + I\omega)} = \frac{3 - 2\omega^2}{\omega^4 - \omega^2 + 1}K + I \frac{-3\omega^2 + 1}{(\omega^4 - \omega^2 + 1)\omega}K \quad (4.51)$$

sehr hilfreich ist, denn daraus erkennt man, dass gilt

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \operatorname{Im}(L(I\omega)) = \operatorname{sign}(K) \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\omega \rightarrow -0} \operatorname{Im}(L(I\omega)) = -\operatorname{sign}(K) \infty . \quad (4.52)$$

- Für $-1/3 < K < 0$ wird der Punkt -1 von der Ortskurve des offenen Kreises nicht mehr umschlungen (siehe Abbildung 4.18) und die zugehörige stetige Winkeländerung lautet

$$\Delta \arg(1 + L(I\omega)) = \pi , \quad (4.53)$$

womit für diesen Bereich die BIBO-Stabilität des geschlossenen Kreises gezeigt ist.

Aufgabe 4.12. Gegeben ist der Regelkreis von Abbildung 4.17 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises

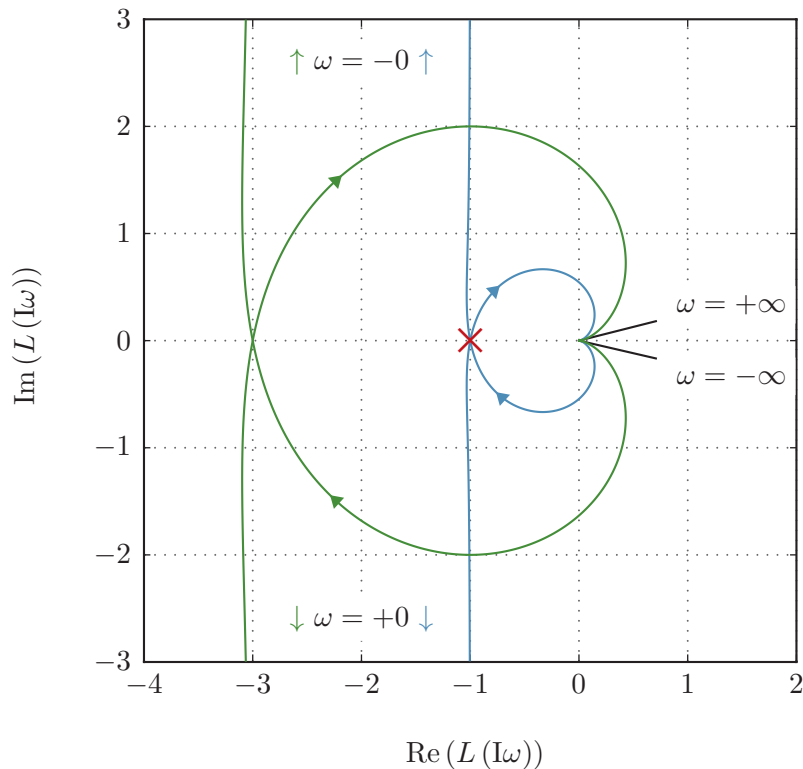
$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)^2} .$$

Überprüfen Sie mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums, ob der geschlossene Kreis für die Parameter $K = 0.5$, 5 und 50 BIBO-stabil ist.

Lösung von Aufgabe 4.12. Der geschlossene Kreis ist für $K = 0.5$ BIBO-stabil und für $K = 5$ und $K = 50$ nicht BIBO-stabil.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass das Nyquist-Kriterium in einer generalisierten Form auch auf lineare zeitinvariante verteilt-parametrische Systeme, also Systeme mit *transzendenten Übertragungsfunktionen*, angewandt werden kann. Zu dieser Systemklasse gehören unter anderem auch Systeme mit Totzeiten.

Für das im folgenden Kapitel diskutierte Frequenzkennlinienverfahren zum Reglerentwurf im Frequenzbereich wendet man häufig eine modifizierte Version des Nyquist-Kriteriums zum Stabilitätsnachweis des geschlossenen Regelkreises an.

Abbildung 4.18.: Ortskurve des offenen Kreises von (4.47) für $K = -1$ und $K = -1/3$.

Satz 4.6 (Nyquist-Kriterium in Frequenzkennliniendarstellung). *Es sei angenommen, dass sich die Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$ in folgender Form*

$$L(s) = \frac{V}{s^\rho} \frac{z_L(s)}{n_L(s)} \exp(-sT_t), \quad z_L(0) = n_L(0) = 1 \quad (4.54)$$

mit den teilerfremden Polynomen $z_L(s)$ und $s^\rho n_L(s)$ darstellen lässt, wobei nachfolgende Bedingungen erfüllt sind:

- (A) *Der Verstärkungsfaktor V und die Totzeit T_t sind positiv,*
- (B) *$\text{grad}(n_L(s)) + \rho > \text{grad}(z_L(s))$,*
- (C) *das Polynom $n_L(s)$ ist ein Hurwitzpolynom und für ρ gilt $\rho \in \{0, 1, 2\}$,*
- (D) *die Betragskennlinie von $L(j\omega)$ weist genau einen Schnittpunkt mit der 0-dB-Linie (eine Durchtrittsfrequenz ω_C) auf bzw. die Ortskurve von $L(j\omega)$ schneidet den Einheitskreis im Bereich $0 \leq \omega < \infty$ genau einmal und*
- (E) *im Bereich $|L(j\omega)|_{dB} \geq 0$ gelte $-540^\circ < \arg(L(j\omega)) < 180^\circ$ (d. h. die Ortskurve des offenen Kreises $L(s)$ kann vor ihrem Eintauchen in den Einheitskreis den Nullpunkt höchstens einmal vollständig umkreisen).*

Unter diesen Voraussetzungen ist der Regelkreis nach Abbildung 4.17 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$ genau dann BIBO-stabil, wenn der Ab-

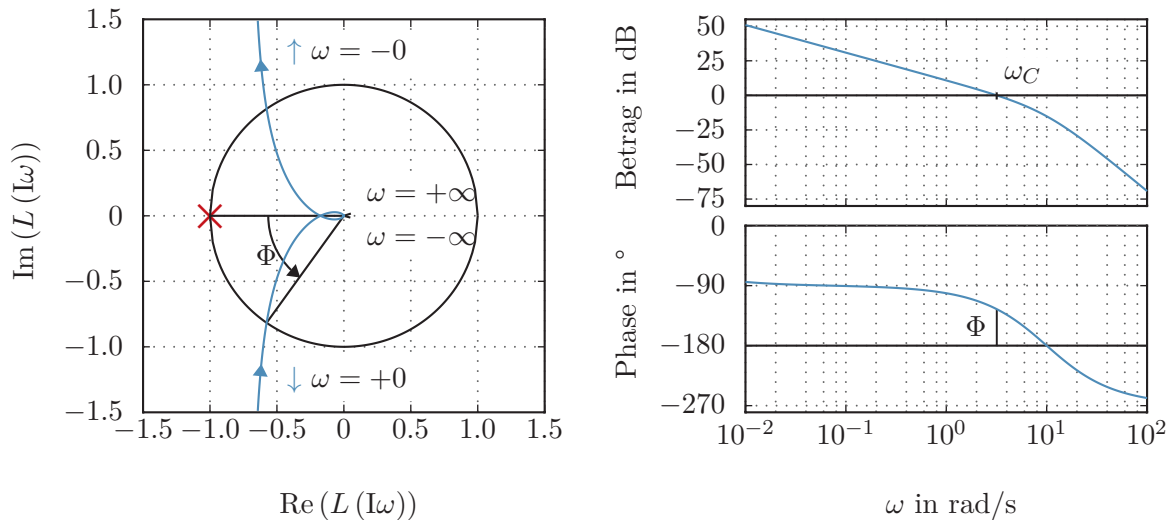


Abbildung 4.19.: Zur Bestimmung der Phasenreserve aus der Ortskurve und dem Bode-Diagramm.

stand der Phase an der Durchtrittsfrequenz $\arg(L(j\omega_C))$ zu $-\pi$, die so genannte *Phasenreserve* Φ ,

$$\Phi = \arg(L(j\omega_C)) + \pi \quad (4.55)$$

positiv ist.

Für einen Beweis dieses Satzes sei auf die am Ende angegebene Literatur verwiesen. Abbildung 4.19 zeigt für eine Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$, die die Voraussetzungen von Satz 4.6 erfüllt, wie man die Phasenreserve Φ aus der Ortskurve und dem Bodediagramm bestimmen kann.

4.5. Literatur

- [4.1] C. Chen, *Control System Design*. New York: Pond Woods Press, 1987.
- [4.2] —, *Linear System Theory and Design*. New York: Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, 1984.
- [4.3] M. Cremer, *Regelungstechnik*, 2. Aufl. Berlin: Springer, 1995.
- [4.4] C. A. Desoer und Y.-T. Wang, „On the Generalized Nyquist Stability Criterion“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. AC-25, Nr. 2, S. 187–196, 1980.
- [4.5] J. C. Doyle, B. A. Francis und A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*. New York: MacMillan, 1992.
- [4.6] O. Föllinger, *Regelungstechnik*, 6. Aufl. Heidelberg: Hüthig Buch Verlag, 1990.

-
- [4.7] F. Gausch, A. Hofer und K. Schlacher, *Digitale Regelkreise*. München: Oldenbourg, 1991.
 - [4.8] M. Horn und N. Dourdoumas, *Regelungstechnik*. München: Pearson Studium, 2004.
 - [4.9] G. Ludyk, *Theoretische Regelungstechnik 1*. Berlin Heidelberg: Springer, 1995.
 - [4.10] —, *Theoretische Regelungstechnik 2*. Berlin Heidelberg: Springer, 1995.
 - [4.11] D. G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems*. New York: John Wiley & Sons, 1979.
 - [4.12] J. Lunze, *Regelungstechnik 1*, 5. Aufl. Berlin Heidelberg New York: Springer, 2006.
 - [4.13] —, *Regelungstechnik 2*, 3. Aufl. Berlin Heidelberg New York: Springer, 2005.
 - [4.14] K. Reinschke, *Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie*. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
 - [4.15] C. Rohrs, J. L. Melsa und D. G. Schultz, *Linear Control Systems*. New York: McGraw-Hill, 1993.
 - [4.16] W. J. Rugh, *Linear System Theory*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.
 - [4.17] A. Weinmann, *Regelungen: Analyse und technischer Entwurf*, 3. Aufl. Wien New York: Springer, 1998, Bd. 1 und 2.