

7. Erreichbarkeit/Beobachtbarkeit

In Satz 3.5 wurde gezeigt, dass die Pole einer Übertragungsfunktion

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (7.1)$$

auch Eigenwerte der Dynamikmatrix \mathbf{A} sind, die Umkehrung hingegen im Allgemeinen nicht gilt. Als elektrisches Beispiel betrachte man dazu die Brückenabgleichschaltung von Abbildung 7.1 mit der Versorgungsspannung u_a als Eingangs- und der Brückendiagonalspannung u_d als Ausgangsgröße.

Das zugehörige mathematische Modell lautet

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & 0 \\ 0 & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2 C} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u_a \quad (7.2a)$$

$$u_d = \begin{bmatrix} -1 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} \quad (7.2b)$$

und die Übertragungsfunktion errechnet sich in der Form

$$G(s) = \frac{\hat{u}_d}{\hat{u}_a} = \frac{s(CR_1R_2 - L)}{(sR_2C + 1)(sL + R_1)}. \quad (7.3)$$

Setzt man nun die sogenannte Brückenbedingung

$$\frac{I\omega L}{I\omega C} = R_1R_2 \quad \text{bzw.} \quad L = CR_1R_2 \quad (7.4)$$

in (7.3) ein, so ergibt sich (7.3) zu

$$G(s) = 0 \quad . \quad (7.5)$$

Man erkennt also, dass für die Wahl der Bauelemente nach der Brückenbedingung von (7.4) keiner der beiden Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} von (7.2) als Pol der Übertragungsfunktion auftritt. Die nachfolgende Aufgabe zeigt ein mechanisches System, wo dieser Effekt ebenfalls auftritt.

Aufgabe 7.1. Berechnen Sie das mathematische Modell des Systems Wagen mit inversem Pendel von Abbildung 7.2.

Verwenden Sie dazu die Zustandsgrößen $\mathbf{x}^T = [\varphi, \dot{\varphi}, z, \dot{z}]$, die Eingangsgröße $u = F_{ext}$ und die Ausgangsgröße $y = \varphi$. Linearisieren das mathematische Modell um die obere Ruhelage $\mathbf{x}_R^T = [0 \ 0 \ z_R \ 0]$ mit z_R konstant aber beliebig und berechnen Sie die

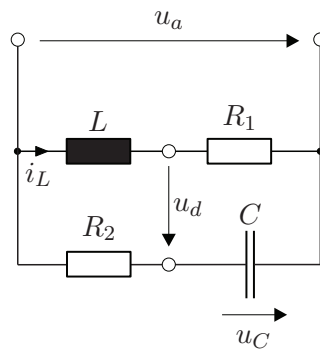


Abbildung 7.1.: Brückenabgleichschaltung.

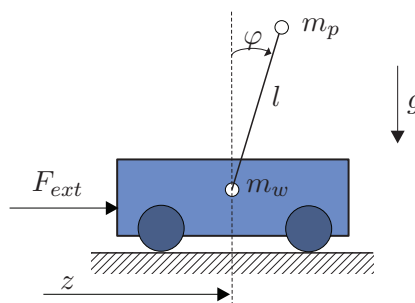


Abbildung 7.2.: Wagen mit inversem Pendel.

Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\Delta \hat{y}}{\Delta \hat{u}}$.

Lösung von Aufgabe 7.1. Das linearisierte System um die obere Ruhelage errechnet sich zu

$$\frac{d}{dt} \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(m_W + m_P)g}{lm_W} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m_P g}{m_W} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ m_W \end{bmatrix} \Delta F_{ext}$$

$$\Delta y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \Delta \mathbf{x}$$

mit der zugehörigen Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\Delta \hat{y}}{\Delta \hat{u}} = \frac{-1}{s^2 m_W l - (m_W + m_P) g}.$$

Als letztes Beispiel berechne man zum linearen, zeitinvarianten, zeitkontinuierlichen

System

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u \quad (7.6a)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x} \quad (7.6b)$$

sowie zum zugehörigen Abtastsystem mit der Abtastzeit $T_a = \pi$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -e^{-2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\pi} & 0 \\ \frac{1}{5}(e^{-2\pi} + e^\pi) & \frac{2}{5}(e^{-2\pi} + e^\pi) & e^\pi \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2\pi} + 1 \\ \frac{8}{5}e^\pi - 2 - \frac{2}{5}e^{-2\pi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}} u_k \quad (7.7a)$$

$$\mathbf{y}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x}_k \quad (7.7b)$$

die Übertragungsfunktionen

$$G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{6s + 10}{(s^2 + 4s + 5)(s - 1)} \quad (7.8)$$

sowie

$$G(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)} = \frac{2 - 4 + 5e^\pi + e^{3\pi} + 4e^{3\pi}z - 5ze^{2\pi} - z}{5(z e^{2\pi} + 1)(z - e^\pi)}. \quad (7.9)$$

Man erkennt, dass im zeitkontinuierlichen Fall die Dimension der Matrix \mathbf{A} von (7.6) mit der Ordnung der Übertragungsfunktion $G(s)$ von (7.8) übereinstimmt (und somit die Eigenwerte von \mathbf{A} gleich den Polstellen von $G(s)$ sind), aber beim zugehörigen Abtastsystem die Ordnung der Übertragungsfunktion $G(z)$ um eins kleiner als die Dimension der Dynamikmatrix $\mathbf{\Phi}$ ist.

Eine systematische Erklärung für diesen Rangverlust in den Übertragungsfunktionen der soeben behandelten Beispiele kann mit Hilfe der Konzepte von *Erreichbarkeit* und *Beobachtbarkeit* gegeben werden.

7.1. Erreichbarkeit (zeitkontinuierlicher Fall)

Den nachfolgenden Betrachtungen liege ein lineares, zeitinvariantes, zeitkontinuierliches System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.10)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ sowie den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ zu Grunde.

Definition 7.1 (Erreichbarkeit im Zeitkontinuierlichen). Man nennt das System (7.10) *vollständig erreichbar*, wenn ausgehend vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ jeder beliebige Zustand $\mathbf{x}(T)$ innerhalb einer endlichen Zeit T mit einer im Intervall $0 \leq t \leq T$ stückweise stetigen Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ erreicht werden kann.

Nachfolgender Satz gibt nun ein auf Basis der Systemmatrizen (\mathbf{A}, \mathbf{B}) überprüfbares Kriterium für die Erreichbarkeit des Systems (7.10) an:

Satz 7.1 (Erreichbarkeit über die Erreichbarkeitsmatrix). Das System (7.10) ist genau dann vollständig erreichbar, wenn die sogenannte Erreichbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

den Rang n hat.

Bevor dieser Satz bewiesen wird, soll noch eine spezielle Eigenschaft von Matrizen, die die Struktur von $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ aufweisen, im nachfolgenden Hilfssatz angegeben werden.

Lemma 7.1. Wenn für die Matrix

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

gilt $\text{rang}(\mathbf{H}_k) = \text{rang}(\mathbf{H}_{k+1})$, dann folgt $\text{rang}(\mathbf{H}_k) = \text{rang}(\mathbf{H}_{k+l})$ mit $l = 2, 3, \dots$. Im Weiteren gilt, falls $\text{rang}(\mathbf{H}_n) = \rho$ mit $\rho < n$, dann folgt $\text{rang}(\mathbf{H}_\rho) = \rho$.

Beweis siehe Anhang C

Beweis Satz 7.1.

Teil 1: vollständig erreichbar $\Rightarrow \text{rang}(\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = n$:

In einem ersten Schritt betrachte man die allgemeine Lösung von (7.10) zum Zeitpunkt t

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (7.13)$$

mit der Transitionsmatrix $\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)$ (vergleiche dazu Satz 2.4). Setzt man nun gemäß Definition 7.1 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $t = T$ in (7.13) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(T) &= \int_0^T \Phi(T-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{(T-\tau)^k}{k!} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \underbrace{\int_0^T \frac{(T-\tau)^k}{k!} \mathbf{u}(\tau) d\tau}_{\mathbf{r}_k} . \end{aligned} \quad (7.14)$$

Die Vektoren \mathbf{r}_k sind für festes T konstante p -dimensionale Vektoren. Aus (7.14) erkennt man also, dass sich $\mathbf{x}(T)$ als Linearkombination der Spaltenvektoren von $\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots$ darstellen lässt. Da wegen der Erreichbarkeit von (7.10) $\mathbf{x}(T)$ ein beliebiger Punkt des \mathbb{R}^n ist, müssen die Spaltenvektoren von $\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots$ den

\mathbb{R}^n aufspannen. Damit folgt aber unmittelbar aus dem zweiten Teil des Hilfssatzes 7.1 für alle $N \geq n$ die Beziehung $n = \text{rang}(\mathbf{H}_N) = \text{rang}(\mathbf{H}_n) = \text{rang}(\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$.

Teil 2: $\text{rang}(\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = n \Rightarrow$ vollständig erreichbar:

Um dies zu zeigen, wird eine Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ so konstruiert, dass das System (7.10) vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ in der Zeit T in den gewünschten Zustand $\mathbf{x}(T)$ übergeführt wird. Dazu wird in einem ersten Schritt bewiesen, dass die sogenannte *Gramsche Matrix (controllability gramian)*

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}\tau})^T d\tau \quad (7.15)$$

für alle Zeiten $T > 0$ regulär ist. Der Beweis wird durch Widerspruch geführt – d. h., man nimmt an, \mathbf{G} sei singular. Dann existiert ein Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ so, dass gilt

$$\mathbf{G}\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{G}\mathbf{a} = \int_0^T \underbrace{\mathbf{a}^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}}_{\mathbf{w}^T(\tau)} \underbrace{\mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}\tau})^T}_{\mathbf{w}(\tau)} d\tau = 0. \quad (7.16)$$

Da in (7.16) für alle Zeiten $0 \leq \tau \leq T$ der Integrand $\mathbf{w}^T(\tau) \mathbf{w}(\tau) \geq 0$ ist, muss für alle Zeiten $0 \leq \tau \leq T$ die Funktion $\mathbf{w}(\tau) \equiv \mathbf{0}$ sein, damit das Integral verschwindet. Bildet man nun die zeitlichen Ableitungen von $\mathbf{w}(\tau)$ an der Stelle $\tau = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T(0) &= \mathbf{a}^T \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \left(\frac{d}{d\tau} \mathbf{w}^T \right) (0) &= \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \left(\frac{d^2}{d\tau^2} \mathbf{w}^T \right) (0) &= \mathbf{a}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ &\vdots \\ \left(\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} \mathbf{w}^T \right) (0) &= \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

dann erkennt man, dass dieses Gleichungssystem für $\text{rang}(\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = n$ nur erfüllt werden kann, wenn $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, womit gezeigt ist, dass die Gramsche Matrix \mathbf{G} von (7.15) für alle Zeiten $T > 0$ regulär ist.

Damit kann man für eine gewünschte Zeit T durch Einsetzen der Eingangsfunktion

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}(T-t)})^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{x}(T) \quad (7.18)$$

in (7.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(T) &= \int_0^T \Phi(T-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^T \Phi(\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(T-\tau) d\tau \\ &= \int_0^T \underbrace{e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}\tau})^T}_{\mathbf{G}} d\tau \mathbf{G}^{-1} \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(T) \end{aligned} \quad (7.19)$$

zeigen, dass das System (7.10) in den gewünschten Zustand $\mathbf{x}(T)$ übergeführt wird. □

Man kann dem Stellgesetz (7.18) entnehmen, dass die Zeit T für das Erreichen des gewünschten Zustandes $\mathbf{x}(T)$ beliebig klein gewählt werden kann. Es sei jedoch zu beachten, dass je kleiner die Endzeit $T > 0$ gewählt wird, desto kleiner sind die Einträge in der Gramschen Matrix \mathbf{G} bzw. desto größer sind die Elemente von \mathbf{G}^{-1} , d.h. desto größer werden die Amplituden der Zeitfunktionen von $\mathbf{u}(t)$.

Die Überprüfung der Erreichbarkeit anhand der Erreichbarkeitsmatrix von (7.11) (siehe auch den MATLAB-Befehl `ctrb`) kann insbesondere bei größeren Systemen numerisch problematisch werden. Aus diesem Grund wird die Erreichbarkeit bei diesen Systemen sehr oft direkt über die Gramsche Matrix von (7.15) untersucht. Dazu nachfolgender Satz:

Satz 7.2 (Erreichbarkeit über die Gramsche Matrix). *Das System (7.10) ist genau dann vollständig erreichbar, wenn die Gramsche Matrix (controllability gramian)*

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}\tau})^T d\tau \quad (7.20)$$

regulär ist.

Aufgabe 7.2. Beweisen Sie Satz 7.2.

Hinweis: Orientieren Sie sich an den zweiten Teil des Beweises von Satz 7.1.

Wenn die Dynamikmatrix \mathbf{A} von (7.10) lauter Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt (man nennt \mathbf{A} dann auch *Hurwitz-Matrix*), dann kann die Gramsche Matrix (7.20) numerisch sehr stabil anhand einer *Lyapunov-Gleichung* berechnet werden. Da nun angenommen wurde, dass die Dynamikmatrix \mathbf{A} eine Hurwitz-Matrix ist, ist die Existenz des Integrals $\mathbf{G}_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{G}$ garantiert und \mathbf{G}_∞ ist Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{G}_\infty + \mathbf{G}_\infty \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (7.21)$$

(man vergleiche dazu den MATLAB-Befehl `gram`). Um (7.21) zu zeigen, setze man \mathbf{G}_∞ von (7.20) in (7.21) ein

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \underbrace{\mathbf{A} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}\tau})^T + e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (\mathbf{A} e^{\mathbf{A}\tau})^T}_{\frac{d}{d\tau} (e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}\tau})^T)} d\tau + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (7.22)$$

und erhält schlussendlich das Ergebnis

$$\underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}T} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (e^{\mathbf{A}T})^T}_{=\mathbf{0}} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{0} . \quad (7.23)$$

7.2. Erreichbarkeit (zeitdiskreter Fall)

Den nachfolgenden Betrachtungen liege ein lineares, zeitinvariantes, zeitdiskretes System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.24)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ sowie den Matrizen $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times p}$ zu Grunde.

Definition 7.2 (Erreichbarkeit im Zeitdiskreten). Man nennt das System (7.24) *vollständig erreichbar*, wenn ausgehend vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ jeder beliebige Zustand \mathbf{x}_N mit einer endlichen Steuerfolge $(\mathbf{u}_k) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}, 0, \dots)$ erreicht werden kann.

In vollkommener Analogie zum zeitkontinuierlichen Fall gelten auch hier folgende Sätze:

Satz 7.3 (Erreichbarkeit über die Erreichbarkeitsmatrix). Das System (7.24) ist genau dann vollständig erreichbar, wenn die sogenannte Erreichbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R}(\Phi, \Gamma) = \left[\Gamma, \Phi\Gamma, \Phi^2\Gamma, \dots, \Phi^{n-1}\Gamma \right] \quad (7.25)$$

den Rang n hat.

Aufgabe 7.3. Beweisen Sie Satz 7.3.

Hinweis: Der Beweis erfolgt vollkommen analog zu Satz 7.1. Ausgangspunkt des ersten Teiles des Beweises ist wiederum die allgemeine Lösung des Differenzgleichungssystems von (7.24) (siehe auch (6.33))

$$\mathbf{x}_k = \Phi^k \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma \mathbf{u}_j . \quad (7.26)$$

Für den zweiten Teil des Beweises wird nun die *Gramsche Matrix (controllability gramian)* des zeitdiskreten Systems (7.24) benötigt

$$\mathbf{G}_d = \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^k \Gamma \Gamma^T (\Phi^k)^T . \quad (7.27)$$

Satz 7.4 (Erreichbarkeit über die Gramsche Matrix). Das zeitdiskrete System (7.24) ist genau dann vollständig erreichbar, wenn die Gramsche Matrix (controllability gramian) (7.27) regulär ist. Wenn die Dynamikmatrix Φ lauter Eigenwerte im Inneren des Einheitskreises besitzt, dann lässt sich $\mathbf{G}_{d,\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{G}_d$ aus der diskreten Lyapunov-Gleichung

$$\Phi \mathbf{G}_{d,\infty} \Phi^T - \mathbf{G}_{d,\infty} + \Gamma \Gamma^T = \mathbf{0} \quad (7.28)$$

errechnen.

Aufgabe 7.4. Beweisen Sie Satz 7.4.

Hinweis: Konstruieren Sie im Zuge dieses Beweises jene Eingangsfolge (\mathbf{u}_k) der Form

$$(\mathbf{u}_k) = \left(\Gamma^T (\Phi^{N-1-k})^T \mathbf{G}_d^{-1} \mathbf{x}_N \right) , \quad (7.29)$$

die das System (7.24) in N Schritten in den gewünschten Zustand \mathbf{x}_N überführt.

7.3. Steuerbarkeit

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass in diesem Zusammenhang neben dem Begriff der Erreichbarkeit häufig auch der Begriff der *Steuerbarkeit* verwendet wird. Dazu folgende Definition:

Definition 7.3 (Steuerbarkeit). Man nennt das zeitkontinuierliche System (7.10) *vollständig steuerbar*, wenn ausgehend von einem *beliebigen Anfangszustand* \mathbf{x}_0 eine stückweise stetige Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$, $0 \leq t \leq T$, mit der endlichen Zeit T so existiert, dass gilt $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$.

Analog dazu bezeichnet man das zeitdiskrete System (7.24) *vollständig steuerbar*, wenn ausgehend von einem *beliebigen Anfangszustand* \mathbf{x}_0 eine endliche Steuerfolge $(\mathbf{u}_k) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}, 0, \dots)$ so existiert, dass gilt $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$.

Im Zeitkontinuierlichen sind vollständige Erreichbarkeit und vollständige Steuerbarkeit äquivalent. Dies erkennt man unmittelbar aus den Definitionen - denn, wenn das System vollständig steuerbar ist, dann existiert für jedes beliebige $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ eine geeignete Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$, $0 \leq t \leq T$, so, dass nachfolgende Gleichung

$$\mathbf{0} = \Phi(T) \mathbf{x}_0 + \int_0^T \Phi(T - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (7.30)$$

gelöst wird, und für ein vollständig erreichbares System existiert für jedes beliebige $\mathbf{x}(T) \in \mathbb{R}^n$ eine geeignete Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$, $0 \leq t \leq T$, so, dass die Gleichung

$$\mathbf{x}(T) = \int_0^T \Phi(T - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (7.31)$$

erfüllt ist. Setzt man nun in (7.31) $\mathbf{x}(T) = -\Phi(T) \mathbf{x}_0$, dann sieht man, dass wegen der Regularität der Transitionsmatrix $\Phi(T)$ die Lösbarkeit von (7.30) die von (7.31) impliziert und vice versa. Dass diese Äquivalenz im Zeitdiskreten nicht uneingeschränkt gilt, soll nachfolgende Aufgabe zeigen.

Aufgabe 7.5. Zeigen Sie für zeitdiskrete Systeme (7.24), dass jedes vollständig erreichbare System vollständig steuerbar ist, die Umkehrung jedoch nur dann gilt, wenn die Dynamikmatrix Φ von (7.24) regulär ist.

Aufgabe 7.6. Zeigen Sie, dass die Erreichbarkeitsmatrix \mathcal{R} des mathematischen Modells (7.2) der Brückenabgleichschaltung von Abbildung 7.1 für die Brückenbedingung (7.4) den Rang 1 hat und somit das System in diesem Fall nicht vollständig erreichbar ist.

Aufgabe 7.7. Zeigen Sie, dass das linearisierte mathematische Modell des Wagens mit inversem Pendel von Abbildung 7.2 vollständig erreichbar ist.

Aufgabe 7.8. Berechnen Sie den Rang der Erreichbarkeitsmatrix $\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)$ des zeitdiskreten Systems (7.7). Führen Sie die Berechnung sowohl in MAPLE als auch in MATLAB mit dem Befehl `ctrb` durch.

Lösung von Aufgabe 7.8. $\text{rang}(\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)) = 2$

7.4. Beobachtbarkeit (zeitkontinuierlicher Fall)

Über die Erreichbarkeit eines mathematischen Modells erhält man Aussagen über die Wirkung des Einganges auf den Systemzustand. Mit Hilfe der Beobachtbarkeit wird untersucht, welche Kenntnis über den Systemzustand man prinzipiell erhalten kann, wenn ausschließlich die Ausgangsgrößen eines dynamischen Systems gemessen werden können.

Den nachfolgenden Betrachtungen liege ein lineares, zeitinvariantes, zeitkontinuierliches System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.32a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (7.32b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ sowie den Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ zu Grunde.

Definition 7.4 (Beobachtbarkeit im Zeitkontinuierlichen). Man nennt das System (7.32) *vollständig beobachtbar*, wenn aus der Kenntnis der Eingangs- und Ausgangsgrößen $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ auf dem Intervall $0 \leq t \leq T$ sowie der Systemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} der Anfangszustand \mathbf{x}_0 errechnet werden kann.

Nachfolgender Satz gibt nun ein auf Basis der Systemmatrizen (\mathbf{C}, \mathbf{A}) überprüfbares Kriterium für die Beobachtbarkeit des Systems (7.32) an:

Satz 7.5 (Beobachtbarkeit über die Beobachtbarkeitsmatrix). *Das System (7.32) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die sogenannte Beobachtbarkeitsmatrix*

$$\mathcal{O}(\mathbf{C}, \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

den Rang n hat.

Beweis: siehe Anhang C.

Die Überprüfung der Beobachtbarkeit anhand der Beobachtbarkeitsmatrix von (7.33) (siehe auch den MATLAB-Befehl `obsv`) kann insbesondere bei größeren Systemen numerisch problematisch werden. Aus diesem Grund wird die Beobachtbarkeit bei diesen Systemen oft direkt über die Gramsche Matrix von (C.19) untersucht (man vergleiche dazu wiederum den MATLAB-Befehl `gram`). Dazu nachfolgender Satz:

Satz 7.6 (Beobachtbarkeit über die Gramsche Matrix). *Das System (7.32) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Gramsche Matrix (observability gramian)*

$$\bar{\mathbf{G}} = \int_0^T \left(e^{\mathbf{A}\tau} \right)^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \quad (7.34)$$

regulär ist. Wenn die Dynamikmatrix \mathbf{A} eine Hurwitz-Matrix ist, dann lässt sich $\bar{\mathbf{G}}_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{G}}$ aus der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{G}}_\infty + \bar{\mathbf{G}}_\infty \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (7.35)$$

errechnen.

Aufgabe 7.9. Beweisen Sie Satz 7.6.

Hinweis: Orientieren Sie sich an den Herleitungen und Ergebnissen von Abschnitt 7.1.

7.5. Beobachtbarkeit (zeitdiskreter Fall)

Aus den bisherigen Überlegungen ist es nun naheliegend, wie das Konzept der Beobachtbarkeit auf lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete Systeme der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.36a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \quad (7.36b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, dem Ausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ sowie den Matrizen $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ übertragen werden kann.

Definition 7.5 (Beobachtbarkeit im Zeitdiskreten). Man nennt das zeitdiskrete System (7.36) *vollständig beobachtbar*, wenn aus der Kenntnis der Eingangs- und Ausgangsfolgen $(\mathbf{u}_k) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{0}, \dots)$ und $(\mathbf{y}_k) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{N-1}, \mathbf{0}, \dots)$ mit finitem N sowie der Systemmatrizen Φ , Γ , \mathbf{C} und \mathbf{D} der Anfangszustand \mathbf{x}_0 errechnet werden kann.

Es gelten nun analog zum zeitkontinuierlichen Fall folgende Sätze:

Satz 7.7 (Beobachtbarkeit über die Beobachtbarkeitsmatrix). *Das zeitdiskrete System (7.36) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die sogenannte Beobacht-*

barkeitsmatrix

$$\mathcal{O}(\mathbf{C}, \Phi) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\Phi \\ \mathbf{C}\Phi^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

den Rang n hat.

Aufgabe 7.10. Beweisen Sie Satz 7.7.

Hinweis: Die allgemeine Lösung des Differenzgleichungssystems (7.36) (siehe auch (6.33)) lautet

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\Phi^k \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma \mathbf{u}_j + \mathbf{D} \mathbf{u}_k.$$

Satz 7.8 (Beobachtbarkeit über die Gramsche Matrix). Das zeitdiskrete System (7.36) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Gramsche Matrix (observability gramian)

$$\bar{\mathbf{G}}_d = \sum_{k=0}^{N-1} (\Phi^k)^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \Phi^k \quad (7.38)$$

regulär ist. Wenn die Dynamikmatrix Φ lauter Eigenwerte im Inneren des Einheitskreises besitzt, dann lässt sich $\bar{\mathbf{G}}_{d,\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{G}}_d$ aus der Lyapunov-Gleichung

$$\Phi^T \bar{\mathbf{G}}_{d,\infty} \Phi - \bar{\mathbf{G}}_{d,\infty} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (7.39)$$

errechnen.

Aufgabe 7.11. Beweisen Sie Satz 7.8.

Hinweis: Zeigen Sie im Zuge dieses Beweises, dass Sie aus Kenntnis der Eingangs- und Ausgangsfolgen $(\mathbf{u}_k) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{0}, \dots)$ und $(\mathbf{y}_k) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{N-1}, \mathbf{0}, \dots)$ sowie der Systemmatrizen Φ , Γ , \mathbf{C} und \mathbf{D} den Anfangszustand \mathbf{x}_0 mit der Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{\mathbf{G}}_d^{-1} (\Phi^k)^T \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{y}}_k, \quad \tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\Phi^{k-j-1} \Gamma \mathbf{u}_j - \mathbf{D} \mathbf{u}_k$$

explizit ermitteln können.

Aufgabe 7.12. Zeigen Sie, dass die Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O} des mathematischen Modells (7.2) der Brückenabgleichschaltung von Abbildung 7.1 für die Brückenbedingung (7.4) den Rang 1 hat und somit das System nicht vollständig beobachtbar

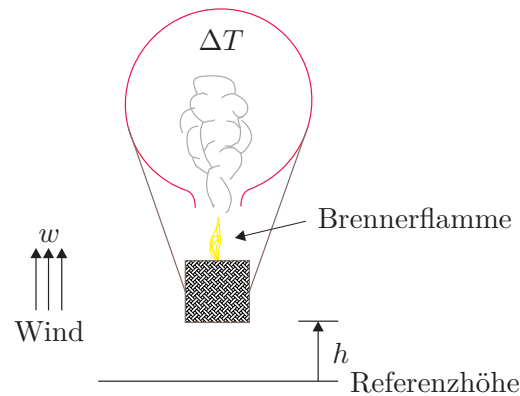


Abbildung 7.3.: Schematische Darstellung eines Heißluftballons.

ist.

Aufgabe 7.13. Zeigen Sie, dass die Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O} des linearisierten mathematischen Modells Wagen mit inversem Pendel von Abbildung 7.2 den Rang 2 hat und somit das linearisierte System nicht vollständig beobachtbar ist.

Aufgabe 7.14. Die Bewegung eines Heißluftballons nach Abbildung 7.3 wird näherungsweise durch ein mathematisches Modell der Form

$$\Delta \dot{T} = -\frac{1}{\tau_1} \Delta T + u \quad (7.40a)$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau_2} (v - w) + \sigma \Delta T \quad (7.40b)$$

$$\dot{h} = v \quad (7.40c)$$

mit der Temperaturdifferenz zur Gleichgewichtstemperatur ΔT , der Höhe des Ballons h , der Vertikalgeschwindigkeit des Ballons v , der vertikalen Windgeschwindigkeit w (Störgröße) sowie der zur zugeführten Wärme proportionalen Stellgröße u .

- (1) Ist es möglich, die Temperaturänderung ΔT und eine konstante Windgeschwindigkeit w allein aufgrund der Messung der Höhe h zu beobachten?

Hinweis: Erweitern Sie für die konstante Windgeschwindigkeit w das mathematische Modell um die Differentialgleichung $\dot{w} = 0$.

Ergebnis: Die Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O} lautet

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma & -\frac{1}{\tau_2} & 0 & \frac{1}{\tau_2} \\ -\frac{\sigma}{\tau_1} - \frac{\sigma}{\tau_2} & \frac{1}{\tau_2} & 0 & -\frac{1}{\tau_2} \end{bmatrix}, \quad \det(\mathcal{O}) = \frac{-\sigma}{\tau_1 \tau_2}$$

und damit ist das erweiterte System für $\sigma \neq 0$ mit der Messgröße $y = h$ vollständig beobachtbar.

(2) Ist das System (7.40a) mit der Eingangsgröße u vollständig erreichbar?

Ergebnis: ja für $\sigma \neq 0$

(3) Ist das System (7.40a) mit der Eingangsgröße w vollständig erreichbar?

Ergebnis: nein

Aufgabe 7.15. Berechnen Sie den Rang der Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}(\mathbf{C}, \Phi)$ des zeitdiskreten Systems (7.7). Führen Sie die Berechnung sowohl in MAPLE als auch in MATLAB mit dem Befehl `obsv` durch.

Lösung von Aufgabe 7.15. $\text{rang}(\mathcal{O}(\mathbf{C}, \Phi)) = 2$

7.6. Einfluss der Abtastung

Wie man dem Beispiel (7.6) und (7.7) entnehmen kann (siehe Aufgaben 7.8 und 7.15), können die Eigenschaften der vollständigen Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit durch Abtastung verloren gehen. Ohne Beweis sei dazu folgender Satz angegeben:

Satz 7.9. *Es sei das lineare, zeitinvariante, zeitkontinuierliche System (7.32) mit den Systemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar und mit $\lambda_j = \alpha_j \pm I\omega_j$, $j = 1, \dots, n$, bezeichne man die unterschiedlichen Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} . Wenn die Abtastzeit T_a so gewählt wird, dass für die konjugiert komplexen Eigenwertpaare gilt*

$$\omega_j \neq \frac{l\pi}{T_a}, \quad l = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7.41)$$

dann ist das zugehörige Abtastsystem nach (6.19) vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar.

Zur Veranschaulichung betrachte man als Beispiel das zeitkontinuierliche System

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & -\lambda \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad (7.42a)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \quad (7.42b)$$

mit dem zugehörigen Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-\lambda T_a} \cos(T_a \omega) & -e^{-\lambda T_a} \sin(T_a \omega) \\ e^{-\lambda T_a} \sin(T_a \omega) & e^{-\lambda T_a} \cos(T_a \omega) \end{bmatrix}}_{\Phi} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma} u_k \quad (7.43a)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}_k \quad (7.43b)$$

Die Erreichbarkeitsmatrix des zeitkontinuierlichen Systems (7.42)

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} b_1 & -\lambda b_1 - \omega b_2 \\ b_2 & \omega b_1 - \lambda b_2 \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

ist genau dann regulär, wenn $\omega(b_1^2 + b_2^2) \neq 0$ ist. Durch Einsetzen einer Abtastzeit der Form $T_a = l\pi/\omega$, $l = \pm 1, \pm 2, \dots$ (vergleiche dazu (7.41)) in die Erreichbarkeitsmatrix des Abtastsystems (7.43)

$$\mathcal{R}(\Phi, \Gamma) = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{b}_1 e^{-\lambda T_a} \cos(T_a \omega) - \tilde{b}_2 e^{-\lambda T_a} \sin(T_a \omega) \\ \tilde{b}_2 & \tilde{b}_1 e^{-\lambda T_a} \sin(T_a \omega) + \tilde{b}_2 e^{-\lambda T_a} \cos(T_a \omega) \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

erhält man

$$\mathcal{R}(\Phi, \Gamma) = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{b}_1 e^{-\lambda T_a} \cos(l\pi) \\ \tilde{b}_2 & \tilde{b}_2 e^{-\lambda T_a} \cos(l\pi) \end{bmatrix}, \quad (7.46)$$

und man erkennt unmittelbar, dass in diesem Fall $\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)$ singulär ist.

Aufgabe 7.16. Unter welchen Bedingungen an die Parameter λ , ω , c_1 und c_2 ist das zeitkontinuierliche System (7.42) vollständig beobachtbar?

Zeigen Sie, dass für die Abtastzeit $T_a = l\pi/\omega$, $l = \pm 1, \pm 2, \dots$, das Abtastsystem (7.43) nicht vollständig beobachtbar ist.

Lösung von Aufgabe 7.16. Es muss gelten $\omega(c_1^2 + c_2^2) \neq 0$.

Aus der Bedingung (7.41) folgt also, dass für die Wahl der Abtastzeit

$$T_a < \frac{\pi}{\omega_{j,\max}} \quad (7.47)$$

mit $\omega_{j,\max}$ als den betraglich größten Imaginärteil aller auftretenden konjugiert komplexen Eigenwerte der Dynamikmatrix \mathbf{A} die Eigenschaften der vollständigen Erreichbarkeit und vollständigen Beobachtbarkeit bei der Abtastung erhalten bleiben.

7.7. Dualitätsprinzip

Es wurde bereits im Abschnitt 3.5 gezeigt, dass eine skalare Übertragungsfunktion $G(s)$ bzw. $G(z)$ unverändert bleibt, wenn man sie transponiert, es gilt also

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \mathbf{b}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{c} + d \quad (7.48)$$

bzw.

$$G(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Gamma} + d = \mathbf{\Gamma}^T (z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}^T)^{-1} \mathbf{c} + d. \quad (7.49)$$

Aus (7.48) bzw. (7.49) erkennt man, dass jeweils die beiden Systeme, auch *primales* und *duales System* genannt,

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}\mathbf{x}_p + \mathbf{b}u \\ y_p = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_p + du \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}^T \mathbf{x}_d + \mathbf{c}u \\ y_d = \mathbf{b}^T \mathbf{x}_d + du \end{array} \quad (7.50)$$

primales System
duales System

bzw.

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}_{p,k+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_{p,k} + \mathbf{\Gamma} u_k \\ y_{p,k} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{p,k} + du_k \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \mathbf{x}_{d,k+1} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{x}_{d,k} + \mathbf{c} u_k \\ y_{d,k} = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{x}_{d,k} + du_k \end{array} \quad (7.51)$$

primales System
duales System

die gleiche Übertragungsfunktion besitzen.

Aufgabe 7.17. Zeigen Sie, dass die Erreichbarkeit (Beobachtbarkeit) des primalen Systems äquivalent zur Beobachtbarkeit (Erreichbarkeit) des dualen Systems ist.

7.8. Minimalrealisierung

Die Aufgabe, zu einer Übertragungsfunktion $G(s)$ eine Zustandsdarstellung in Form eines Systems von Differenzialgleichungen 1-ter Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.52a)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du \quad (7.52b)$$

bzw. zu einer Übertragungsfunktion $G(z)$ eine Zustandsdarstellung in Form eines Systems von Differenzgleichungen 1-ter Ordnung

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma} u_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.53a)$$

$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + du_k \quad (7.53b)$$

zu finden, wird als Realisierungsproblem bezeichnet (vergleiche dazu Abschnitt 3.5 und Abschnitt 6.4.4). Man nennt nun eine Zustandsrealisierung *minimal*, wenn es die geringst mögliche Anzahl von Zuständen unter allen möglichen Realisierungen aufweist. Es gilt nun folgender Satz:

Satz 7.10 (Minimale Zustandsrealisierung). Eine Zustandsrealisierung $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d\}$ zu einer Übertragungsfunktion $G(s)$ bzw. $\{\Phi, \Gamma, \mathbf{c}, d\}$ zu einer Übertragungsfunktion $G(z)$ ist genau dann minimal, wenn das Paar $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ bzw. $\{\Phi, \Gamma\}$ vollständig erreichbar und das Paar $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$ bzw. $\{\Phi, \mathbf{c}\}$ vollständig beobachtbar ist.

Aufgabe 7.18. Beweisen Sie Satz 7.10.

Zur Wiederholung seien an dieser Stelle nochmals die zwei bereits bekannten kanonischen Minimalrealisierungen für die z -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1} + b_n z^n}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n} \quad (7.54)$$

$$= b_n + \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 z + \dots + \tilde{b}_{n-1} z^{n-1}}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n} \quad (7.55)$$

mit

$$\tilde{b}_i = b_i - a_i b_n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (7.56)$$

angegeben, nämlich die 1-te Standardform oder Steuerbarkeitsnormalform $\{\Phi_R, \Gamma_R, \mathbf{c}_R, d_R\}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ \vdots \\ x_{n-1,k+1} \\ x_{n,k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Phi_R} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma_R} u_k \quad (7.57a)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_{n-2} & \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_R^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{b_n}_{d_R} u_k \quad (7.57b)$$

und die 2-te Standardform oder Beobachtbarkeitsnormalform $\{\Phi_B, \Gamma_B, \mathbf{c}_B, d_B\}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ \vdots \\ x_{n-1,k+1} \\ x_{n,k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Phi_B} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-2} \\ \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Gamma_B} u_k \quad (7.58a)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{b_n}_{d_B} u_k. \quad (7.58b)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die 1-te und 2-te Standardform zueinander jeweils das primale und duale System gemäß (7.51) sind. Jetzt sind wir auch in der Lage, die Namen Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsnormalform zu interpretieren, denn eine einfache Rechnung zeigt, dass die Erreichbarkeitsmatrix $\mathcal{R}(\Phi_R, \Gamma_R)$ der Steuerbarkeitsnormalform $\{\Phi_R, \Gamma_R, \mathbf{c}_R, d_R\}$ von (7.57)

$$\mathcal{R}(\Phi_R, \Gamma_R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & * & * \\ 1 & -a_{n-1} & \dots & * & * \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

immer regulär ist.

Aufgabe 7.19. Zeigen Sie, dass die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}(\mathbf{c}_B^T, \Phi_B)$ der Beobachtbarkeitsnormalform $\{\Phi_B, \Gamma_B, \mathbf{c}_B, d_B\}$ von (7.58) immer regulär ist.

Die beiden kanonischen Normalformen (7.57) und (7.58) weisen noch eine weitere sehr schöne Eigenschaft auf - nämlich, die Koeffizienten a_i , $i = 1, \dots, n$, des charakteristischen Polynoms $p(z) = \det(z\mathbf{E} - \Phi_R) = \det(z\mathbf{E} - \Phi_B)$ von Φ_R bzw. Φ_B können direkt der letzten Zeile bzw. Spalte entnommen werden. Um dies für Φ_R allgemein zu zeigen, nehme man an, dass λ eine Lösung des charakteristischen Polynoms sei, also $p(\lambda) = 0$, dann existiert ein nichttrivialer Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ so, dass gilt $(\lambda\mathbf{E} - \Phi_R)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ bzw. in

Komponentenschreibweise

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.60)$$

Aus (7.60) erhält man

$$v_j = \lambda v_{j-1} \quad \text{bzw.} \quad v_j = \lambda^{j-1} v_1 \quad \text{für } j = 2, \dots, n \quad (7.61)$$

und

$$a_0 v_1 + a_1 v_2 + \dots + a_{n-2} v_{n-1} + a_{n-1} v_n + \lambda v_n = 0. \quad (7.62)$$

Setzt man nun (7.61) in (7.62) ein, dann folgt aus

$$\underbrace{(a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-2} \lambda^{n-2} + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n)}_{\text{Klammerausdruck}} v_1 = 0 \quad (7.63)$$

unmittelbar, dass wegen $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ und damit $v_1 \neq 0$ der Klammerausdruck in (7.63) Null sein muss und damit die Tatsache, dass

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-2} z^{n-2} + a_{n-1} z^{n-1} + z^n \quad (7.64)$$

das charakteristische Polynom von Φ_R ist.

Aufgabe 7.20. Zeigen Sie, dass die charakteristischen Polynome einer quadratischen Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und der zugehörigen transponierten Matrix Φ^T gleich sind.

7.8.1. Markov-Parameter und Hankelmatrizen

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setze man für die nachfolgenden Betrachtungen voraus, dass die Systeme (7.52) und (7.53) nicht sprungfähig sind, also gilt $d = 0$. Man bezeichnet nun die Größen

$$m_k = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} \quad \text{bzw.} \quad m_k = \mathbf{c}^T \Phi^{k-1} \mathbf{\Gamma}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.65)$$

als die *Markov-Parameter* der Systeme (7.52) und (7.53).

Aufgabe 7.21. Beweisen Sie, dass die Markov-Parameter invariant gegenüber regulären Zustandstransformationen sind.

Die Markov-Parameter sind nun eindeutig durch die Übertragungsfunktionen $G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$ bzw. $G(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \mathbf{\Gamma}$ bestimmt. Um dies für zeitkontinuierliche Systeme zu zeigen, schreibe man einfach $G(s)$ in der Form

$$G(s) = \frac{1}{s} \mathbf{c}^T (\mathbf{E} - \mathbf{A}/s)^{-1} \mathbf{b} = \frac{1}{s} \mathbf{c}^T \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}/s + \mathbf{A}^2/s^2 + \dots \right) \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{\infty} m_k s^{-k} \quad (7.66)$$

mit den Markov-Parametern m_k von (7.65) um. Die Markov-Parameter hängen nun mit der Impulsantwort $g(t)$ von (7.52) für $d = 0$

$$g(t) = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right) \mathbf{b} \quad (7.67)$$

und deren zeitlichen Ableitungen an der Stelle $t = 0$ wie folgt

$$\left(\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} g(t) \right)_{t=0} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} = m_k \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.68)$$

zusammen. Bei zeitdiskreten Systemen (7.53) geben die Markov-Parameter m_k von (7.65) direkt die Gewichtsfolge (Impulsantwortfolge) (g_k) für $d = 0$ an, denn es gilt

$$G(z) = \frac{1}{z} \mathbf{c}^T (\mathbf{E} - \Phi/z)^{-1} \Gamma = \frac{1}{z} \mathbf{c}^T \left(\mathbf{E} + \Phi/z + \Phi^2/z^2 + \dots \right) \Gamma = \sum_{k=1}^{\infty} m_k z^{-k} \quad (7.69)$$

und damit folgt unmittelbar die Beziehung

$$g_k = m_k = \mathbf{c}^T \Phi^{k-1} \Gamma \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.70)$$

Eine wichtige Matrix, die mit den Markov-Parametern eng verbunden ist, ist die sogenannte *Hankelmatrix*

$$\mathbf{H}[i, j] = \begin{bmatrix} m_i & m_{i+1} & \dots & m_{i+j} \\ m_{i+1} & m_{i+2} & \dots & m_{i+j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i+j} & m_{i+j+1} & \dots & m_{i+2j} \end{bmatrix}. \quad (7.71)$$

Die vollständige Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit der Systeme (7.52) bzw. (7.53) kann nun sehr effizient anhand der Hankelmatrix geprüft werden.

Satz 7.11 (Minimalrealisierung und Hankelmatrix). *Das System (7.52) bzw. (7.53) ist genau dann vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar, wenn die Hankelmatrix*

$$\mathbf{H}[1, n-1] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^n \mathbf{b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^n \mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{2n-2} \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (7.72)$$

bzw.

$$\mathbf{H}_d[1, n-1] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \Gamma & \mathbf{c}^T \Phi \Gamma & \dots & \mathbf{c}^T \Phi^{n-1} \Gamma \\ \mathbf{c}^T \Phi \Gamma & \mathbf{c}^T \Phi^2 \Gamma & \dots & \mathbf{c}^T \Phi^n \Gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}^T \Phi^{n-1} \Gamma & \mathbf{c}^T \Phi^n \Gamma & \dots & \mathbf{c}^T \Phi^{2n-2} \Gamma \end{bmatrix} \quad (7.73)$$

regulär ist.

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass sich die Hankelmatrizen $\mathbf{H}[1, n-1]$ und $\mathbf{H}_d[1, n-1]$ in der Form

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathcal{O}(\mathbf{c}^T, \mathbf{A}) \mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad (7.74)$$

bzw.

$$\mathbf{H}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \Phi \\ \mathbf{c}^T \Phi^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma, \Phi\Gamma, \Phi^2\Gamma, \dots, \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix} = \mathcal{O}(\mathbf{c}^T, \Phi) \mathcal{R}(\Phi, \Gamma) \quad (7.75)$$

schreiben lassen. □

7.9. Der PBH-Test

Um die vollständige Erreichbarkeit bzw. Beobachtbarkeit zu testen, muss man den bisherigen Überlegungen folgend eine Rangprüfung gewisser Matrizen durchführen, was teilweise numerisch sehr problematisch sein kann. Aus diesem Grund soll hier noch ein Verfahren, welches auf der Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren beruht, der sogenannte *PBH(Popov-Belevitch-Hautus)-Eigenvektortest*, vorgestellt werden. Die nachfolgenden Sätze werden nur für zeitkontinuierliche Systeme (7.52) formuliert, gelten aber eins zu eins auch für zeitdiskrete Systeme (7.53).

Satz 7.12 (PBH-Eigenvektortest). *Das System (7.52) ist genau dann nicht vollständig erreichbar, wenn ein Vektor $\mathbf{w}_i^T \neq \mathbf{0}^T$ so existiert, dass gilt*

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{w}_i^T \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_i^T \mathbf{b} = 0. \quad (7.76)$$

Man beachte, dass \mathbf{w}_i^T ein Linkseigenvektor der Matrix \mathbf{A} ist.

Das System (7.52) ist genau dann nicht vollständig beobachtbar, wenn ein Vektor $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ so existiert, dass gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{v}_i = 0. \quad (7.77)$$

Der Vektor \mathbf{v}_i entspricht einem (Rechts)eigenvektor der Matrix \mathbf{A} .

Beweis: siehe Anhang C

Aufgabe 7.22. Zeigen Sie, dass zu einem Eigenwert λ_i einer Matrix \mathbf{A} der Linkseigenvektor \mathbf{w}_i^T von \mathbf{A} gleich dem transponierten Rechtseigenvektor \mathbf{v}_i der transponierten Matrix \mathbf{A}^T ist.

Aufgabe 7.23. Überprüfen Sie mit Hilfe des PBH-Eigenvektortests, ob nachfolgendes System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u$$

vollständig erreichbar bzw. vollständig beobachtbar ist. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{u}}$.

Lösung von Aufgabe 7.23. Das System ist nicht vollständig erreichbar und nicht vollständig beobachtbar mit folgenden Eigenwerten und für den PBH-Eigenvektortest relevanten Links- und Rechtseigenvektoren:

Eigenwert	Linkseigenvektor	Rechtseigenvektor
$\lambda_1 = -2$	$\mathbf{w}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{v}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\lambda_2 = 1$ (zweifach)	$\mathbf{w}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{v}_2^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Die Übertragungsfunktion lautet $G(s) = 1$.

Aufgabe 7.24. Beweisen Sie, dass ein System der Form (7.52) mit der Dynamikmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

unabhängig von \mathbf{b} immer nicht erreichbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie dies auf zwei verschiedene Art und Weisen, nämlich

- (1) durch Aufstellen der Erreichbarkeitsmatrix $\mathbb{R}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ für ein allgemeines \mathbf{b} und
- (2) mit Hilfe des PBH-Eigenvektortests. Beachten Sie, dass in diesem Fall zum gleichen Eigenwert λ zwei linear unabhängige Linkseigenvektoren \mathbf{w}_1^T und \mathbf{w}_2^T existieren und damit gemäß Satz 7.12 für die Nichterreichbarkeit des Systems lediglich eine Linearkombination $\mathbf{w}_i^T = \alpha_1 \mathbf{w}_1^T + \alpha_2 \mathbf{w}_2^T$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ existieren muss, die die Bedingung (7.76) erfüllt.

Aufgabe 7.25. Zeigen Sie, dass wenn für die Dynamikmatrix \mathbf{A} eines Systems (7.52) zu einem Mehrfacheigenwert λ mehr als ein linear unabhängiger Eigenvektor existiert, dann ist das System nicht vollständig beobachtbar.

Hinweis: Aufgabe 7.24 in Kombination mit dem Dualitätsprinzip

Aufgabe 7.26. Gegeben ist das System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

Welche Bedingungen müssen die Parameter $\lambda_j, c_j, j = 1, \dots, n$ erfüllen, damit das System vollständig beobachtbar ist?

Lösung von Aufgabe 7.26. Es muss gelten $c_j \neq 0$ und $\lambda_j \neq \lambda_i$ für $i \neq j$ und $j, i = 1, \dots, n$.

Neben dem PBH-Eigenvektortest gibt es auch noch den sogenannten *PBH-Rangtest*, der in diesem Zusammenhang häufig in der Literatur zu finden ist.

Satz 7.13 (PBH-Rangtest). Das System (7.52) ist genau dann vollständig erreichbar, wenn gilt

$$\text{rang} [s\mathbf{E} - \mathbf{A}, \mathbf{b}] = n \quad (7.78)$$

für alle s der komplexen Ebene.

Das System (7.52) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn gilt

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ s\mathbf{E} - \mathbf{A} \end{bmatrix} = n \quad (7.79)$$

für alle s der komplexen Ebene.

Beweis: siehe Anhang C

7.10. Literatur

- [7.1] J. Ackermann, *Abtastregelung*, 3. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 1988.
- [7.2] K. J. Åström und B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems*, 3. Aufl. New Jersey: Prentice Hall, 1997.
- [7.3] G. F. Franklin, J. D. Powell und M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*. California: Addison Wesley, 1998.
- [7.4] T. Kailath, *Linear Systems*. New York: Prentice Hall, 1980.
- [7.5] G. Ludyk, *Theoretische Regelungstechnik 1*. Berlin Heidelberg: Springer, 1995.