

6. Der Digitale Regelkreis

Bisher wurden ausschließlich zeitkontinuierliche Systeme behandelt. Die aus der Reglersynthese erhaltenen linearen Regler liegen in Form von s -Übertragungsfunktionen oder als Systeme von Differentialgleichungen vor. Will man diese Regler realisieren, so muss man sie beispielsweise als Operationsverstärkerschaltungen aufbauen, siehe Abschnitt 3.9. Heutzutage werden zumeist *Digitalrechner* zur Regelung eingesetzt, weshalb in weiterer Folge die Theorie so genannter zeitdiskreter Systeme genauer behandelt werden soll.

6.1. Allgemeines

Abbildung 6.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines digitalen Regelkreises. Im Unterschied zu kontinuierlichen Regelkreisen muss die vom Sensor erfasste zeitkontinuierliche Messgröße $\bar{y}(t)$ mit Hilfe eines *A/D(Analog/Digital)-Wandlers* zeitdiskretisiert werden, damit sie im Digitalrechner weiterverarbeitet werden kann. Im Folgenden wird meist von einem idealen Sensor, d. h. $n(t) = 0$, ausgegangen womit gilt $\bar{y}(t) = y(t)$. Ein idealer A/D-Wandler, auch *Abtaster (sampler)* genannt, erzeugt dann aus einem zeitkontinuierlichen Signal $y(t)$ eine *Folge von Abtastwerten* $(y_k) = (y_0, y_1, y_2, \dots) = (y(t_0), y(t_1), y(t_2), \dots)$ zu den Zeitpunkten t_0, t_1, t_2, \dots (siehe Abbildung 6.2). Für das Weitere wird vorausgesetzt, dass die Abtastung *äquidistant* erfolgt, d. h. die Abtastzeitpunkte t_k sind ganzzahlige Vielfache der so genannten *Abtastzeit (sampling time)* T_a bzw. $t_k = kT_a, k = 0, 1, 2, \dots$. Für stetige und rechtsseitig stetige Funktionen $y(t)$ genügt damit der Abtaster der Beziehung

$$y_k = y(kT_a) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \quad (6.1)$$

und für linksseitig stetige Funktionen $y(t)$ gilt

$$y_k = \lim_{t \rightarrow +kT_a} y(t) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} . \quad (6.2)$$

Aufgabe 6.1. Zeigen Sie, dass der Abtaster linear aber zeitvariant ist.

Im Digitalrechner wird dann aus den Folgenwerten (y_k) des abgetasteten Sensorsignals $y(t)$ und aus den Folgenwerten (r_k) des Führungs- bzw. Referenzsignals zu diskreten Zeitpunkten $t_k = kT_a$ die Stellgrößenfolge (u_k) berechnet. Damit man nun aus einer Folge von Abtastwerten (u_k) wiederum ein zeitkontinuierliches Signal $u(t)$ erzeugen kann, benötigt man einen *D/A-(Digital/Analog)-Wandler*. Bei digitalen Regelkreisen wird der D/A-Wandler meist so aufgebaut, dass er am Ausgang den Abtastwert bis zur nächsten Abtastperiode analog konstant hält (siehe Abbildung 6.3). Man spricht dann bei idealem

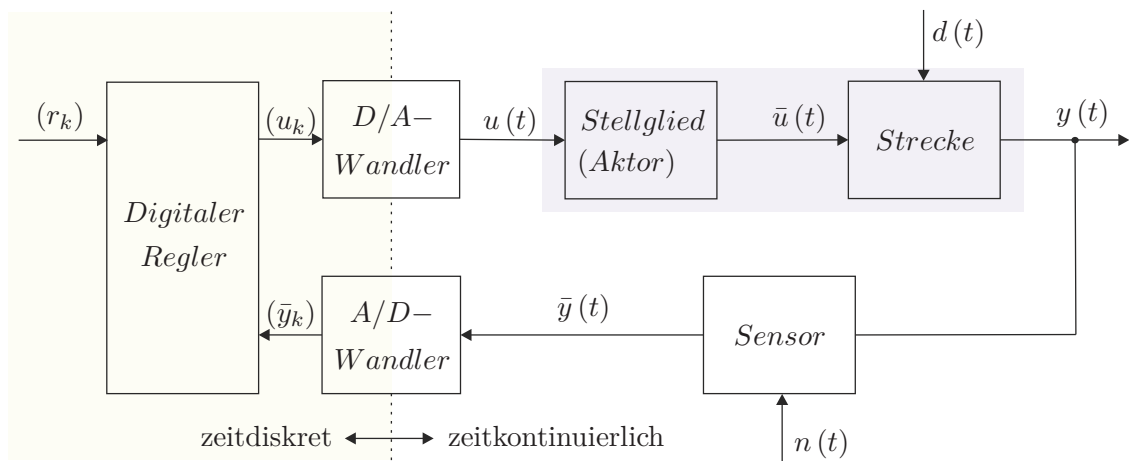


Abbildung 6.1.: Blockschaltbild eines digitalen Regelkreises.

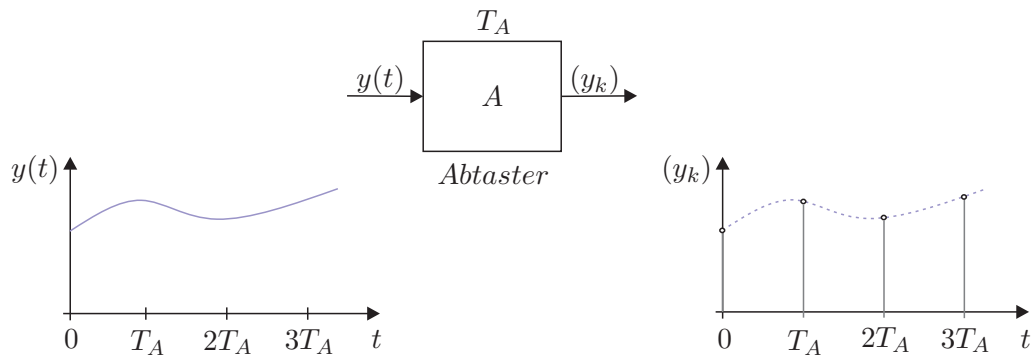


Abbildung 6.2.: Zur Funktionsweise des Abtasters.

Verhalten auch von einem *Halteglied nullter Ordnung* oder in der englischsprachigen Literatur von einem *zero-order-hold*. Die Ausgangsgröße $u(t)$ des Haltegliedes hängt somit mit der Eingangsgröße (u_k) wie folgt zusammen,

$$u(t) = u_k \quad \text{für} \quad kT_a \leq t < (k+1)T_a \quad (6.3)$$

bzw.

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k (\sigma(t - kT_a) - \sigma(t - (k+1)T_a)) \quad (6.4)$$

Transformiert man (6.4) in den Laplace-Bereich, so erhält man

$$\hat{u}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \frac{1}{s} (e^{-kT_a s} - e^{-(k+1)T_a s}) = \frac{1}{s} (1 - e^{-T_a s}) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-kT_a s}}_{\hat{v}(s)} \quad (6.5)$$

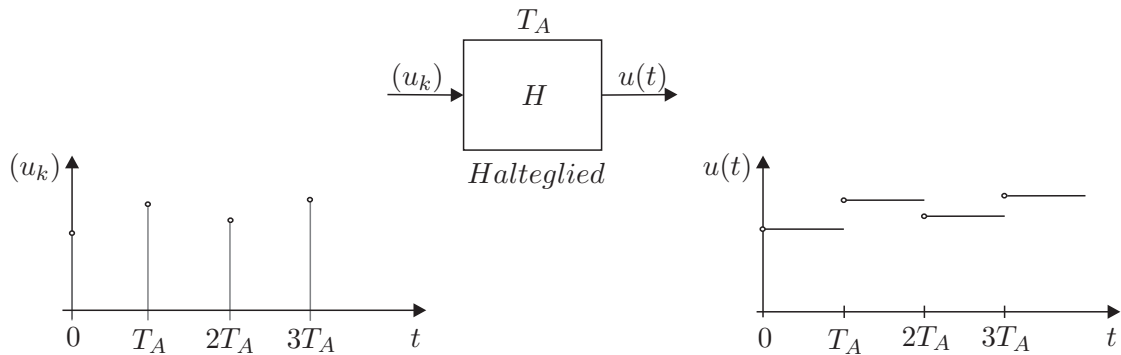


Abbildung 6.3.: Zur Funktionsweise des Haltegliedes nullter Ordnung.

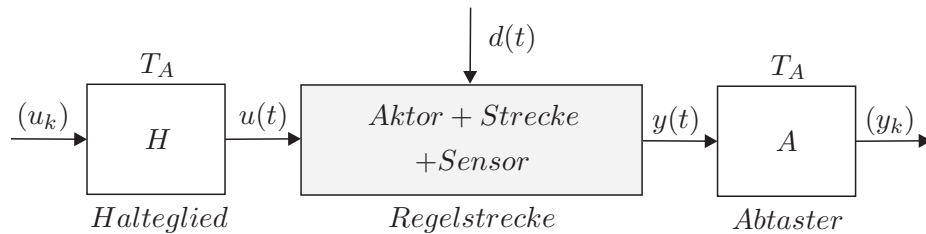


Abbildung 6.4.: Abtastsystem.

woraus sich unmittelbar die Übertragungsfunktion des Haltegliedes zu

$$G(s) = \frac{\hat{u}(s)}{\hat{v}(s)} = \frac{1}{s} (1 - e^{-T_a s}) \quad (6.6)$$

mit der Eingangsgröße

$$(u_k) = v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_a) \delta(t - kT_a) \quad (6.7)$$

ergibt.

Aufgabe 6.2. Zeigen Sie, dass die Hintereinanderschaltung von einem exakt synchronisierten Halteglied und Abtaster mit der Abtastzeit T_a einer Durchschaltung entspricht.

6.2. Abtastsysteme

Für die weiteren Betrachtungen liege das zeitdiskrete System nach Abbildung 6.4 mit ideal synchronisiertem Abtast-Halte-Glied mit der Abtastzeit T_a sowie der Eingangsfolge (u_k) und der Ausgangsfolge (y_k) zu Grunde.

6.2.1. Der nichtlineare Fall

Angenommen, die Regelstrecke in Abbildung 6.4 lasse sich in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.8a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (6.8b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ und dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ schreiben. Der Zusammenhang zwischen \mathbf{x}_k und \mathbf{x}_{k+1} des zugehörigen Abtastsystems ergibt sich dann als Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (6.9)$$

für den Anfangswert $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT_a)$ und die Eingangsgröße $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k = \mathbf{u}(kT_a)$ für $kT_a \leq t < (k+1)T_a$ zum Zeitpunkt $t = (k+1)T_a$. Damit liegt das mathematische Modell des Abtastsystems als *Differenzgleichungssystem*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \quad (6.10a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (6.10b)$$

vor.

Als Beispiel betrachte man die nichtlineare Regelstrecke erster Ordnung

$$\dot{x}(t) = -\sin(t)x(t) + x(t)u(t) \quad (6.11a)$$

$$y(t) = tx(t)^2 + u(t) \quad (6.11b)$$

Die Lösung der Differentialgleichung für den Anfangswert $x(t_0) = x_0$ und den konstanten Eingang $u(t) = u_C$ lautet

$$x(t) = \frac{x_0 \exp(u_C t + \cos(t))}{\cosh(\cos(t_0) + u_C t_0) + \sinh(\cos(t_0) + u_C t_0)}, \quad (6.12)$$

woraus sich unmittelbar das zugehörige Abtastsystem für $t_0 = kT_a$, $x_0 = x_k$, $t = (k+1)T_a$, $x(t) = x_{k+1}$ und $u_C = u_k$ zu

$$x_{k+1} = \frac{x_k \exp(u_k(k+1)T_a + \cos((k+1)T_a))}{\cosh(\cos(kT_a) + u_k kT_a) + \sinh(\cos(kT_a) + u_k kT_a)} \quad (6.13)$$

ergibt. Der Ausgang $y(t)$ zum Zeitpunkt $t = kT_a$ folgt dann in der Form

$$y_k = kT_a x_k^2 + u_k \quad (6.14)$$

Man erkennt also, dass es *im Allgemeinen unmöglich* ist, für nichtlineare zeitkontinuierliche Systeme das zugehörige Abtastsystem *exakt* zu berechnen, da die Kenntnis der Lösung des nichtlinearen Differentialgleichungssystems vonnöten ist. Näherungsweise kann das System (6.8) mittels verschiedener numerischer Integrationsverfahren in ein Differenzgleichungssystem übergeführt werden. Beispielsweise lautet das Differenzgleichungssystem zu (6.8) nach dem expliziten Eulerverfahren

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T_a \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, kT_a) \quad (6.15)$$

Zur Stabilität des Integrationsverfahrens und die zu wählende Abtastzeit T_a (Schrittweite) sei an dieser Stelle auf die Numerikliteratur verwiesen.

6.2.2. Der lineare, zeitinvariante Fall

Für lineare, zeitinvariante Regelstrecken der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (6.16a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (6.16b)$$

lautet die allgemeine Lösung nach Satz 2.4

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.17a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) . \quad (6.17b)$$

Setzt man $t_0 = kT_a$, $t = (k + 1)T_a$ und $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_k$ für $kT_a \leq \tau < (k + 1)T_a$ in (6.17) ein, so erhält man das zu (6.16) zugehörige Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(T_a)\mathbf{x}_k + \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \Phi((k + 1)T_a - \tau) d\tau \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (6.18a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (6.18b)$$

bzw.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi\mathbf{x}_k + \Gamma\mathbf{u}_k \quad (6.19a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (6.19b)$$

mit

$$\Phi = \exp(\mathbf{A}T_a), \quad (6.19c)$$

$$\Gamma = \int_0^{T_a} \exp(\mathbf{A}\tau) d\tau \mathbf{B} . \quad (6.19d)$$

Aufgabe 6.3. Zeigen Sie mit Hilfe der Variablentransformation $\bar{\tau} = (k + 1)T_a - \tau$, dass nachfolgende Gleichung

$$\int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \Phi((k + 1)T_a - \tau) d\tau = \int_0^{T_a} \Phi(\bar{\tau}) d\bar{\tau} \quad (6.20)$$

gültig ist.

Als Beispiel berechne man für das Zustandsmodell eines Doppelintegrators

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (6.21a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (6.21b)$$

das zugehörige Abtastsystem für die Abtastzeit T_a . Die Transitionsmatrix errechnet sich dabei in der Form

$$\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

und damit ergeben sich die Dynamikmatrix Φ und der Eingangsvektor Γ des Abtastsystems gemäß (6.19) zu

$$\Phi = \Phi(T_a) = \begin{bmatrix} 1 & T_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

und

$$\Gamma = \left(\int_0^{T_a} \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\tau \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a & \frac{T_a^2}{2} \\ 0 & T_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_a^2}{2} \\ T_a \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Als Ergebnis erhält man das Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \frac{T_a^2}{2} \\ T_a \end{bmatrix} u_k \quad (6.25a)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \quad (6.25b)$$

Analog zu den Sätzen 2.1 und 2.2 ist ein zeitdiskretes System genau dann linear bzw. linear und zeitinvariant, wenn es sich in der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \Gamma_k \mathbf{u}_k \quad (6.26a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k \quad (6.26b)$$

bzw.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k \quad (6.26c)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \quad (6.26d)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ sowie den Matrizen $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ schreiben lässt. Zur Wiederholung sei an dieser Stelle angemerkt, dass mit dem tiefgestellten Index k einer Größe ξ_k der Wert von ξ zum Zeitpunkt kT_a , also $\xi_k = \xi(kT_a)$, gemeint ist.

Aufgabe 6.4. Zeigen Sie, dass sich die Matrizen Φ und Γ des Abtastsystems (6.19) in der Form

$$\begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = \exp \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} T_a \right)$$

mit \mathbf{E} als Einheitsmatrix berechnen lassen.

Hinweis: Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dT_a} \Phi &= \mathbf{A} \Phi(T_a), \\ \frac{d}{dT_a} \Gamma &= \Phi(T_a) \mathbf{B}.\end{aligned}$$

Aufgabe 6.5. Berechnen Sie für das System

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

das zugehörige Abtastsystem für die Abtastzeit T_a . Überprüfen Sie das Ergebnis in MATLAB mit Hilfe des Befehls `c2d` für die Abtastzeit $T_a = 0.1$ s.

Lösung von Aufgabe 6.5. Das Abtastsystem lautet

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} \exp(-T_a) & 0 \\ 1 - \exp(-T_a) & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 - \exp(-T_a) \\ T_a - 1 + \exp(-T_a) \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k.\end{aligned}$$

Aufgabe 6.6. Angenommen, die Stellgröße $u(t)$ wird um die bekannte Zeit $\Delta T \leq T_a$ verzögert auf den Prozess aufgeschaltet, d. h. das mathematische Modell (6.16) modifiziert sich in der Form

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t - \Delta T) \quad (6.27a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) . \quad (6.27b)$$

Wie lautet das zugehörige Abtastsystem für die Abtastzeit T_a ?

Lösung von Aufgabe 6.6. Das Abtastsystem lautet

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma_0 \mathbf{u}_k + \Gamma_1 \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\Phi &= \exp(\mathbf{A} T_a), \\ \Gamma_0 &= \int_0^{T_a - \Delta T} \Phi(\tau) d\tau \mathbf{B}, \\ \Gamma_1 &= \int_0^{\Delta T} \Phi(T_a - \tau) d\tau \mathbf{B}.\end{aligned}$$

Hinweis: Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung (6.27) für den Anfangswert $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT_a)$ und die Eingangsgröße

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{u}((k-1)T_a) & \text{für } kT_a \leq t < kT_a + \Delta T \\ \mathbf{u}_k = \mathbf{u}(kT_a) & \text{für } kT_a + \Delta T \leq t < (k+1)T_a \end{cases}$$

zum Zeitpunkt $t = (k+1)T_a$.

6.3. Die Transitionsmatrix

Im Weiteren betrachte man das lineare, zeitinvariante autonome Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (6.28)$$

Wie man sich einfach überzeugen kann, lautet die Lösung der Differenzgleichung (6.28) zum Zeitpunkt kT_a für einen vorgegebenen Anfangswert \mathbf{x}_0

$$\mathbf{x}_k = \Phi^k \mathbf{x}_0 = \Psi(k) \mathbf{x}_0. \quad (6.29)$$

Damit ist durch die $(n \times n)$ -Matrix $\Psi(k)$ die Transitionsmatrix des zeitdiskreten Systems (6.28) gegeben. Analog zur Transitionsmatrix im Zeitkontinuierlichen (siehe Abschnitt 2.4) erfüllt $\Psi(k)$ folgende Beziehungen

$$\Psi(0) = \mathbf{E} \quad (6.30a)$$

$$\Psi(k+l) = \Psi(k) \Psi(l) \quad (6.30b)$$

$$\Psi^{-1}(k) = \Psi(-k) \quad (6.30c)$$

$$\Psi(k+1) = \Phi \Psi(k), \quad (6.30d)$$

wobei für die Beziehung (6.30c) vorausgesetzt wird, dass die Dynamikmatrix Φ des zeitdiskreten Systems regulär ist. Beachten Sie, dass die Transitionsmatrix zeitkontinuierlicher Systeme für alle Zeiten t unabhängig von der Dynamikmatrix \mathbf{A} regulär ist, wohingegen die Transitionsmatrix Ψ zeitdiskreter Systeme genau dann regulär ist, wenn die Dynamikmatrix Φ des zugehörigen zeitdiskreten Systems regulär ist.

Aufgabe 6.7. Beweisen Sie die Eigenschaften (6.30) der Transitionsmatrix Ψ .

Die allgemeine Lösung eines linearen, zeitinvarianten Abtastsystems der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.31a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \quad (6.31b)$$

erhält man einfach durch sukzessives Anwenden der Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \Phi \mathbf{x}_0 + \Gamma \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{x}_2 &= \Phi (\underbrace{\Phi \mathbf{x}_0 + \Gamma \mathbf{u}_0}_{\mathbf{x}_1}) + \Gamma \mathbf{u}_1 = \Phi^2 \mathbf{x}_0 + \Phi \Gamma \mathbf{u}_0 + \Gamma \mathbf{u}_1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.32)$$

in der Form

$$\mathbf{x}_k = \Phi^k \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma \mathbf{u}_j \quad (6.33a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k . \quad (6.33b)$$

Man erkennt aus (6.33), dass das Faltungsintegral der allgemeinen Lösung zeitkontinuierlicher Systeme von Satz 2.4 im Zeitdiskreten durch die Faltungssumme ersetzt wird.

Analog zu Satz 3.4 lässt sich folgender Satz für die Stabilität eines linearen, zeitinvarianten autonomen Abtastsystems der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k \quad (6.34)$$

angeben:

Satz 6.1 (Globale asymptotische Stabilität für Abtastsysteme). Für alle Anfangswerte $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ des Systems (6.34) gilt genau dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^k \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} , \quad (6.35)$$

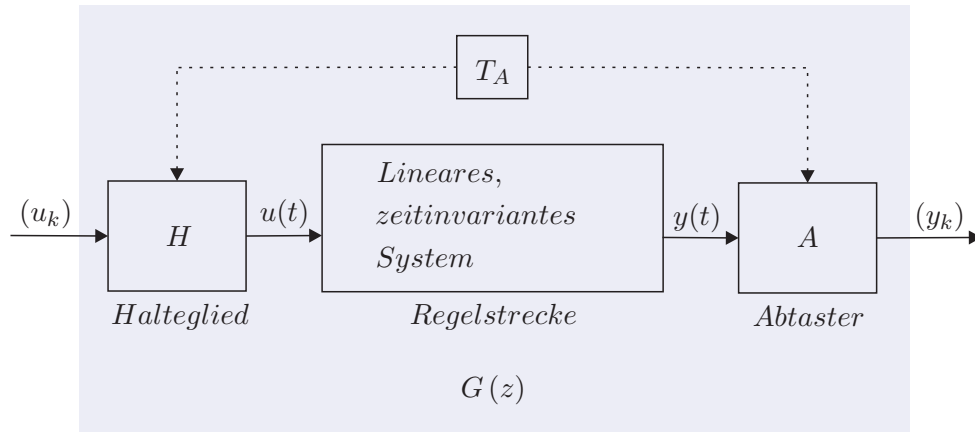
wenn alle Eigenwerte der Dynamikmatrix Φ betragsmäßig kleiner als 1 sind. Man sagt dann auch, die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$, die der Beziehung $\mathbf{x}_R = \Phi \mathbf{x}_R$ genügt, ist global asymptotisch stabil.

6.4. Eingangs-Ausgangsverhalten

Bisher wurde gezeigt, dass die Beschreibung eines zeitdiskreten Systems als Differenzgleichungssystem die zum Differentialgleichungssystem im Zeitkontinuierlichen analoge Zustandsdarstellung im Zeitdiskreten ist. Die Laplace-Transformation diente bei linearen, zeitinvarianten, zeitkontinuierlichen Systemen dazu, eine Eingangs-Ausgangsbeschreibung in Form von s -Übertragungsfunktionen (s -Übertragungsmatrizen im Mehrgrößenfall) zu bestimmen. Bei Abtastsystemen kann auf gleiche Art und Weise eine rationale Funktion (Matrix bestehend aus rationalen Funktionen im Mehrgrößenfall) in einer komplexwertigen Variablen z über die so genannte z -Transformation angegeben werden, die das *Eingangs-Ausgangsverhalten von Abtastsystemen* beschreibt. Teile der hierfür erforderlichen Grundlagen der z -Transformation wurden bereits in Signale und Systeme 2 (Kapitel 5) besprochen und sind vollständigkeitshalber im Anhang B nochmals zusammengefasst. Im weiteren Verlauf des Skriptums werden z -transformierte abgetastete Zeitsignale $(f_k) = ((f_0, f_1, \dots, f_n, \dots))$ immer in der Form $\mathcal{Z}\{(f_k)\} = f_z(z)$ mit dem tiefgestellten Index z geschrieben.

6.4.1. Die z -Übertragungsfunktion

Analog zur s -Übertragungsfunktion bei zeitkontinuierlichen Systemen kann für lineare, zeitinvariante Abtastsysteme nach Abbildung 6.5 das Eingangs-Ausgangsverhalten in Form der z -Übertragungsfunktion beschrieben werden.

Abbildung 6.5.: Zur z -Übertragungsfunktion.

Berechnung aus dem Differenzgleichungssystem

Es sei angenommen, dass das Abtastsystem von Abbildung 6.5 in Form eines Differenzgleichungssystems wie in (6.19)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.36a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \quad (6.36b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ sowie den Matrizen $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ vorliege. Wendet man auf (6.36) die z -Transformation an, so erhält man

$$z \mathbf{x}_z(z) - z \mathbf{x}_0 = \Phi \mathbf{x}_z(z) + \Gamma \mathbf{u}_z(z) \quad (6.37a)$$

$$\mathbf{y}_z(z) = \mathbf{C} \mathbf{x}_z(z) + \mathbf{D} \mathbf{u}_z(z) \quad (6.37b)$$

bzw. für die Ausgangsgröße ergibt sich

$$\mathbf{y}_z(z) = \mathbf{C} (z\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \mathbf{x}_0 z + (\mathbf{C} (z\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \Gamma + \mathbf{D}) \mathbf{u}_z(z). \quad (6.38)$$

Damit erkennt man unmittelbar, dass sich für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ die $(q \times p)$ dimensionale z -Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(z)$ eines linearen, zeitinvarianten Abtastsystems wie folgt

$$\mathbf{G}(z) = \frac{\mathcal{Z}\{\mathbf{y}_k\}}{\mathcal{Z}\{\mathbf{u}_k\}} = \frac{\mathbf{y}_z(z)}{\mathbf{u}_z(z)} = \mathbf{C} (z\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \Gamma + \mathbf{D} \quad (6.39)$$

errechnet. Im Eingrößenfall $p = q = 1$ lautet demnach die z -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}\{y_k\}}{\mathcal{Z}\{u_k\}} = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \Gamma + d \quad (6.40)$$

mit $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{c}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ und $d \in \mathbb{R}$.

Berechnung aus einer s -Übertragungsfunktion

Wenn die zeitkontinuierliche Regelstrecke von Abbildung 6.5 als s -Übertragungsfunktion $G(s)$ vorliegt, kann man aus den bisherigen Überlegungen die z -Übertragungsfunktion $G(z)$ des zugehörigen Abtastsystems wie folgt berechnen: Man bestimmt in einem ersten Schritt zu $G(s)$ eine Zustandsrealisierung (siehe Abschnitt 3.5), berechnet dann für diese Zustandsrealisierung nach (6.19) das Abtastsystem und erhält über die Beziehung (6.40) die z -Übertragungsfunktion. Dieser Weg scheint doch etwas umständlich zu sein, weshalb der naheliegende Wunsch besteht, die z -Übertragungsfunktion $G(z)$ des zugehörigen Abtastsystems direkt über $G(s)$ zu berechnen.

Dazu wird in Abbildung 6.5 die Eingangsimpulsfolge $(u_k) = (\delta_k) = (1, 0, 0, \dots)$ auf das System aufgeschaltet. Das Halteglied erzeugt daraus die Eingangsgröße

$$u(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_a) \quad (6.41a)$$

bzw.

$$\hat{u}(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT_a}) \quad (6.41b)$$

und als Ausgangsgröße im Laplace-Bereich erhält man

$$\hat{y}(s) = \hat{g}(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT_a}) G(s) . \quad (6.42)$$

Die z -Transformierte von $\hat{g}(s)$ errechnet sich nach (B.19) in der Form

$$g_z(z) = \mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} (1 - e^{-sT_a}) G(s) \right) \Big|_{t=+kT_a} \right) = \mathbf{Z} \left(\frac{1}{s} (1 - e^{-sT_a}) G(s) \right) . \quad (6.43)$$

Aufgabe 6.8. Zeigen Sie, dass für kausale Zeitfunktionen $f(t)$ und $n \in \mathbf{N}_+$ allgemein gilt

$$\mathbf{Z} \left(\hat{f}(s) e^{-nsT_a} \right) = z^{-n} \mathbf{Z} \left(\hat{f}(s) \right) .$$

Zufolge der Linearität der Laplace- und der z -Transformation (also auch der Transformation \mathbf{Z}) und Aufgabe 6.8 lässt sich (6.43) in der Form

$$g_z(z) = \mathbf{Z} \left(\frac{G(s)}{s} \right) - \mathbf{Z} \left(\frac{G(s)}{s} e^{-sT_a} \right) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left(\frac{G(s)}{s} \right) \quad (6.44)$$

anschreiben. Da für die z -Transformierte der Impulsfolge $\mathcal{Z} \{(\delta_k)\} = 1$ gilt, ist mit (6.44) unmittelbar die Vorschrift gegeben, wie man aus einer s -Übertragungsfunktion die zugehörige z -Übertragungsfunktion berechnet

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z} \{(y_k)\}}{\mathcal{Z} \{(u_k)\}} = \frac{g_z(z)}{1} = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left(\frac{G(s)}{s} \right) . \quad (6.45)$$

Aufgabe 6.9. Berechnen Sie für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

die z -Übertragungsfunktion $G(z)$ des zugehörigen Abtastsystems für die Abtastzeit $T_a = 200$ ms.

Lösung von Aufgabe 6.9. Die z -Übertragungsfunktion lautet

$$G(z) = \frac{0.0012z^2 + 0.0044z + 0.0010}{z^3 - 2.601z^2 + 2.278z - 0.6703}.$$

Aufgabe 6.10. Gegeben ist das lineare, zeitinvariante, zeitkontinuierliche System

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} -0.0197 & 0 \\ 0.0178 & -0.0129 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.0263 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \end{aligned}$$

Berechnen Sie die z -Übertragungsfunktion $G(z)$ des zugehörigen Abtastsystems für die Abtastzeit $T_a = 1$ s auf *zwei verschiedenen Wegen*.

Hinweis:

- Weg 1: Berechnung des Abtastsystems nach (6.19) und anschließend Ermittlung von $G(z)$ über (6.40).
- Weg 2: Zuerst die s -Übertragungsfunktion $G(s)$ berechnen und anschließend $G(z)$ über (6.45) bestimmen.

Polstellen der z -Übertragungsfunktion

Ausgangspunkt für die nachfolgenden Betrachtungen ist ein lineares, zeitinvariantes, zeitkontinuierliches System der Form

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (6.46a)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du \quad (6.46b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $u \in \mathbb{R}$ und dem Ausgang $y \in \mathbb{R}$. Das zugehörige Abtastsystem lautet nach (6.19)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \quad (6.47a)$$

$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + \mathbf{d}u_k \quad (6.47b)$$

mit

$$\Phi = \exp(\mathbf{A}T_a), \quad (6.48a)$$

$$\Gamma = \int_0^{T_a} \exp(\mathbf{A}\tau) d\tau \mathbf{b}. \quad (6.48b)$$

Die Berechnungsvorschrift (6.48) für die Dynamikmatrix Φ des Abtastsystems (6.47) gibt an, wie sich Eigenwerte λ_j und Eigenvektoren \mathbf{v}_j der Dynamikmatrix \mathbf{A} im Zeitdiskreten transformieren. Es gilt nämlich nachfolgender Satz:

Satz 6.2. Sind λ_j und \mathbf{v}_j der Eigenwert und der zugehörige Eigenvektor einer $(n \times n)$ -Matrix \mathbf{A} , dann sind $\exp(\lambda_j)$ und \mathbf{v}_j der Eigenwert und der zugehörige Eigenvektor der $(n \times n)$ -Matrix $\exp(\mathbf{A})$.

Beweis. Nach der Definition von Eigenwert λ_j und Eigenvektor \mathbf{v}_j einer Matrix \mathbf{A} gilt

$$(\lambda_j \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \quad (6.49a)$$

bzw.

$$\lambda_j \mathbf{v}_j = \mathbf{A} \mathbf{v}_j. \quad (6.49b)$$

Um nun zu zeigen, dass gilt

$$\exp(\lambda_j) \mathbf{v}_j = \exp(\mathbf{A}) \mathbf{v}_j, \quad (6.50)$$

setzt man in (6.50) für

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \quad (6.51)$$

ein, also

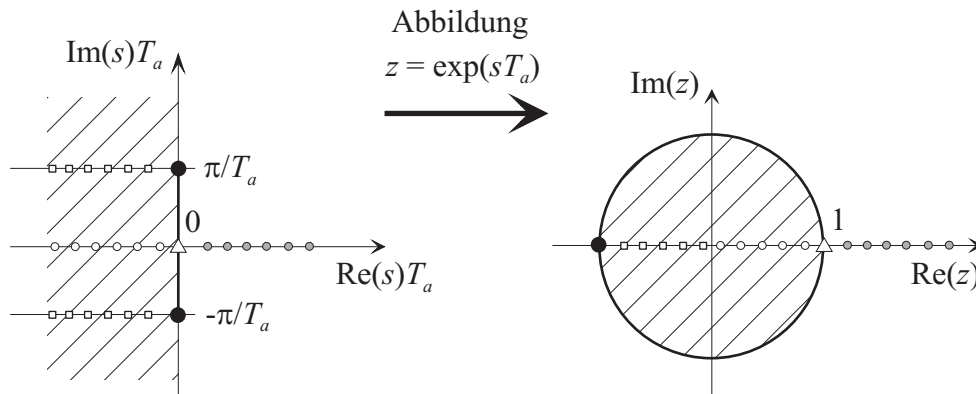
$$\exp(\lambda_j) \mathbf{v}_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \mathbf{v}_j, \quad (6.52)$$

und wendet sukzessive die Beziehung (6.49) an

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \mathbf{v}_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^k}{k!} \mathbf{v}_j = \exp(\lambda_j) \mathbf{v}_j. \quad (6.53)$$

Damit ist aber Satz 6.2 gezeigt. \square

Nach Satz 6.2 transformieren sich Eigenwerte λ_j der Dynamikmatrix \mathbf{A} des zeitkontinuierlichen Systems (6.46) zu Eigenwerten $\exp(\lambda_j T_a)$ der Dynamikmatrix Φ des zeitdiskreten Systems (6.47). Abbildung 6.6 zeigt grafisch die Abbildung $z = e^{sT_a}$ von der komplexen s -Ebene in die komplexe z -Ebene (vergleiche dazu auch (B.7)).

Abbildung 6.6.: Die konforme Abbildung $z = \exp(sT_a)$.

Man kann sich nun einfach davon überzeugen, dass die Abbildung $z = e^{sT_a}$ folgende Eigenschaften hat:

- (1) Die imaginäre Achse der s -Ebene wird auf den Einheitskreis (Mittelpunkt 0 und Radius 1) der z -Ebene abgebildet.
- (2) Die linke s -Halbebene wird auf das Innere des Einheitskreises in der z -Ebene abgebildet.
- (3) Die Abbildung ist nicht bijektiv, denn Punkte s_i, s_j der s -Ebene, für die gilt $s_i = s_j + Ik\frac{2\pi}{T_a}$ mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ werden auf denselben Punkt der z -Ebene abgebildet.

Aufgabe 6.11. Zeigen Sie die Eigenschaften (1) - (3) der Abbildung $z = e^{sT_a}$.

Hinweis: Für $s = \alpha + I\omega$ lautet die Abbildung

$$z = e^{\alpha T_a} \cos(\omega T_a) + I e^{\alpha T_a} \sin(\omega T_a) .$$

Damit kann unmittelbar nachfolgender Satz angegeben werden.

Satz 6.3. Ist s_j ein Pol einer s -Übertragungsfunktion $G(s)$, dann ist $e^{s_j T_a}$ der Pol der zugehörigen z -Übertragungsfunktion für die Abtastzeit T_a .

Aufgabe 6.12. Beweisen Sie Satz 6.3.

Hinweis: Kombinieren Sie das bisher Gesagte mit dem Beweis von Satz 3.5.

Damit folgt aber auch, dass durch Abtastung ein stabiles zeitkontinuierliches System nicht destabilisiert werden kann. Im Abschnitt 3.10 wurde gezeigt, dass der Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil der Nullstellen $s_{1,2} = \alpha \pm I\beta$ eines Nennerpolynoms zweiter Ordnung

$$n(s) = (s - \alpha - I\beta)(s - \alpha + I\beta) = \frac{1}{T^2} + 2\xi \frac{s}{T} + s^2 \quad (6.54)$$

und der Zeitkonstanten T bzw. dem Dämpfungsgrad ξ sich in der Form

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad (6.55a)$$

$$\xi = \frac{-\text{sign}(\alpha)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}} \quad (6.55b)$$

errechnet. Aus (6.55) ist ersichtlich, dass in der komplexen s -Ebene Punkte konstanter Dämpfung ξ auf einem Strahl durch den Nullpunkt mit der Steigung $\frac{\beta}{\alpha}$ und Punkte konstanter Zeitkonstanten T auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ liegen. Die Frage, die sich in diesem Zusammenhang stellt, ist daher, wie sich Halbkreise und Strahlen der linken s -Halbebene über die Abbildung $z = e^{sT_a}$ in die z -Ebene transformieren. Als Beispiel betrachte man die Übertragungsfunktion von (3.163)

$$G(s) = \frac{10s(s+1)}{(s-0.5)(s^2+4s+6.25)} \quad (6.56)$$

mit der zugehörigen z -Transformierten für $T_a = 0.5$

$$G(z) = \frac{2.725z^2 - 4.296z + 1.571}{z^3 - 1.822z^2 + 0.8266z - 0.1738}. \quad (6.57)$$

Abbildung 6.7 zeigt im linken Bild die Polstellen des Pol-Nullstellen Diagramm von $G(s)$ und im rechten jene von $G(z)$. Das Gitter wurde durch MATLAB mit dem Befehl `zgrid` in der z -Ebene so gelegt, dass damit die Halbkreise und Strahlen der s -Ebene durch die Abbildung $z = e^{sT_a}$ in Linien der z -Ebene abgebildet wurden.

6.4.2. Wahl der Abtastzeit

Die Wahl der Abtastzeit T_a ist bei digitalen Regelungen eine zentrale Frage, denn sie sollte einerseits *nicht zu groß* gewählt werden, damit die dynamischen Vorgänge hinreichend gut erfasst werden können, sie sollte aber auch *nicht unnötig klein* sein, damit sich die Kosten und der Aufwand der Echtzeit-Hardware und -Software in einem vernünftigen Rahmen bewegen. Für die praktische Implementierung hat sich folgende Vorgangsweise als sinnvoll erwiesen: In einem ersten Schritt berechne man die Eigenwerte der Dynamikmatrix \mathbf{A} bzw. die Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$ des zeitkontinuierlichen Systems. Da nur reelle Koeffizienten vorkommen, sind die Eigenwerte bzw. Pole entweder reell oder konjugiert komplex. Setzt man nun voraus, dass die auftretenden Pole einfach sind und in der linken offenen s -Halbebene liegen, dann lässt sich die Übertragungsfunktion $G(s)$ für n_1 reelle und n_2 konjugiert komplexe Pole durch Partialbruchzerlegung in der Form

$$G(s) = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{V_{1,j}}{(1+sT_j)} + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \frac{V_{2,j} + V_{3,j}s}{(1+2\xi_j(sT_j) + (sT_j)^2)}, \quad 0 < \xi_j < 1 \quad (6.58)$$

anschreiben. Die Sprungantwort $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)$ setzt sich also aus den Sprungantworten von P-T₁- und P-T₂-Gliedern zusammen (siehe Abschnitte 3.8.1 und 3.8.2). Die

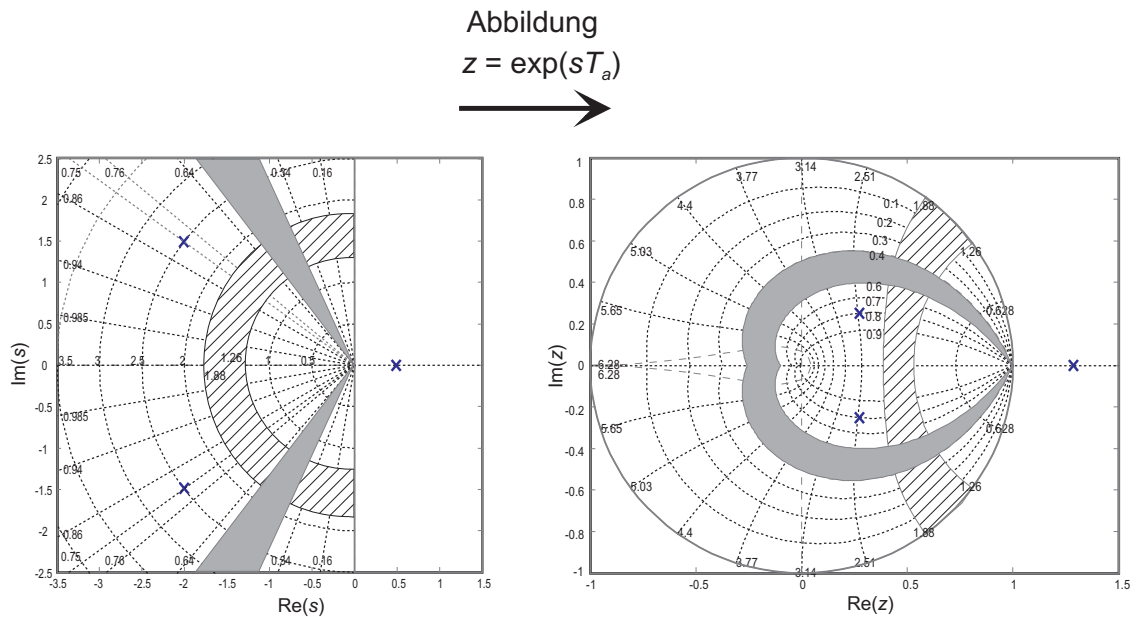


Abbildung 6.7.: Zur Abbildung $z = \exp(sT_a)$ für Linien konstanter Dämpfung ξ und Linien konstanter Zeitkonstanten T .

Dynamik des Systems kann relativ gut über die *Anstiegszeiten* der einzelnen P-T₁- und P-T₂-Glieder charakterisiert werden. Die Anstiegszeit t_r eines P-T₁-Gliedes der Form

$$G(s) = \frac{V_1}{1 + sT_1} \quad (6.59)$$

lautet $t_r = T_1$ (siehe Abschnitt 3.8.1) und die Anstiegszeit t_r eines P-T₂-Gliedes

$$G(s) = \frac{V_2}{1 + 2\xi(sT_2) + (sT_2)^2}, \quad 0 < \xi < 1 \quad (6.60)$$

errechnet sich zu

$$t_r = T_2 \exp\left(\frac{\arccos(\xi)}{\tan(\arccos(\xi))}\right) \quad (6.61)$$

Aufgabe 6.13. Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung (6.61).

Hinweis: Berechnen Sie die Steigung der Tangente im Wendepunkt der Sprungantwort von (6.60).

Als *Faustformel für die Wahl der Abtastzeit* T_a wird nun verlangt, dass die Anzahl von Abtastpunkten pro Anstiegszeit t_r im Bereich von 4 bis 10 liegt, also

$$\frac{\min(t_r)}{T_a} \approx 4 \text{ bis } 10, \quad (6.62)$$

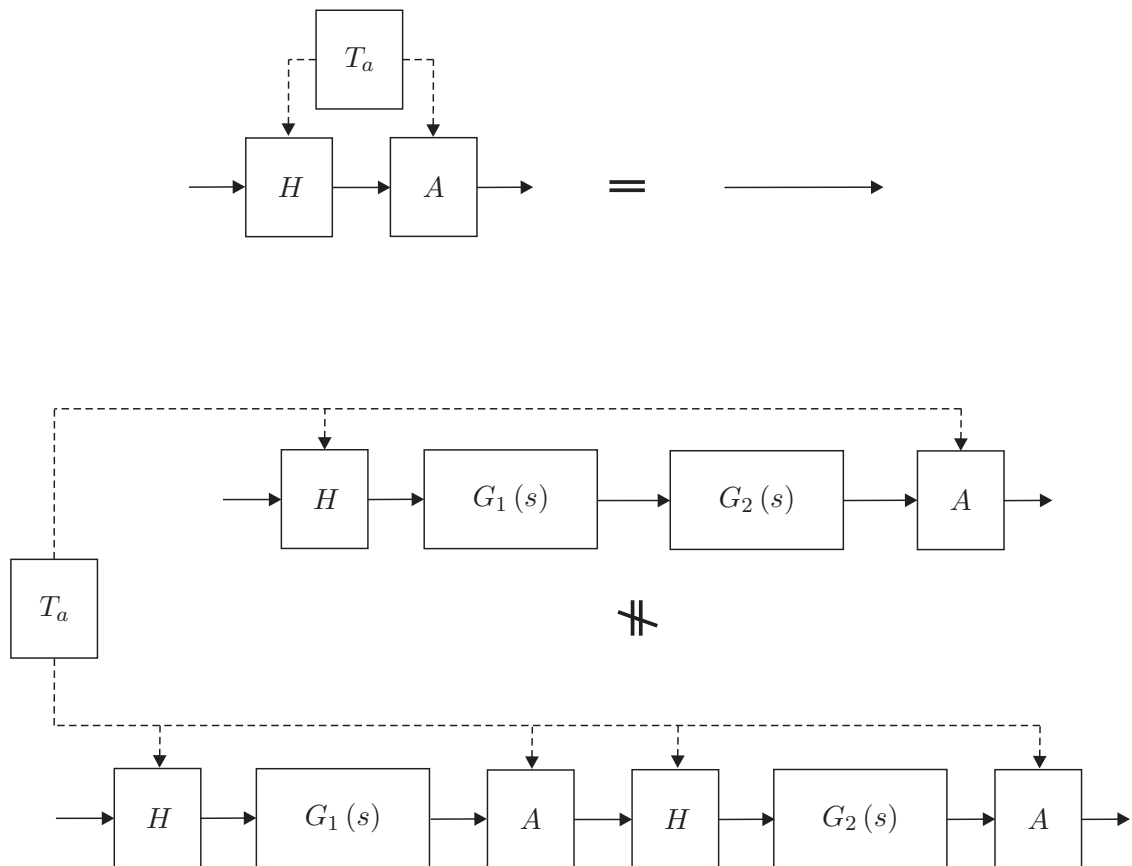


Abbildung 6.8.: Zur Hintereinanderschaltung von Abtaster und Halteglied.

6.4.3. Zusammenschaltung von Übertragungsfunktionen

Die Zusammenschaltung von z -Übertragungsfunktionen erfolgt vollkommen analog zu den s -Übertragungsfunktionen (siehe Abschnitt 3.4.2). Man beachte, dass zwar die Hintereinanderschaltung von Halteglied mit anschließendem Abtaster nach Abbildung 6.8 (oberes Bild) eine Durchschaltung ist, aber dies für die umgekehrte Reihenfolge im Allgemeinen nicht mehr gilt. Daraus folgt unmittelbar die nachfolgende Beziehung (siehe auch Abbildung 6.8 unteres Bild)

$$\frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G_1(s) G_2(s)}{s} \right\} \neq \underbrace{\frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G_1(s)}{s} \right\}}_{G_1(z)} \underbrace{\frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G_2(s)}{s} \right\}}_{G_2(z)}. \quad (6.63)$$

6.4.4. Realisierungsproblem

Aus (6.40) ist ersichtlich, dass es sehr einfach ist, zu einem linearen, zeitinvarianten Abtastsystem die Übertragungsfunktion $G(z)$ zu berechnen. Wie bereits bei zeitkontinuier-

lichen Systemen (siehe Abschnitt 3.5) versteht man auch im Zeitdiskreten unter dem *Realisierungsproblem* die Aufgabe, zu einer gegebenen Übertragungsfunktion $G(z)$ eine Zustandsdarstellung in Form eines *Differenzgleichungssystems* mit $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{c}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ und d zu bestimmen. Jene Zustandsrealisierungen, die eine minimale Anzahl von Zuständen haben, werden auch als *Minimalrealisierung* der Übertragungsfunktion $G(z)$ bezeichnet. Es sei an dieser Stelle betont, dass die Zustandsrealisierung einer Übertragungsfunktion $G(z)$ natürlich keinesfalls eindeutig ist.

Satz 6.4 (Realisierbarkeit). Eine Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \quad (6.64)$$

mit dem Zähler- und Nennerpolynom $b(z)$ und $a(z)$ ist genau dann realisierbar, wenn $\text{grad}(b(z)) \leq \text{grad}(a(z))$ oder äquivalent dazu

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |G(z)| < \infty \quad (6.65)$$

gilt.

Anhand des Beispiels

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}\{(y_k)\}}{\mathcal{Z}\{(u_k)\}} = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = z \quad (6.66)$$

erkennt man im Folgenbereich

$$y_k = u_{k+1}, \quad (6.67)$$

dass bei einer nichtrealisierbaren z -Übertragungsfunktion $G(z)$ zur Berechnung der momentanen Ausgangsgröße y_k zukünftige Werte der Eingangsgröße u_k bekannt sein müssen - das System ist also *nicht kausal*.

Im Folgenden sollen analog zum Abschnitt 3.5 zwei kanonische Minimalrealisierungen für die z -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}\{(y_k)\}}{\mathcal{Z}\{(u_k)\}} = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1} + b_n z^n}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n} \quad (6.68)$$

angegeben werden. Die 2-te Standardform oder Beobachtbarkeitsnormalform zu (6.68) lautet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ \vdots \\ x_{n-1,k+1} \\ x_{n,k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-2} \\ \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Gamma} u_k \quad (6.69a)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{b_n}_{d} u_k \quad (6.69b)$$

mit

$$\tilde{b}_i = b_i - a_i b_n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6.70)$$

und das zu (6.69) duale System, die so genannte 1-te Standardform oder Steuerbarkeitsnormalform, ist durch

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ \vdots \\ x_{n-1,k+1} \\ x_{n,k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Phi^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} u_k \quad (6.71a)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_{n-2} & \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Gamma^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{b_n}_{d} u_k \quad (6.71b)$$

gegeben.

6.4.5. BIBO-Stabilität

Auch die Definition und die Sätze der BIBO-Stabilität (**BIBO** - **B**ounded **I**nput **B**ounded **O**utput) von Abschnitt 3.6 lassen sich direkt auf den zeitdiskreten Fall übertragen.

Definition 6.1 (BIBO-Stabilität). Für ein lineares, zeitinvariantes Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma u_k \quad (6.72a)$$

$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d u_k \quad (6.72b)$$

mit der Eingangsgröße (u_k) und der Ausgangsgröße (y_k) gelte $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Das System heißt *BIBO-stabil*, wenn zu jeder beschränkten Eingangsfolge (u_k) eine beschränkte Ausgangsfolge (y_k) gehört. D. h. zu jedem finiten $a > 0$ mit $|u_k| \leq a$ existiert ein finites $b > 0$ so, dass $|y_k| \leq b$ gilt für alle $k > 0$.

Die BIBO-Stabilität lässt sich nun sehr einfach anhand der so genannten *Gewichtsfolge* oder Impulsantwort (g_k) (Antwort (y_k) des Systems (6.72) auf die Eingangsfolge (u_k) = (δ_k) = (1, 0, 0, ...)) mit

$$g_k = \begin{cases} d & \text{für } k = 0 \\ \mathbf{c}^T \Phi^{k-1} \Gamma & \text{für } k > 0 \end{cases} \quad (6.73)$$

überprüfen - es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 6.5 (BIBO-Stabilität anhand der Impulsantwort). Ein lineares, zeitinvariantes Abtastsystem der Form (6.72) ist genau dann BIBO-stabil, wenn die Impulsantwort (g_k) nach (6.73) absolut summierbar ist, d. h. die Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty \quad (6.74)$$

erfüllt ist.

Eine weitere Möglichkeit zur Überprüfung der BIBO-Stabilität erfolgt über die Übertragungsfunktion $G(z)$ von (6.72).

Satz 6.6 (BIBO-Stabilität anhand der Übertragungsfunktion). Ein lineares, zeitinvariantes Abtastsystem der Form (6.72) ist genau dann BIBO-stabil, wenn für alle Pole $z_i = \alpha_i + j\omega_i$ der zugehörigen Übertragungsfunktion $G(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \Gamma + d$ gilt

$$|z_i| = \sqrt{\alpha_i^2 + \omega_i^2} < 1. \quad (6.75)$$

6.5. Diskreter Frequenzgang

Analog zum zeitkontinuierlichen Fall kann auch für Abtastsysteme ein so genannter *diskreter Frequenzgang* definiert werden. Zur Erinnerung an Abschnitt 3.7 sei erwähnt, dass ein BIBO-stabiles System beschrieben durch die Übertragungsfunktion $G(s)$ auf eine harmonische Eingangsgröße $u(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ im eingeschwungenen Zustand mit der Ausgangsgröße $y(t) = A_0 |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \arg(G(j\omega_0)))$ antwortet. Die komplexwertige Funktion $G(j\omega)$ in der reellen Variablen ω wird dann als *kontinuierlicher*

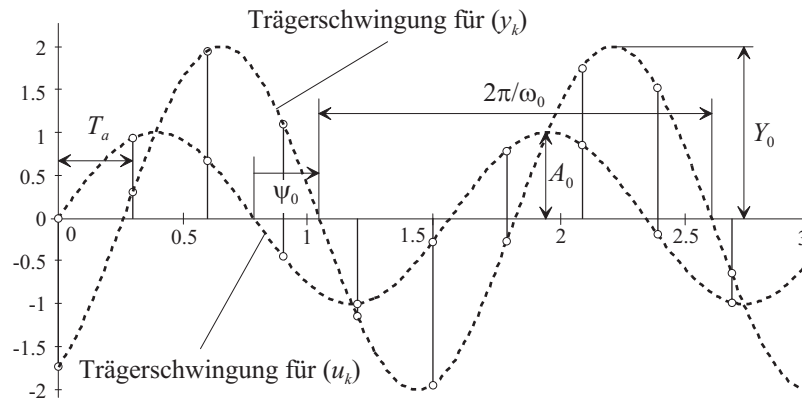


Abbildung 6.9.: Zum diskreten Frequenzgang.

(komplexer) Frequenzgang bezeichnet. Auf analoge Art und Weise lässt sich für ein lineares, zeitinvariantes Abtastsystem gemäß Abbildung 6.5 mit der BIBO-stabilen z -Übertragungsfunktion $G(z)$ der so genannte diskrete Frequenzgang definieren. Dazu betrachte man eine Eingangsfolge (u_k) der Form

$$(u_k) = (A_0 \sin(\omega_0 T_a k + \varphi_0)) \quad , \quad (6.76)$$

deren Trägerschwingung die harmonische Funktion $A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ ist. Unter der Annahme, dass die z -Übertragungsfunktion $G(z)$ keine Null- und Polstellen bei $e^{j\omega_0 T_a}$ besitzt, ergibt sich die Ausgangsfolge im *eingeschwungenen Zustand* (d. h. nach Abklingen der transienten Vorgänge) zu

$$(y_k) = \left(A_0 \left| G \left(e^{j\omega_0 T_a} \right) \right| \sin \left(\omega_0 T_a k + \varphi_0 + \arg \left(G \left(e^{j\omega_0 T_a} \right) \right) \right) \right) \quad . \quad (6.77)$$

Die Beziehung (6.77) lässt sich nun in der Form interpretieren, dass die Ausgangsfolge (y_k) im eingeschwungenen Zustand wieder eine Folge ist, deren Trägerschwingung die gleiche Frequenz ω_0 wie die Trägerschwingung der Eingangsfolge (u_k) hat, lediglich die Amplitude und die Phase ändern sich mit $\left| G \left(e^{j\omega_0 T_a} \right) \right|$ bzw. $\arg \left(G \left(e^{j\omega_0 T_a} \right) \right)$. Abbildung 6.9 veranschaulicht diesen Sachverhalt für $Y_0 = \left| G \left(e^{j\omega_0 T_a} \right) \right| A_0$ und $\psi_0 = \arg \left(G \left(e^{j\omega_0 T_a} \right) \right)$.

Wertet man die Übertragungsfunktion $G(z)$ für $z = e^{sT_a} \Big|_{s=j\omega}$ aus, so ist mit $G \left(e^{j\omega T_a} \right)$ eine komplexwertige Funktion der reellen Größe ω gegeben, die man auch *diskreten Frequenzgang* der Übertragungsfunktion $G(z)$ bezeichnet. Wie man Abbildung 6.10 entnehmen kann, ist die Zuordnung einer Trägerschwingung zu einer Folge von Abtastwerten keinesfalls eindeutig. Man kann nun einfach zeigen, dass eine *eindeutige Zuordnung* zwischen einer harmonischen Trägerschwingung und einer Folge nur dann möglich ist, wenn die Frequenz ω_0 und die Abtastzeit T_a folgender Ungleichung

$$0 \leq \omega_0 < \frac{\pi}{T_a} = \frac{\omega_a}{2} \quad , \quad \omega_a = \frac{2\pi}{T_a} \quad (6.78)$$

genügen. Dies ist auch der Grund, warum in MATLAB der diskrete Frequenzgang lediglich für das Frequenzintervall $0 \leq \omega < \frac{\pi}{T_a}$ mit der Abtastzeit T_a gezeichnet wird. Würde man

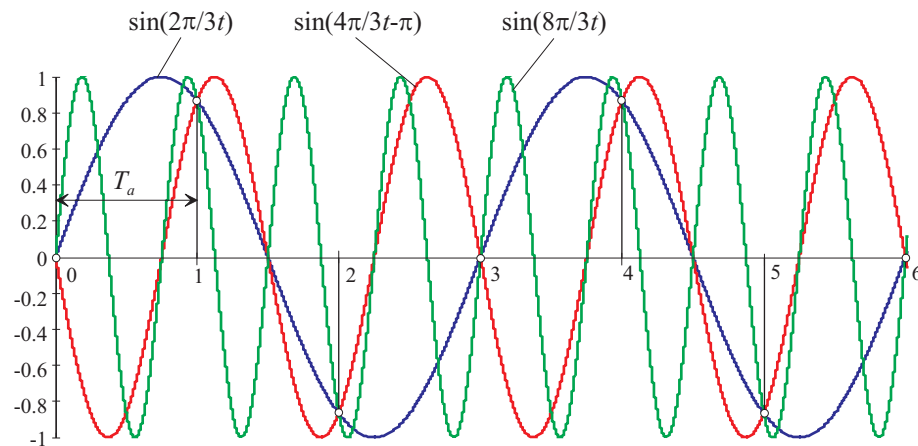


Abbildung 6.10.: Mehrdeutige Zuordnung zwischen Folgenwerten und Trägerschwingung.

nämlich den diskreten Frequenzgang $G(e^{I\omega T_a})$ für Frequenzen $\omega > \frac{\pi}{T_a}$ zeichnen, dann würde sich der Frequenzgang unendlich oft periodisch fortsetzen. Man überzeugt sich leicht, dass für das Frequenzintervall $\frac{\pi}{T_a} \leq \omega < \frac{2\pi}{T_a}$ der Ausdruck $G(e^{I\omega T_a})$ lediglich die konjugiert komplexen Werte von $G(e^{I\omega T_a})$ für $0 \leq \omega < \frac{\pi}{T_a}$ liefert, denn es gilt

$$\begin{aligned} e^{I\omega T_a} &= \cos(\omega T_a) + I \sin(\omega T_a), \\ e^{I(2\pi - \omega T_a)} &= \cos(\omega T_a) - I \sin(\omega T_a) \end{aligned} \quad (6.79)$$

und somit

$$G(e^{I(2\pi - \omega T_a)}) = G^*(e^{I\omega T_a}), \quad (6.80)$$

wobei G^* das konjugiert Komplexe von G bezeichnet. Abbildung 6.11 veranschaulicht diesen Sachverhalt anhand des Frequenzganges der z -Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{0.6321}{z-0.3679}$ als Abtastsystem für das zeitkontinuierliche System mit der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1}{s+1}$ und der Abtastzeit $T_a = 1$ s. Als ein Anwendungsbeispiel soll für das Blockschaltbild von Abbildung 6.12 die Ausgangsfolge (y_k) im eingeschwungenen Zustand für

$$G_1(s) = \frac{6}{s}, \quad (6.81a)$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s+5}, \quad (6.81b)$$

$$d(t) = 3 \cos(2t) \quad (6.81c)$$

berechnet werden.

In einem ersten Schritt wird das Blockschaltbild von Abbildung 6.12 in der Form von Abbildung 6.13 umgezeichnet.

Im eingeschwungenen Zustand gilt für $\tilde{d}(t)$ die Beziehung

$$\tilde{d}(t) = |G_2(2I)| 3 \cos(2t + \arg(G_2(2I))) \quad (6.82)$$

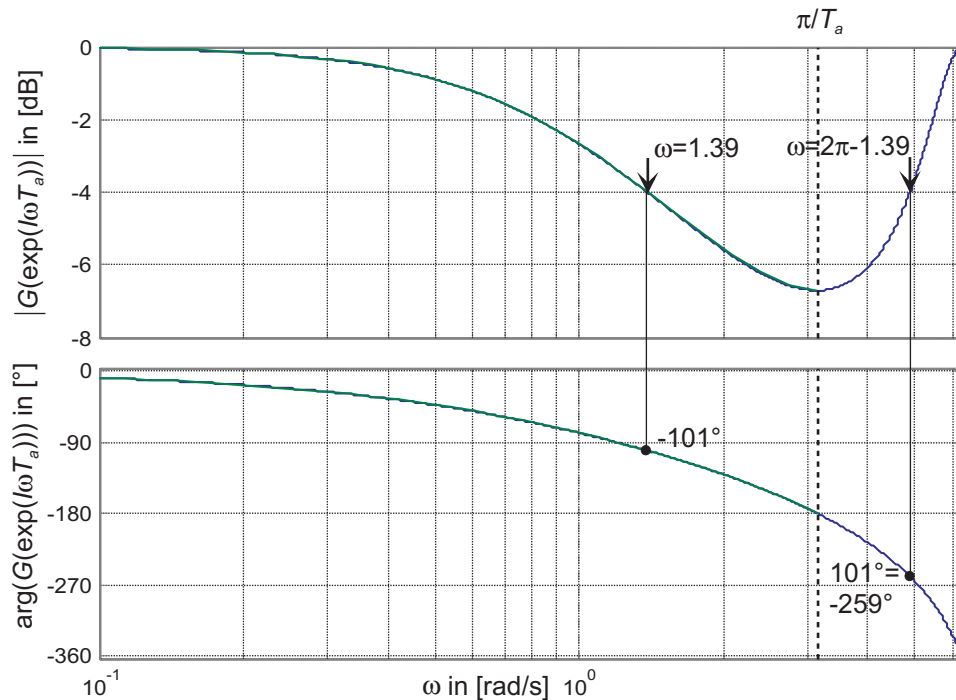


Abbildung 6.11.: Zum diskreten Frequenzgang.

bzw. für das abgetastete Signal $(\tilde{d}_k) = (\tilde{d}(kT_a))$ erhält man

$$(\tilde{d}_k) = |G_2(2I)| 3 \cos(k2T_a + \arg(G_2(2I))) . \quad (6.83)$$

Diese Störfolge (\tilde{d}_k) wirkt nun auf den Regelkreis mit der z -Übertragungsfunktion

$$T_{\tilde{d},y}(z) = \frac{y_z(z)}{\tilde{d}_z(z)} = \frac{1}{1 + G(z)}, \quad G(z) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G_1(s) G_2(s)}{s} \right\} . \quad (6.84)$$

Damit folgt für die Ausgangsfolge (y_k) im eingeschwungenen Zustand

$$(y_k) = \left(\left| T_{\tilde{d},y}(e^{j2T_a}) \right| |G_2(2I)| 3 \cos \left(k2T_a + \arg(G_2(2I)) + \arg(T_{\tilde{d},y}(e^{j2T_a})) \right) \right) . \quad (6.85)$$

Aufgabe 6.14. Berechnen Sie das Ergebnis von (y_k) in (6.85) für $T_a = 1$ s.

Lösung von Aufgabe 6.14. Die Ausgangsfolge (y_k) im eingeschwungenen Zustand lautet

$$(y_k) = (1.0546 \cos(2k - 3.06^\circ)) .$$

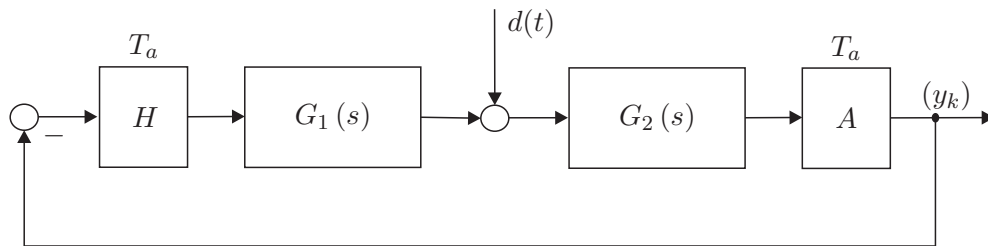


Abbildung 6.12.: Blockschaltbild zum Beispiel für die Berechnung des eingeschwungenen Zustandes.

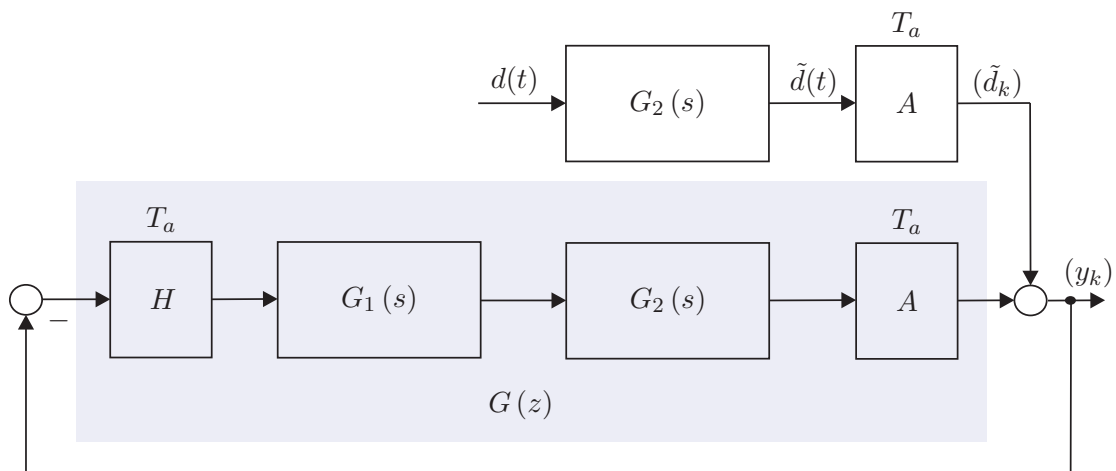


Abbildung 6.13.: Äquivalentes umgezeichnetes Blockschaltbild von Abbildung 6.12.

Der diskrete Frequenzgang $G(z)|_{z=e^{j\omega T_a}}$ ist im Gegensatz zum kontinuierlichen Frequenzgang $G(s)|_{s=j\omega}$ eine *transzendente Funktion* in ω . Dies hat den großen Nachteil, dass die Vorteile der logarithmischen Darstellung im Bode-Diagramm, nämlich auf einfache Art und Weise den Einfluss der Teilsysteme von Serienschaltungen zu erkennen, verloren geht. Aus diesem Grund soll im Weiteren der so genannte *transformierte Frequenzgang* über die *Bilineartransformation nach Tustin* eingeführt werden.

6.6. Tustin-Transformation

Im Sinne der vorigen Überlegungen ist es also das Ziel, die Frequenz ω so zu transformieren, dass in einer *transformierten Frequenz* Ω der Frequenzgang des Abtastsystems eine *rationale* Funktion ist. Dies ist offensichtlich dann möglich, wenn man eine Transformation so findet, dass die obere Hälfte des Einheitskreises $e^{j\omega T_a}$ im Intervall $0 \leq \omega < \frac{\pi}{T_a}$ der komplexen z -Ebene auf die imaginäre Achse in der komplexen w -Ebene abgebildet wird.

Genau dies kann aber mit Hilfe einer bilinearen Transformation der Form

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (6.86)$$

erreicht werden. Setzt man nämlich in (6.86) für $z = e^{I\omega T_a}$ ein, so erhält man

$$\frac{e^{I\omega T_a} - 1}{e^{I\omega T_a} + 1} = \frac{e^{I\frac{\omega T_a}{2}} - e^{-I\frac{\omega T_a}{2}}}{e^{I\frac{\omega T_a}{2}} + e^{-I\frac{\omega T_a}{2}}} = \tanh\left(I\frac{\omega T_a}{2}\right) = I \tan\left(\frac{\omega T_a}{2}\right). \quad (6.87)$$

Bezeichnet man mit v den Imaginärteil der komplexen Variablen w , so ist durch (6.87) die Beziehung

$$v = \tan\left(\frac{\omega T_a}{2}\right) \quad (6.88)$$

gegeben. Es hat sich nun als sinnvoll erwiesen, den Normierungsfaktor $\frac{T_a}{2}$ auch bei der Variablen $v = \frac{T_a}{2}\Omega$ zu verwenden, wodurch sich die so genannte transformierten Frequenz Ω in der Form

$$\Omega = \frac{2}{T_a} \tan\left(\omega \frac{T_a}{2}\right) \quad (6.89)$$

errechnet. Man erkennt unmittelbar, dass durch die Frequenztransformation (6.89) das Intervall der Frequenz $0 \leq \omega < \frac{\pi}{T_a}$ auf das Intervall der transformierten Frequenz $0 \leq \Omega < \infty$ abgebildet wird. Die Abbildung (6.86) lässt sich nun mit $q = \frac{2}{T_a}w$ auf die gesamte komplexe Ebene erweitern

$$q = \frac{2}{T_a} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (6.90)$$

und sie ist, abgesehen vom Punkt $q = \frac{2}{T_a}$, umkehrbar eindeutig mit der inversen Transformation

$$z = \frac{1 + \frac{T_a}{2}q}{1 - \frac{T_a}{2}q}. \quad (6.91)$$

Die Transformation (6.91) wird auch als *Bilineartransformation nach Tustin* bezeichnet. Durch die Vorschrift (6.90) wird nun der Einheitskreis der komplexen z -Ebene auf die imaginäre Achse der komplexen q -Ebene sowie das Innere (Äußere) des Einheitskreises der z -Ebene auf die linke (rechte) offene q -Ebene abgebildet. Abbildung 6.14 veranschaulicht diesen Sachverhalt.

Definition 6.2 (Transformierter Frequenzgang eines Abtastsystems). Unter der q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ zu einer z -Übertragungsfunktion $G(z)$ eines Abtastsystems versteht man die Beziehung

$$G^\#(q) = G(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T_a}{2}q}{1 - \frac{T_a}{2}q}}. \quad (6.92)$$

Die Einschränkung von $G^\#(q)$ auf die imaginäre Achse der komplexen q -Ebene $G^\#(I\Omega)$ bezeichnet man als den *transformierten Frequenzgang*. Der transformierte Frequenzgang $G^\#(I\Omega)$ ist eine algebraische Funktion in Ω und die transformierte

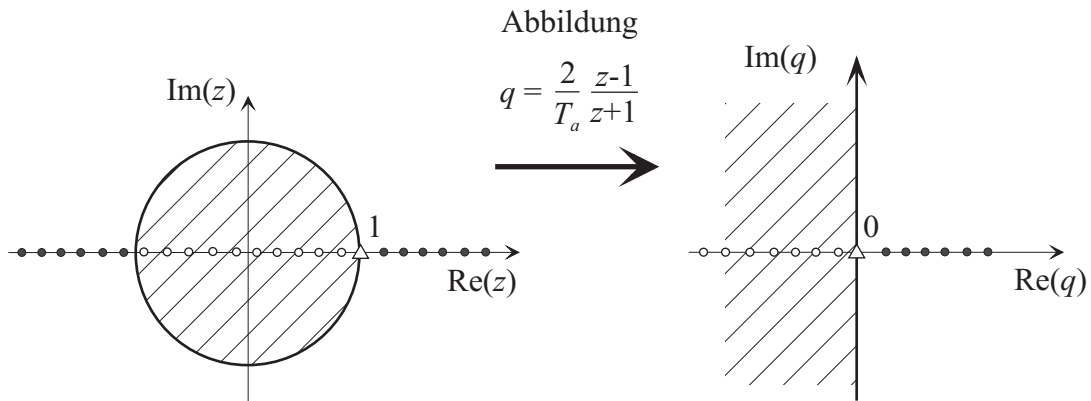


Abbildung 6.14.: Zur Tustin-Transformation.

Frequenz Ω hängt über die Beziehung (6.89) mit der realen Frequenz ω zusammen.

Um nun zu einem kontinuierlichen System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ die q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ des zugehörigen Abtastsystems (siehe Abbildung 6.5) mit der Abtastzeit T_a zu berechnen, müsste man folgende Rechenoperationen

$$G^\#(q) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Bigg|_{z = \frac{1 + \frac{T_a}{2}q}{1 - \frac{T_a}{2}q}} \quad (6.93)$$

durchführen. Es hat sich aber in vielen Fällen ein anderer Weg als sinnvoll erwiesen, nämlich die Übertragungsfunktion $G(s)$ in Partialbrüche zu zerlegen und die q -Übertragungsfunktion direkt über nachfolgende Korrespondenztabelle zu bestimmen.

Aufgabe 6.15. Zeigen Sie die Gültigkeit der Korrespondenzen von Tabelle 6.1 indem Sie die Beziehung (6.93) für die Übertragungsfunktionen $G(s)$ auswerten.

Als Beispiel berechne man die q -Übertragungsfunktion des Abtastsystems mit der kontinuierlichen Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s-5)} \quad (6.94)$$

Die Partialbruchzerlegung von $G(s)$ lautet

$$G(s) = -\frac{5}{3} \frac{1}{1+s} - \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{s}{5}} \quad (6.95)$$

und somit ergibt sich die q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ nach Tabelle 6.1 zu

$$G^\#(q) = -\frac{5}{3} \frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{1 + \frac{q}{A_1}} - \frac{1}{3} \frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{1 + \frac{q}{A_2}}, \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{T_a} \tanh\left(1 \frac{T_a}{2}\right) \\ A_2 &= \frac{2}{T_a} \tanh\left(-5 \frac{T_a}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.96)$$

| $G(s)$ | $G^\#(q)$ | |
|---------------------------------|--|--|
| 1 | 1 | |
| $\frac{1}{s}$ | $\frac{1 - q^{\frac{T_a}{2}}}{q}$ | |
| $\frac{1}{1 + \frac{s}{a}}$ | $\frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{1 + \frac{q}{A}}$ | mit $A = \frac{2}{T_a} \tanh\left(\frac{T_a}{2}a\right)$ |
| $\frac{1}{s^2}$ | $\frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{q^2}$ | |
| $\frac{1}{(1 + \frac{s}{a})^2}$ | $\frac{\left(1 - \frac{T_a}{2}q\right)\left(1 + \frac{q}{B}\right)}{\left(1 + \frac{q}{A}\right)^2}$ | mit $A = \frac{2}{T_a} \tanh\left(\frac{T_a}{2}a\right)$, $B = \frac{A}{1 + aA\frac{T_a^2}{4} - \frac{a}{A}}$ |

Tabelle 6.1.: Korrespondenzen zur q -Übertragungsfunktion.

Der kontinuierliche Frequenzgang $G(I\omega)$ von (6.94) und der transformierte Frequenzgang $G^\#(I\Omega)$ von (6.96) für die Abtastzeiten $T_a = 1, 0.1$ und 0.01 sind Abbildung 6.15 zu entnehmen. Man erkennt aus Abbildung 6.15, dass für kleine Frequenzen ω der kontinuierliche und der transformierte Frequenzgang gleich sind. Im Grenzfall $T_a \rightarrow 0$ geht die q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ eines Abtastsystems nach Abbildung 6.5 in die zugehörige kontinuierliche Übertragungsfunktion $G(s)$ über. Weiters ist aus (6.89) ersichtlich, dass für $\omega T_a \ll 1$ gilt $\tan\left(\omega \frac{T_a}{2}\right) \approx \omega \frac{T_a}{2}$ und damit auch $\Omega \approx \omega$.

Im Nachfolgenden sollen noch einige Eigenschaften der q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ angegeben werden: Dazu betrachte man ein Abtastsystem nach Abbildung 6.5 mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ in normierter Form

$$G(s) = \frac{V z(s)}{s^\rho n(s)}, \quad z(0) = n(0) = 1, \rho = 0, 1, 2, \dots \quad (6.97)$$

mit $\text{grad}(z(s)) < \text{grad}(n(s)) + \rho$. Aus der Korrespondenztabelle 6.1 ist ersichtlich, dass ein Pol $s_i = -a$ von $G(s)$ in einen Pol

$$q_i = -A = -\frac{2}{T_a} \tanh\left(\frac{T_a}{2}a\right) \quad (6.98)$$

von $G^\#(q)$ übergeht. Setzt man in (6.98) für $a = \alpha + I\omega$ ein, so erhält man

$$A = \frac{2 \sinh(T_a\alpha) + I \sin(T_a\omega)}{T_a \cosh(T_a\alpha) + \cos(T_a\omega)}. \quad (6.99)$$

Damit lassen sich folgende Eigenschaften zusammenfassen:

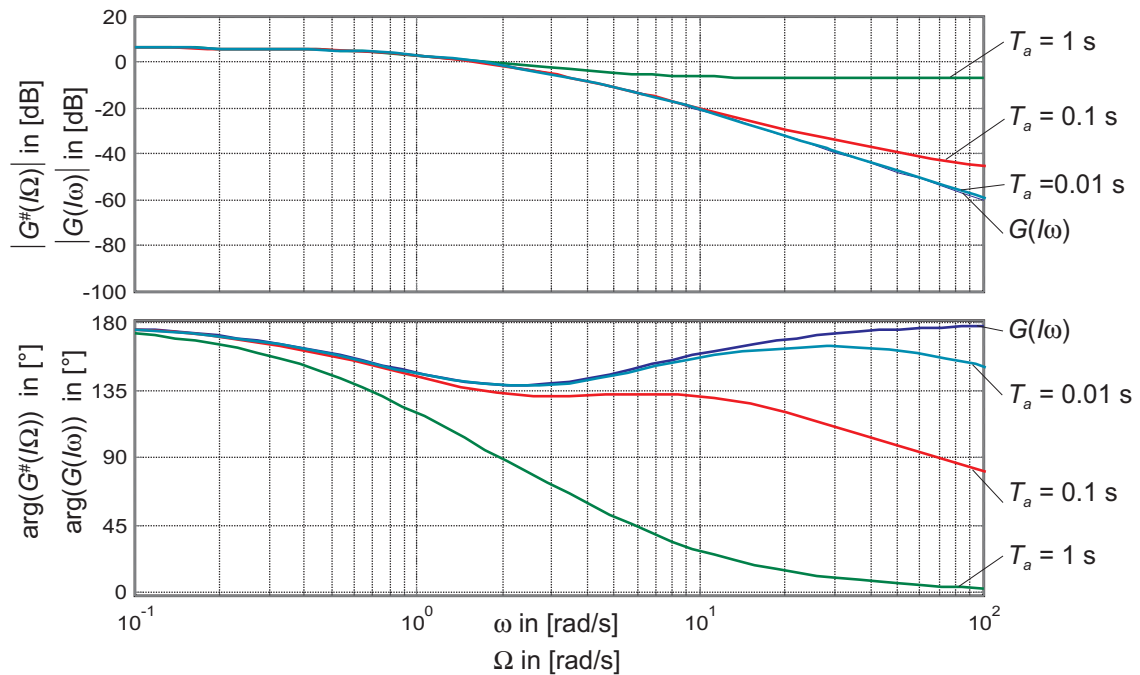


Abbildung 6.15.: Vergleich des kontinuierlichen Frequenzganges mit dem transformierten Frequenzgang für verschiedene Abtastzeiten T_a .

- (1) **Stabilität:** Ein Abtastsystem nach Abbildung 6.5 ist genau dann BIBO-stabil, wenn alle Pole der q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ in der linken offenen q -Halbebene liegen.
- (2) **Verstärkungsfaktor:** Der Verstärkungsfaktor V von $G(s)$ und zugehörigem $G^\#(q)$ sind gleich.
- (3) **Pole:** Aus (6.99) folgt unmittelbar, dass ein komplexwertiger (reeller) Pol von $G(s)$ in einen komplexwertigen (reellen) Pol von $G^\#(q)$ sowie ein stabiler Pol von $G(s)$ in einen stabilen Pol von $G^\#(q)$ übergeht und, dass Pole von $G(s)$ auf der $I\omega$ -Achse auf Pole von $G^\#(q)$ auf der $I\Omega$ -Achse transformiert werden.
- (4) **Sprungfähigkeit:** Zur Erinnerung sei erwähnt, dass $G(s)$ sprunghfähig ist, wenn gilt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \neq 0 \quad (6.100)$$

bzw. in Worten ausgedrückt, der Zähler- und Nennergrad von $G(s)$ sind gleich. Mit der Beziehung $z = e^{sT_a}$ (siehe (B.7)) folgt damit für die z -Übertragungsfunktion $G(z)$, dass $G(z)$ sprunghfähig ist, wenn gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) \neq 0 \quad (6.101)$$

bzw. mit $q = \frac{2}{T_a} \frac{z-1}{z+1}$ (siehe (6.90)) erhält man für die q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ die Bedingung

$$\lim_{q \rightarrow \Omega_0} G^\#(q) \neq 0, \quad \Omega_0 = \frac{2}{T_a}. \quad (6.102)$$

Als Konsequenz muss jede q -Übertragungsfunktion, die zu einer s -Übertragungsfunktion $G(s)$ mit Zählergrad echt kleiner als Nennergrad berechnet wurde, eine Nullstelle bei Ω_0 aufweisen.

- (5) **Realisierbarkeit:** Eine q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ ist genau dann realisierbar, wenn gilt

$$\lim_{q \rightarrow \Omega_0} |G^\#(q)| < \infty, \quad (6.103)$$

d. h., $G^\#(q)$ darf keine Polstelle bei Ω_0 aufweisen.

Aufgabe 6.16. Beweisen Sie die Eigenschaften (1), (2), (3) und (5).

Die Eigenschaften (2), (3) und (4) bedingen, dass die q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ zur Übertragungsfunktion $G(s)$ von (6.97) nachfolgende Struktur hat

$$G^\#(q) = \frac{V}{q^\rho} \frac{Z(q) \left(1 - \frac{q}{\Omega_0}\right)}{N(q)}, \quad Z(0) = N(0) = 1, \rho = 0, 1, 2, \dots \quad (6.104)$$

Aufgabe 6.17. Berechnen Sie die q -Übertragungsfunktionen zu den zeitkontinuierlichen Systemen mit der Übertragungsfunktion

$$G_1(s) = 10 \frac{s-2}{s^2(s-5)},$$

$$G_2(s) = \frac{s}{s-2},$$

$$G_3(s) = 4 \frac{s^2 - 4s + 1}{s^2 + s + 1}$$

für die Abtastzeit $T_a = 0.1$ s.

Hinweis: Überprüfen Sie die Ergebnisse mit MATLAB. Dazu seien folgende Befehle angegeben:

$$G(s) \rightarrow G(z) \quad \text{MATLAB-Befehl:} \quad \text{c2d}(G(s), T_a, \text{'zoh'})$$

$$G(z) \rightarrow G^\#(q) \quad \text{MATLAB-Befehl:} \quad \text{d2c}(G(z), \text{'tustin'})$$

$$G^\#(q) \rightarrow G(z) \quad \text{MATLAB-Befehl:} \quad \text{c2d}(G(q), T_a, \text{'tustin'})$$

Aufgabe 6.18. Gegeben ist das Abtastsystem von Abbildung 6.5 mit dem linearen, zeitinvarianten, zeitkontinuierlichen System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \frac{1}{2} u$$

und der Abtastzeit $T_a = 0.5$ s. Berechnen Sie die Ausgangsfolge (y_k) im eingeschwungenen Zustand für die Eingangsfolge

$$(u_k) = \left(\frac{1^k}{2} \right) + \left(\sin^2 \left(\frac{\pi}{3} k \right) \right) .$$

Hinweis: Berechnen Sie das Ergebnis auf zwei verschiedene Weisen:

- (1) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ und ermitteln Sie die eingeschwungene Lösung über den diskreten Frequenzgang $G(e^{j\omega T_a})$.
- (2) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ und ermitteln Sie die eingeschwungene Lösung über den transformierten Frequenzgang $G^\#(\Omega)$, indem Sie die anregende Frequenz ω_0 über die Beziehung (6.89) in ein Ω_0 umrechnen.

Lösung von Aufgabe 6.18. Die Ausgangsfolge (y_k) im eingeschwungenen Zustand lautet

$$(y_k) = 1.3 - \frac{1}{2} 0.736 \cos \left(\frac{2\pi}{3} k + 26.88^\circ \right) .$$

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass man Abtastsysteme mit Hilfe der q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ im Wesentlichen gleich wie zeitkontinuierliche Systeme mit der s -Übertragungsfunktion $G(s)$ behandeln kann. Da der transformierte Frequenzgang $G^\#(\Omega)$ eine rationale Funktion in der transformierten Frequenz Ω ist, lassen sich Bode-Diagramme und Nyquist-Ortskurven auf gleiche Art und Weise wie im zeitkontinuierlichen Fall für $G(j\omega)$ konstruieren.

6.7. Stabilitätskriterien

Ein Abtastsystem mit der z -Übertragungsfunktion $G(z)$ ist nach Satz 6.6 genau dann BIBO-stabil, wenn alle Pole im offenen Inneren des Einheitskreises liegen oder zufolge von (6.90), (6.91) bzw. Abbildung 6.14 sämtliche Pole der zugehörigen q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ sich in der linken offenen q -Halbebene befinden. Mit Hilfe des numerischen Verfahrens von Routh-Hurwitz (siehe Abschnitt 4.4.1) kann von einem Polynom $n(q)$ ohne explizite Berechnung der Wurzeln festgestellt werden, ob sämtliche Wurzeln von $n(q)$ in der linken offenen q -Halbebene liegen oder nicht, womit für die q -Übertragungs-

funktion $G^\#(q)$ die obige Aufgabe gelöst ist. Bei der z -Übertragungsfunktion $G(z)$ will man nun wissen, ob sämtliche Polstellen im offenen Inneren vom Einheitskreis liegen oder nicht. Analog zur Definition 4.2 eines Hurwitzpolynoms lässt sich auch ein so genanntes Einheitskreispolynom definieren:

Definition 6.3 (Einheitskreispolynom). Man nennt ein Polynom

$$n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (6.105)$$

Einheitskreispolynom, wenn alle Nullstellen von $n(z)$ im offenen Inneren des Einheitskreises der komplexen z -Ebene liegen bzw. für alle Wurzeln z_i , $i = 1, \dots, n$, gilt $|z_i| < 1$.

6.7.1. Numerisches Verfahren von Jury

Allen weiteren Betrachtungen liege ein Polynom der Form (6.105) mit reellen Koeffizienten a_j , $j = 0, \dots, n$, zugrunde. Da das Polynom ausschließlich reelle Koeffizienten besitzt, sind die Nullstellen z_i , $i = 1, \dots, n$, entweder reell oder konjugiert komplex und das Polynom (6.105) lässt sich in der Form

$$n(z) = a_n (z - z_n) (z - z_{n-1}) \dots (z - z_2) (z - z_1) \quad (6.106)$$

darstellen. Aus (6.106) erkennt man, dass der Koeffizient a_0 von (6.105) folgende Darstellung

$$(-1)^n a_0 = a_n \prod_{i=1}^n z_i \quad (6.107)$$

besitzt (*Wurzelsatz von Vieta*). Damit kann unmittelbar anhand der Koeffizienten des Polynoms eine notwendige Bedingung für ein Einheitskreispolynom angegeben werden:

Satz 6.7 (Notwendige Bedingung für ein Einheitskreispolynom). Für die Koeffizienten a_j , $j = 0, \dots, n$, eines Einheitskreispolynoms $n(z)$ muss die Bedingung

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| < 1 \quad (6.108)$$

erfüllt sein.

Aufgabe 6.19. Beweisen Sie Satz 6.7.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für ein Einheitskreispolynom $n(z)$ ist durch das so genannte Jury Verfahren gegeben.

Satz 6.8 (Jury Verfahren). Ein Polynom $n(z)$ der Form (6.105) mit den reellen Koeffizienten a_j , $j = 0, \dots, n$ und $a_n > 0$ ist genau dann ein Einheitskreispolynom, wenn alle Elemente $a_{j,n}$, $j = 0, \dots, n$ der ersten Spalte der nachfolgenden Tabelle

| | | | | | | |
|-----------|--|--|----------|--|-----------------|---|
| z^n | $a_{n,n} = a_n$ | $a_{n,n-1} = a_{n-1}$ | \dots | $a_{n,1} = a_1$ | $a_{n,0} = a_0$ | |
| | $a_{n,0} = a_0$ | $a_{n,1} = a_1$ | \dots | $a_{n,n-1} = a_{n-1}$ | $a_{n,n} = a_n$ | $\lambda_n = \frac{a_{n,0}}{a_{n,n}}$ |
| z^{n-1} | $\underbrace{a_{n,n} - \lambda_n a_{n,0}}_{a_{n-1,n}}$ | $\underbrace{a_{n,n-1} - \lambda_n a_{n,1}}_{a_{n-1,n-1}}$ | \dots | $\underbrace{a_{n,1} - \lambda_n a_{n,n-1}}_{a_{n-1,1}}$ | 0 | |
| | $a_{n-1,1}$ | $a_{n-1,2}$ | \dots | $a_{n-1,n}$ | 0 | $\lambda_{n-1} = \frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,n}}$ |
| | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | | |
| | $a_{0,n}$ | 0 | | | | |

positiv sind. Wenn keines der $a_{j,n}$, $j = 0, \dots, n$, identisch Null ist, dann ist die Anzahl der negativen $a_{j,n}$ gleich der Anzahl der Nullstellen von $n(z)$ außerhalb des Einheitskreises.

Auf einen Beweis dieses Satzes wird hier verzichtet, er ist aber in der angeführten Literatur nachzulesen.

Als Beispiel bestimme man für das Polynom

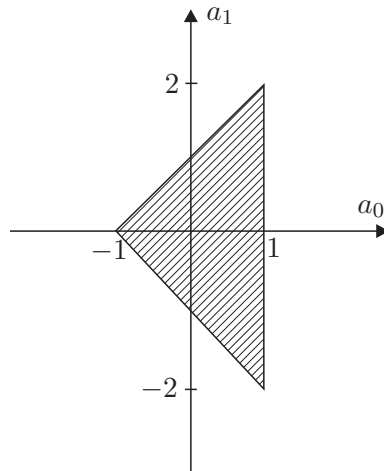
$$n(z) = -z^2 + a_1 z - a_0 \quad (6.109)$$

jene Bedingungen für die Koeffizienten a_0 und a_1 , dass $n(z)$ ein Einheitskreispolynom ist. Die Anwendung des Verfahrens von Jury setzt voraus, dass der höchstwertigste Koeffizient $a_2 > 0$ ist. Um dies zu erfüllen, muss $n(z)$ mit (-1) multipliziert werden, also

$$\tilde{n}(z) = -n(z) = z^2 - a_1 z + a_0. \quad (6.110)$$

Die Tabelle für das Verfahren von Jury lautet:

| | | | | |
|-------|--|------------------|-------|--|
| z^2 | 1 | $-a_1$ | a_0 | |
| | a_0 | $-a_1$ | 1 | $\lambda_2 = a_0$ |
| z^1 | $1 - a_0^2$ | $-a_1 + a_1 a_0$ | 0 | |
| | $-a_1 + a_1 a_0$ | $1 - a_0^2$ | 0 | $\lambda_1 = \frac{-a_1 + a_1 a_0}{1 - a_0^2}$ |
| z^0 | $1 - a_0^2 - \frac{(-a_1 + a_1 a_0)^2}{1 - a_0^2}$ | 0 | | |
| | $1 - a_0^2 - \frac{(-a_1 + a_1 a_0)^2}{1 - a_0^2}$ | 0 | | |

Abbildung 6.16.: Zulässiges Gebiet der Koeffizienten a_0 und a_1 .

Das Polynom $\tilde{n}(z)$ und damit $n(z)$ ist genau dann ein Einheitskreispolynom, wenn die Bedingungen

$$\underbrace{1 - a_0^2 > 0}_{-1 < a_0 < 1} \quad \text{und} \quad \underbrace{\overbrace{(1 - a_0)}^{>0} \overbrace{(a_0 + a_1 + 1)}^{>0} \overbrace{(a_0 - a_1 + 1)}^{>0}}_{\underbrace{(a_0 + 1)}_{a_1 < a_0 + 1 \wedge a_1 > -(a_0 + 1)}} > 0$$

erfüllt sind. Abbildung 6.16 zeigt das zugehörige Gebiet in der (a_0, a_1) -Ebene.

Aufgabe 6.20. Sind nachfolgende Polynome

$$n_1(z) = z^2 - 1.5z + 0.9$$

$$n_2(z) = z^3 + 5z^2 - 0.25z - 1.25$$

$$n_3(z) = z^3 - 1.7z^2 + 1.7z - 0.7$$

Einheitskreispolynome?

Lösung von Aufgabe 6.20. Nur das Polynom $n_1(z)$ ist ein Einheitskreispolynom.

Aufgabe 6.21. Gegeben ist der digitale Regelkreis von Abbildung 6.17 mit

$$G(s) = \frac{6}{s},$$

$$R(z) = \frac{z - A}{z - 1}.$$

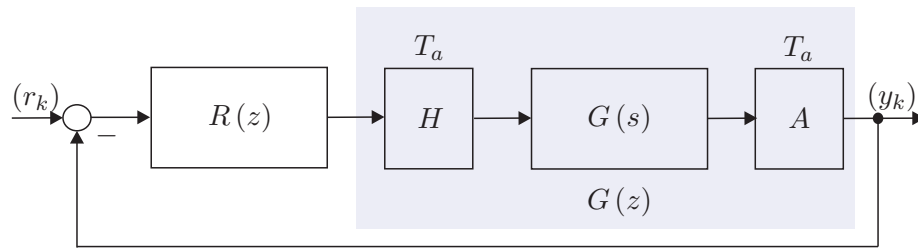


Abbildung 6.17.: Digitaler Regelkreis.

Bestimmen Sie den Wertebereich des Parameters A und der Abtastzeit $T_a > 0$ so, dass der geschlossene Kreis BIBO-stabil ist.

Lösung von Aufgabe 6.21. Der Wertebereich des Parameters A in Abhängigkeit von der Abtastzeit T_a lautet $0 < A < \min\left(1, \frac{1}{3T_a}, -1 + \frac{2}{3T_a}\right)$.

6.7.2. Graphisches Verfahren: Nyquist-Kriterium

Wie im zeitkontinuierlichen Fall (siehe Abschnitt 4.4.3) ist auch bei Abtastsystemen das Nyquist-Kriterium auf Regelkreise der Form nach Abbildung 6.17 mit der q -Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$L^\#(q) = \frac{z_L(q)}{n_L(q)} = R^\#(q) G^\#(q) \quad (6.111)$$

zugeschnitten. Auch hier wird wieder vorausgesetzt, dass der Regelkreis von Abbildung 6.17 *nicht degeneriert* ist, d. h. die Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}^\#(q)$ ist realisierbar ($T_{r,y}(z)$ ist kausal) bzw. es gilt die Bedingung

$$\lim_{q \rightarrow \Omega_0} |T_{r,y}^\#(q)| < \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{q \rightarrow \Omega_0} L^\#(q) \neq -1. \quad (6.112)$$

Damit kann nachfolgender Satz angegeben werden:

Satz 6.9 (BIBO-Stabilität des geschlossenen Kreises). *Der Abtastregelkreis von Abbildung 6.17 mit der q -Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L^\#(q)$ von (6.111) und den teilerfremden Polynomen $z_L(q)$ und $n_L(q)$ ist genau dann BIBO-stabil, wenn gilt*

- (1) $\lim_{q \rightarrow \infty} L^\#(q) \neq -1$ und
- (2) $z_L(q) + n_L(q)$ ist ein Hurwitzpolynom.

Aufgabe 6.22. Zeigen Sie Satz 6.9.

Das Nyquist-Kriterium für Abtastsysteme ist vollkommen identisch zum zeitkontinuierlichen Fall und soll hier der Vollständigkeit halber kurz wiederholt werden (siehe Satz 4.5):

Satz 6.10 (Nyquist-Kriterium). *Der geschlossene Regelkreis $T_{r,y}^\#(q)$ nach Abbildung 6.17 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L^\#(q)$ ist genau dann BIBO-stabil, wenn die stetige Winkeländerung von $1 + L^\#(q)$ folgender Bedingung*

$$\Delta \arg \left(1 + L^\#(\Omega) \right) = (\max(\text{grad}(z_L), \text{grad}(n_L)) - N_-(n_L) + N_+(n_L)) \pi \quad (6.113)$$

genügt, wobei mit $N_-(n_L)$ und $N_+(n_L)$ die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $n_L(q)$ in der linken offenen und in der rechten offenen q -Halbebene gemeint sind.

Aufgabe 6.23. Überprüfen Sie das Ergebnis von Aufgabe 6.21 mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums von Satz 6.10 für die Abtastzeit $T_a = 0.4$ s.

Auch die modifizierte Version des Nyquist-Kriteriums gemäß Satz 4.6 lässt sich auf den zeitdiskreten Fall übertragen.

Dazu betrachte man in einem ersten Schritt die s -Übertragungsfunktion $G(s) = \exp(-sT_t)$ des Totzeit-Systems $y(t) = u(t - T_t)$. Nimmt man nun an, dass die Totzeit T_t ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit T_a ist, also $T_t = nT_a$ mit $n \in \mathbb{N}_0^+$ gilt, dann lauten die zugehörige z - und q -Übertragungsfunktionen

$$G(z) = \left(e^{sT_a} \right)^{-n} = z^{-n} \quad (6.114a)$$

und

$$G^\#(q) = \left(\frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{1 + \frac{T_a}{2}q} \right)^n. \quad (6.114b)$$

Man erkennt, dass in diesem Fall die z - und q -Übertragungsfunktionen des Totzeitgliedes algebraische Funktionen in z bzw. q sind. Der nachfolgende Satz gilt demnach auch für Systeme mit Totzeiten, die die obige Bedingung erfüllen.

Satz 6.11 (Nyquist-Kriterium in Frequenzkennliniendarstellung). *Es sei angenommen, dass sich die Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L^\#(q)$ in folgender Form*

$$L^\#(q) = \frac{V z_L(q)}{q^\rho n_L(q)}, \quad z_L(0) = n_L(0) = 1 \quad (6.115)$$

mit den teilerfremden Polynomen $z_L(q)$ und $q^\rho n_L(q)$ darstellen lässt, wobei nachfolgende Bedingungen erfüllt sind:

- (A) Der Verstärkungsfaktor V ist positiv,
- (B) $\text{grad}(n_L(q)) + \rho \geq \text{grad}(z_L(q))$,
- (C) das Polynom $n_L(q)$ ist ein Hurwitzpolynom und für ρ gilt $\rho \in \{0, 1, 2\}$,

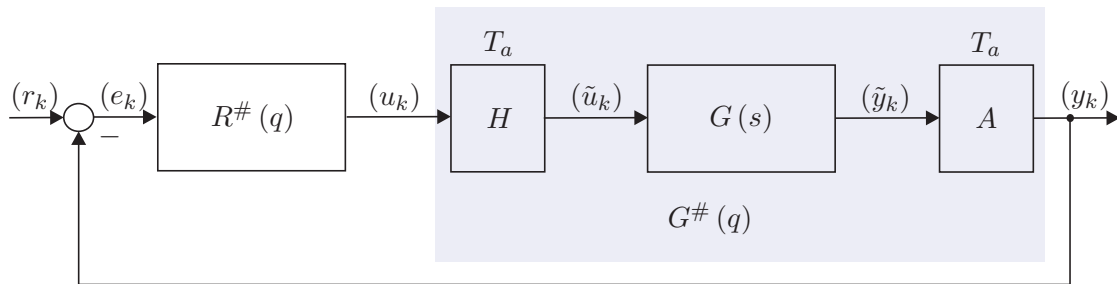


Abbildung 6.18.: Regelkreis mit einem Freiheitsgrad als Basis für das Frequenzkennlinienverfahren für Abtastsysteme.

(D) die Betragskennlinie von $L^\#(\Omega)$ weist genau einen Schnittpunkt mit der 0-dB-Linie (eine Durchtrittsfrequenz Ω_C) auf und verläuft für $\Omega \rightarrow \infty$ unter dieser bzw. die Ortskurve von $L^\#(\Omega)$ schneidet den Einheitskreis genau einmal und verläuft für $\Omega \rightarrow \infty$ innerhalb dieses und

(E) im Bereich $|L^\#(\Omega)|_{\text{dB}} \geq 0$ gelte $-540^\circ < \arg(L^\#(\Omega)) < 180^\circ$ (d. h. die Ortskurve des offenen Kreises $L^\#(\Omega)$ kann vor ihrem Eintauchen in den Einheitskreis den Nullpunkt höchstens einmal vollständig umkreisen).

Unter diesen Voraussetzungen ist der Regelkreis nach Abbildung 6.17 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L^\#(q)$ genau dann BIBO-stabil, wenn der Abstand der Phase an der Durchtrittsfrequenz $\arg(L^\#(\Omega_C))$ zu $-\pi$, die so genannte *Phasenreserve* Φ ,

$$\Phi = \arg(L^\#(\Omega_C)) + \pi \quad (6.116)$$

positiv ist.

6.8. Das Frequenzkennlinienverfahren für Abtastsysteme

Dem Frequenzkennlinienverfahren für Abtastsysteme liegt der Regelkreis von Abbildung 6.18 mit der Führungsfolge (r_k) , der Stellfolge (u_k) , der Regelfehlerfolge (e_k) und der Ausgangsfolge (y_k) zu Grunde. Ausgangspunkt ist wie im Zeitkontinuierlichen (siehe Kapitel 5) die Vorgabe von Kenngrößen zur Charakterisierung des Einschwingverhaltens des geschlossenen Kreises mit der Übertragungsfunktion

$$T_{r,y}(z) = \frac{y_z(z)}{r_z(z)} = \frac{L(z)}{1 + L(z)} = \frac{R^\#(q)G^\#(q)}{1 + R^\#(q)G^\#(q)} \Big|_{q = \frac{z-1}{T_a z+1}} \quad (6.117)$$

als Antwort auf gewisse Testsignale. Dazu betrachte man den in Abbildung 6.19 dargestellten typischen Verlauf der Sprungantwortfolge $(y_k) = (h_k)$ des geschlossenen Kreises für $(r_k) = (1^k)$.

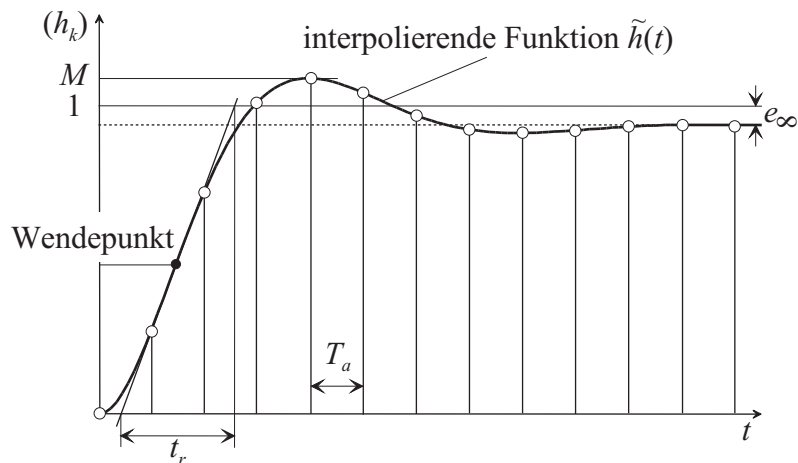


Abbildung 6.19.: Kenngrößen der Sprungantwort des geschlossenen Kreises.

Für eine Folge von Abtastwerten (h_k) ist es schwierig, geeignete Kenngrößen zur Beschreibung des Einschwingverhaltens des geschlossenen Kreises anzugeben. Daher beschreitet man einen indirekten Weg in der Form, dass man zu den Folgenwerten (h_k) eine "möglichst glatte" *interpolierende Zeitfunktion* $\tilde{h}(t)$ mit $\tilde{h}(kT_a) = h_k$ sucht und die Kenngrößen zur Charakterisierung der Sprungantwortfolge (h_k) an Hand der interpolierenden Zeitfunktion $\tilde{h}(t)$ definiert, nämlich

- (1) die *Anstiegszeit* t_r als Maß für die Schnelligkeit (Dynamik),
- (2) die *Überschwingweite* M oder das *prozentuelle Überschwingen* $\ddot{u} = (M - 1) 100$ als Maß für den Dämpfungsgrad (Dynamik) sowie
- (3) die *bleibende Regelabweichung* e_∞ als Maß für die stationäre Genauigkeit.

Diese *Kenngrößen des zeitlichen Verhaltens* der Sprungantwort des geschlossenen Kreises von Abbildung 6.18 können nun über *empirische Näherungsbeziehungen* mit dem *transformierten Frequenzgang des offenen Kreises* $L^\#(\Omega)$ in Zusammenhang gebracht werden.

- (1) Die *Anstiegszeit* t_r hängt mit der *Durchtrittsfrequenz* Ω_C über die Näherungsbeziehung

$$\Omega_C t_r \approx 1.2 \quad \text{falls} \quad \Omega_C \leq 0.2\Omega_0 \quad \text{mit} \quad \Omega_0 = \frac{2}{T_a} \quad (6.118)$$

zusammen. Dabei wird wiederum vorausgesetzt, dass die Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L^\#(q)$ in der Form (6.115) angegeben werden kann und die Bedingungen von Satz 6.11 erfüllt sind. Da der Betragsgang von $L^\#(q)$ nur einen Schnittpunkt mit der 0-dB-Linie hat, trennt die Durchtrittsfrequenz Ω_C jene Frequenzen, die vom offenen Regelkreis verstärkt werden, von jenen, die vom offenen Regelkreis

abgeschwächt werden. Damit ist die Durchtrittsfrequenz Ω_C wiederum ein Maß für die Bandbreite des offenen Kreises und bei steigendem Ω_C wird dementsprechend auch die Dynamik des geschlossenen Kreises schneller.

- (2) Das *prozentuelle Überschwingen* \ddot{u} kann über die empirische Näherungsbeziehung

$$\Phi [^\circ] + \ddot{u}[\%] \approx 70 \quad (6.119)$$

mit der Phasenreserve Φ von (6.116) in Verbindung gebracht werden. Nach Satz 6.11 ist die Phasenreserve Φ ein Maß für den Abstand zur Stabilitätsgrenze. Dies hat zur Konsequenz, dass eine Verminderung der Phasenreserve Φ eine Zunahme der Schwingneigung bzw. des Überschwingens mit sich bringt.

- (3) Die *bleibende Regelabweichung*

$$e_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (r_k - y_k) \quad (6.120)$$

steht nun direkt mit dem *Verstärkungsfaktor* V der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L^\#(q)$ in Verbindung. Unter der Voraussetzung, dass der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist, kann für (6.120) unmittelbar der Endwertsatz der z -Transformation angewandt werden, und man erhält für e_∞ die Beziehung

$$e_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) e_z(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{1}{1 + L(z)} r_z(z) . \quad (6.121)$$

Für $(r_k) = (1^k)$ also $r_z(z) = \frac{z}{z-1}$ ergibt sich (6.121) zu

$$e_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + L(z)} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L^\#(q)} \quad (6.122)$$

bzw. mit $L^\#(q)$ als Übertragungsfunktion gemäß (6.115) folgt e_∞ zu

$$e_\infty = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{q^\rho n_L(q)}{q^\rho n_L(q) + V z_L(q)}, \quad n_L(0) = z_L(0) = 1, \rho \in \{0, 1, 2\} . \quad (6.123)$$

Damit lautet die bleibende Regelabweichung e_∞ für die Eingangsfolge $(r_k) = (1^k)$

$$\begin{aligned} e_\infty &= \frac{1}{1 + V} && \text{für } \rho = 0 \\ e_\infty &= 0 && \text{für } \rho = 1 \\ e_\infty &= 0 && \text{für } \rho = 2 . \end{aligned} \quad (6.124)$$

Es zeigt sich also auch hier, dass die Verhältnisse vollkommen analog zu zeitkontinuierlichen Systemen sind.

Aufgabe 6.24. Zeigen Sie, dass für die Eingangsfolge $(r_k) = (kT_a)$ gilt

$$\begin{aligned} e_\infty &= \infty && \text{für } \rho = 0 \\ e_\infty &= \frac{1}{V} && \text{für } \rho = 1 \\ e_\infty &= 0 && \text{für } \rho = 2. \end{aligned} \quad (6.125)$$

Es hat sich nun gezeigt, dass die *empirischen Näherungsbeziehungen* (6.118) und (6.119) für jene Abtastsysteme zweckmäßig sind, zu deren Sprungantwortfolge (h_k) eine interpolierende Zeitfunktion $\tilde{h}(t)$ gemäß Abbildung 6.19 existiert, die sich in erster Näherung durch die Sprungantwort eines P-T₂-Gliedes beschreiben lässt.

Damit ergibt sich die *Vorgangsweise für den Reglerentwurf von Abtastsystemen nach dem Frequenzkennlinienverfahren* wie folgt:

- (A) Für einen Abtastregelkreis nach Abbildung 6.18 mit gegebener Streckenübertragungsfunktion $G(s)$ müssen in einem ersten Schritt die gewünschten Kenngrößen des Einschwingverhaltens des geschlossenen Kreises (t_r , M oder \ddot{u} und e_∞) spezifiziert werden.
- (B) Zu der Streckenübertragungsfunktion $G(s)$ muss eine geeignete Abtastzeit T_a gewählt werden, die sich einerseits nach Abschnitt 6.4.2 (siehe Beziehung (6.62)) und andererseits nach der Anforderung an die Anstiegszeit t_r der Sprungantwort des geschlossenen Kreises (siehe Beziehung (6.118)) orientiert. Anschließend wird für die gewählte Abtastzeit T_a zu $G(s)$ die q -Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ berechnet.
- (C) Die Kenngrößen t_r , M oder \ddot{u} und e_∞ werden mit Hilfe der Beziehungen (6.118), (6.119) und (6.124) bzw. (6.125) in Vorgaben an den transformierten Frequenzgang des offenen Kreises $L^\#(\Omega)$ übersetzt.
- (D) Ein Regler $R^\#(q)$ muss nun so gewählt werden, dass der geschlossene Kreis BIBO-stabil ist und die Forderungen von (C) erfüllt werden. Erfüllt die Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L^\#(q) = R^\#(q)G^\#(q)$ die Bedingungen von Satz 6.11, dann kann die Stabilität des geschlossenen Kreises anhand der Phasenreserve Φ beurteilt werden, anderenfalls muss man das Nyquist-Kriterium von Satz 6.10 anwenden.
- (E) Um ein kriechendes Einlaufen der Sprungantwort in den stationären Endwert zu vermeiden, soll in (D) der Regler $R^\#(q)$ so entworfen werden, dass ca. 1 Dekade um die Durchtrittsfrequenz Ω_C die Betragskennlinie von $L^\#(q)$ mit mindestens 20 dB/Dekade abfällt.
- (F) Der Regler $R^\#(q)$ wird mit Hilfe der Beziehung (6.90) in den z -Bereich transformiert und zur Implementation des Reglers $R(z)$ am Digitalrechner muss für $R(z)$ eine Zustandsdarstellung in Form eines Differenzgleichungssystems (siehe 1-te oder 2-te Standardform (6.69) - (6.71)) ermittelt werden.
- (G) Die Qualität des Entwurfes ist immer durch Simulation zu überprüfen, insbesondere auch deshalb, weil das Verfahren sich auf empirische Formeln stützt. Sind die

Ergebnisse nicht zufriedenstellend, dann muss man sich die Frage stellen, ob die Anforderungen von (A) überhaupt prinzipiell erfüllbar sind, oder ob ein anderer Regler $R^\#(q)$ von (D) die Situation verbessern würde.

- (H) Die Begrenzung der Stellfolge u_k , die bei jedem technisch relevanten Prozess vorhanden ist, kann im Rahmen dieses einfachen Entwurfsverfahrens nicht systematisch berücksichtigt werden. Sollte sich bei der Simulation herausstellen, dass man zuviel Stellgröße benötigt, dann muss man die Anforderungen in (A) entsprechend verändern, also die Anstiegszeit t_r vergrößern. Im Rahmen einer Führungsregelung sollte auf keinen Fall eine Sprungfolge sondern immer die Abtastfolge eines hinreichend glatten Interpolationssignals als Führungsfolge verwendet werden (man wiederhole dazu die Überlegungen von Abschnitt 4.3).

6.8.1. Einige Übertragungsglieder

Die Übertragungsglieder von Abschnitt 3.8 lassen sich im Wesentlichen direkt vom s - in den q -Bereich übertragen. Im Folgenden sollen nur einige wenige erläutert werden:

Integrator (I-Glied, I-Regler)

Die q -Übertragungsfunktion eines I-Regler lautet

$$R^\#(q) = \frac{V_I \left(1 - \frac{q}{\Omega_0}\right)}{q} \quad (6.126)$$

mit der zugehörigen z -Übertragungsfunktion

$$R(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = \frac{T_a V_I}{z - 1} \quad (6.127)$$

und der Differenzgleichung

$$x_{k+1} = x_k + T_a V_I u_k \quad (6.128a)$$

$$y_k = x_k \cdot \quad (6.128b)$$

Proportional-Integral-Glied (PI-Glied, PI-Regler)

Die q -Übertragungsfunktion eines PI-Reglers hat die Form

$$R^\#(q) = \frac{V_I (1 + qT_I)}{q} \quad (6.129)$$

mit der zugehörigen z -Übertragungsfunktion

$$R(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = V_I \left(T_I + \frac{T_a}{2} \right) + \frac{T_a V_I}{z - 1} \quad (6.130)$$

und der Differenzgleichung

$$x_{k+1} = x_k + T_a V_I u_k \quad (6.131a)$$

$$y_k = x_k + V_I \left(T_I + \frac{T_a}{2} \right) u_k \cdot \quad (6.131b)$$

Differenzierer (D-Glied, D-Regler)

Im Gegensatz zum zeitkontinuierlichen Fall ist der D-Regler

$$R^\#(q) = V_D q \quad (6.132)$$

im q -Bereich sehr wohl realisierbar (vergleiche dazu (6.103)). Trotzdem wird er im Rahmen des Reglerentwurfes nicht verwendet, denn

- (1) die zugehörige z -Übertragungsfunktion

$$R(z) = V_D \frac{2}{T_a} \frac{z-1}{z+1} \quad (6.133)$$

zeigt, dass der D-Regler (6.132) instabil ist und

- (2) da im Allgemeinen der Zähler- und Nennergrad der q -Übertragungsfunktion eines Abtastsystems gleich sind, bedingt ein D-Regler der Form (6.132), dass der Zählergrad des offenen Kreises um Eins größer als der Nennergrad ist und somit gilt $\lim_{q \rightarrow \infty} L^\#(q) = \infty$. Damit erfüllt $L^\#(q)$ sicher nicht die Bedingung (D) von Satz 6.11 und das vorher besprochene Frequenzkennlinienverfahren für Abtastsysteme ist nicht anwendbar.

Um eine Version des D-Reglers zu erhalten, der diese negativen Eigenschaften nicht besitzt, fügt man im Nenner einen Term in der Form (D-T₁-Glied)

$$R^\#(q) = \frac{V_D q}{1 + q/q_R}, \quad q_R \gg \quad (6.134)$$

mit $q_R > 0$ hinzu (vergleiche auch Abbildung 3.23).

Aufgabe 6.25. Geben Sie die q - und die z -Übertragungsfunktionen sowie die Zustandsrealisierung als Differenzgleichungssystem eines Proportional-Gliedes (P-Glied, P-Regler), eines Proportional-Differential-Glied (PD-Glied, PD-Regler), eines Lead-Gliedes (PD-T₁-Glied), eines Lag-Gliedes (PP-T₁-Glied) sowie eines Proportional-Differential-Integral-Gliedes (PID-Glied, PID-Regler) an.

Hinweis: Die q -Übertragungsfunktionen sind identisch zu den gleichnamigen s -Übertragungsfunktionen von Abschnitt 3.8.

6.8.2. PI-Reglerentwurf im q -Bereich

- (A) Streckenübertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1.8 \left(\frac{s}{5} + 1 \right)}{1 + 2 \times 0.8 \frac{s}{2.8} + \left(\frac{s}{2.8} \right)^2} \quad (6.135)$$

Entwurfsvorgaben: $t_r = 0.5$ s, $\ddot{u} = 5\%$ und $e_\infty|_{(r_k)=(1^k)} = 0$

- (B) Wahl der Abtastzeit: Im Abschnitt 6.4.2 wurde gezeigt, dass für die Wahl der Abtastzeit T_a die Anstiegszeiten der Strecke ein maßgebendes Kriterium sind. Die Anstiegszeit $t_{r,G}$, bedingt durch den quadratischen Term im Nenner von (6.135), errechnet sich nach (6.61) mit $T = 1/2.8$ und $\xi = 0.8$ zu

$$t_{r,G} = T \exp\left(\frac{\arccos(\xi)}{\tan(\arccos(\xi))}\right) = 0.842\text{s} . \quad (6.136)$$

Weiters muss für die Anwendung des Frequenzkennlinienverfahrens die Bedingung (6.118)

$$\Omega_C = \frac{1.2}{t_r} = \frac{1.2}{0.5} \leq 0.2 \underbrace{\frac{2}{T_a}}_{\Omega_0} \quad \text{bzw.} \quad T_a \leq 0.166\text{s} \quad (6.137)$$

erfüllt sein. Damit lautet die für die Wahl der Abtastzeit T_a maßgebende Bedingung

$$T_a = \min\left(\frac{t_{r,G}}{10} \text{ bis } \frac{t_{r,G}}{4}, \leq 0.166\right) = \min(0.0842 \text{ bis } 0.2105, \leq 0.166) . \quad (6.138)$$

Für den weiteren Reglerentwurf wird nun die Abtastzeit $T_a = 0.15$ s gewählt und die zugehörige q -Übertragungsfunktion errechnet sich damit zu

$$G^\#(q) = \frac{1.8 \left(1 - \frac{q}{13.33}\right) \left(1 + \frac{q}{4.867}\right)}{1 + 2 \times 0.808 \frac{q}{2.788} + \left(\frac{q}{2.788}\right)^2} . \quad (6.139)$$

- (C) Vorgaben an den transformierten Frequenzgang des offenen Kreises $L^\#(i\Omega)$: $\Omega_C = 2.4 \text{ s}^{-1}$, $\Phi = 65^\circ$ und der offene Kreis $L^\#(q)$ muss nach (6.124) einen Integrator besitzen.

- (D) Als Regler wird ein PI-Regler der Form

$$R^\#(q) = \frac{V_I (1 + qT_I)}{q} \quad (6.140)$$

gewählt. Der PI-Reglerentwurf erfolgt vollkommen analog zu Abschnitt 5.1. Als Ergebnis erhält man die Reglerübertragungsfunktion

$$R^\#(q) = \frac{1.305 (1 + 0.33q)}{q} . \quad (6.141)$$

- (E) Der Punkt (E) soll die nächste Aufgabe sein:

Aufgabe 6.26. Überprüfen Sie die Einhaltung der Entwurfsforderungen anhand des Bode-Diagramms von $L^\#(q) = R^\#(q) G^\#(q)$.

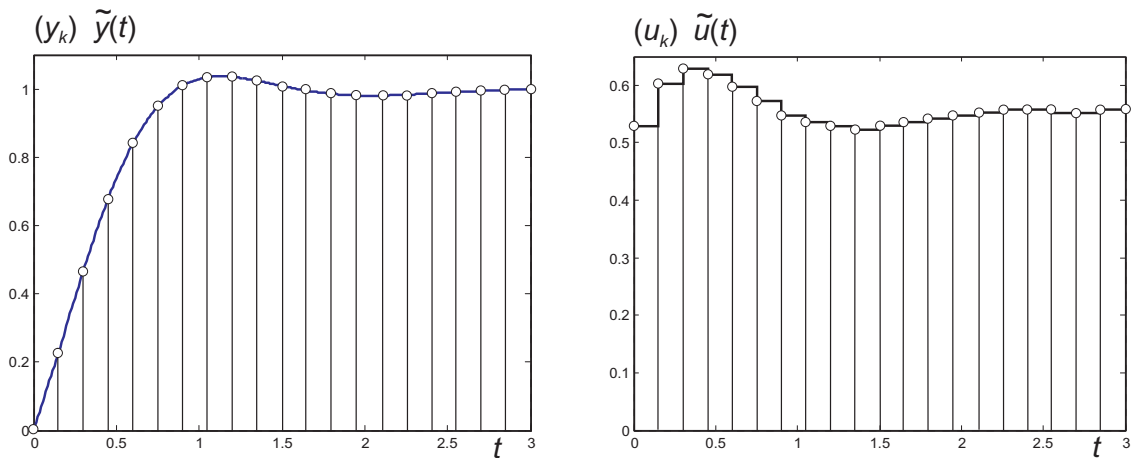


Abbildung 6.20.: Ausgangsfolge (y_k) und Stellfolge (u_k) des geschlossenen Kreises zum Beispiel PI-Reglerentwurf im q -Bereich.

(F) Die z -Übertragungsfunktion des Reglers (6.141) lautet

$$R(z) = \frac{u_z(z)}{e_z(z)} = \frac{0.5292z - 0.3334}{z - 1} \quad (6.142)$$

und die im Digitalrechner zu implementierende Differenzgleichung nach der 1-ten Standardform ergibt sich zu

$$x_{k+1} = x_k + \underbrace{(r_k - y_k)}_{e_k} \quad (6.143a)$$

$$u_k = 0.1958x_k + 0.5292 \underbrace{(r_k - y_k)}_{e_k} . \quad (6.143b)$$

(G) Die Sprungantwort $\tilde{y}(t)$, die Sprungantwortfolge (y_k) des geschlossenen Kreises sowie die zugehörige Stellfolge (u_k) und die Stellgröße $\tilde{u}(t)$ nach Abbildung 6.18 sind Abbildung 6.20 zu entnehmen.

(H) In diesem Beispiel wurden keine Anforderungen an die Stellfolge gestellt.

Aufgabe 6.27. Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0.5}{s(1 + 2 \times 0.707s + s^2)}$$

einen Abtastregler für die Abtastzeit $T_a = 0.5$ s so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Spezifikationen $t_r = 2$ s, $\ddot{u} = 20\%$, $e_\infty|_{(r_k)=(kT_a)} = 0.4$

erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

Lösung von Aufgabe 6.27. Transformieren Sie $G(s)$ in den q -Bereich, kompensieren Sie mit dem Regler $R^\#(q)$ sämtliche Pol- und Nullstellen von $G^\#(q)$ mit negativem Realteil und erweitern Sie den Regler durch ein Lag-Glied. Ein möglicher Regler, der diese Anforderung erfüllt, lautet

$$R^\#(q) = 5 \frac{(1 + 2 \times 0.722q + q^2) \left(1 + \frac{q}{0.269}\right)}{\left(1 + \frac{q}{4}\right) \left(1 + \frac{q}{6.32}\right) \left(1 + \frac{q}{0.059}\right)}.$$

Aufgabe 6.28. Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\frac{s}{1.8} + 1}{s \left(1 + 2 \times 0.8 \frac{s}{2.8} + \left(\frac{s}{2.8}\right)^2\right)}$$

einen Abtastregler für die Abtastzeit $T_a = 0.02$ s so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Spezifikationen $t_r = 0.1$ s, $\ddot{u} = 20\%$, $e_\infty|_{(r_k)=(kT_a)} = 0.01$ erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

Lösung von Aufgabe 6.28. Transformieren Sie $G(s)$ in den q -Bereich und entwerfen Sie einen Lead-Lag-Regler. Ein möglicher Regler, der diese Anforderung erfüllt, lautet

$$R^\#(q) = 100 \left(\frac{1 + 0.2547q}{1 + 0.02727q} \right) \left(\frac{1 + 0.4208q}{1 + 3.971q} \right).$$

Aufgabe 6.29. Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{5}{s \left(1 + 2 \times 0.5 \frac{s}{10} + \left(\frac{s}{10}\right)^2\right)}$$

einen Abtastregler für die Abtastzeit $T_a = 0.05$ s so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Spezifikationen $t_r = 0.2$ s, $\ddot{u} \approx 0\%$, $e_\infty|_{(r_k)=(1^k)} = 0$ erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

Lösung von Aufgabe 6.29. Ein möglicher Regler, der diese Anforderung erfüllt, lautet

$$R^\#(q) = 0.9 \frac{1 + \frac{q}{9.9}}{1 + \frac{q}{200}}.$$

Aufgabe 6.30. Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0.7594}{\left(1 + \frac{s}{0.1963}\right) \left(1 + 2 \times 0.1517 \frac{s}{5.945} + \left(\frac{s}{5.945}\right)^2\right)}$$

einen Abtastregler für die Abtastzeit $T_a = 0.1$ s so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Spezifikationen $t_r = 2$ s, $\ddot{u} \approx 0\%$, $e_\infty|_{(r_k)=(1^k)} = 0$ erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

Hinweis: Führen Sie den Entwurf zuerst mit einem PI-Regler durch und vergleichen Sie das Ergebnis mit einem Kompensationsregler der Form

$$R^\#(q) = V_R \frac{\left(1 + \frac{q}{a}\right) \left(1 + 2\xi Tq + (Tq)^2\right)}{q^\lambda \left(1 + \frac{q}{b}\right)^2}.$$

Aufgabe 6.31. Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0.22}{1 + 3.3599 \cdot 10^{-3} s + 2.8145 \cdot 10^{-6} s^2}$$

einen Abtastregler für die Abtastzeit $T_a = 0.03$ s so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Spezifikationen $t_r \leq 0.06$ s, $\ddot{u} \leq 10\%$, $e_\infty|_{(r_k)=(1^k)} \leq 0.01$ erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation in MATLAB/SIMULINK.

Hinweis: Führen Sie den Entwurf im q -Bereich mit einem Lead-Lag-Regler durch.

6.9. Literatur

- [6.1] J. Ackermann, *Abtastregelung*, 3. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 1988.
- [6.2] K. J. Åström und B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems*, 3. Aufl. New Jersey: Prentice Hall, 1997.
- [6.3] G. F. Franklin, J. D. Powell und M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*. California: Addison Wesley, 1998.
- [6.4] F. Gausch, A. Hofer und K. Schlacher, *Digitale Regelkreise*. München: Oldenbourg, 1991.
- [6.5] R. Isermann, *Digitale Regelkreise*, 2. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 1988, Bd. I.
- [6.6] G. Ludyk, *Theoretische Regelungstechnik 1*. Berlin Heidelberg: Springer, 1995.
- [6.7] J. Lunze, *Regelungstechnik 1*, 5. Aufl. Berlin Heidelberg New York: Springer, 2006.
- [6.8] ———, *Regelungstechnik 2*, 3. Aufl. Berlin Heidelberg New York: Springer, 2005.
- [6.9] A. Weinmann, *Regelungen: Analyse und technischer Entwurf*, 3. Aufl. Wien New York: Springer, 1998, Bd. 1 und 2.