

8. Zustandsregler/Zustandsbeobachter

Das bisher diskutierte Frequenzkennlinienverfahren im Abschnitt 5 beruht auf einer Regelkreisstruktur, bei der eine Größe, die so genannte Ausgangsgröße, gemessen wird, und auf deren Kenntnis gemeinsam mit der vorgegebenen Führungsgröße der Regler als dynamisches System die Stellgröße errechnet. Daher werden Regelkreise dieser Art auch als *Ausgangsregelungen* bezeichnet. Setzt man nun voraus, dass der gesamte Zustand eines Systems messtechnisch erfassbar ist, dann ist es möglich, einen so genannten *Zustandsregler* zu entwerfen. Unter einem Zustandsregelgesetz versteht man eine *dynamiklose, funktionale Abhängigkeit* der Stellgröße \mathbf{u} von den Zustandsgrößen \mathbf{x} und eventuell weiteren externen Eingangsgrößen (z. B. Führungsgrößen) \mathbf{r} im allgemeinen Fall in der Art

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{r}(t), t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{f}_{\mathbf{u},k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k) \quad (8.1)$$

bzw. für lineare, zeitinvariante Systeme

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{r}(t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{K}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{r}_k \quad (8.2)$$

8.1. Zustandsregler

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit lege man den nachfolgenden Betrachtungen das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete Eingrößensystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8.3a)$$

$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + du_k \quad (8.3b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $u \in \mathbb{R}$, dem Ausgang $y \in \mathbb{R}$ sowie den Matrizen $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ und $d \in \mathbb{R}$ zu Grunde. Setzt man nun ein Zustandsregelgesetz der Form

$$u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k + gr_k \quad (8.4)$$

in (8.3) ein, so ergibt sich der geschlossene Regelkreis zu

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{(\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T)}_{\mathbf{\Phi}_g} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}gr_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8.5a)$$

$$y_k = (\mathbf{c}^T + d\mathbf{k}^T) \mathbf{x}_k + dgr_k \quad (8.5b)$$

mit der Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises $\mathbf{\Phi}_g$ und der Eingangsgröße r . Offensichtlich müssen nun die Größen $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ und $g \in \mathbb{R}$ im Rahmen des Zustandsreglerentwurfes so bestimmt werden, dass die Ausgangsfolge (y_k) als Antwort des geschlossenen Kreises (8.5) auf spezielle Eingangsfolgen, wie beispielsweise der Sprungfolge ($r_k = r_0 \mathbf{1}^k = (r_0, r_0, r_0, \dots)$), gewissen Bedingungen genügt.

Im ersten Schritt soll die Eingangsfolge (r_k) außer Acht bleiben, also $(r_k) = (0^k)$, und die Größe \mathbf{k} soll so entworfen werden, dass die Eigenwerte der Dynamikmatrix Φ_g des geschlossenen Kreises an beliebig vorgegebenen gewünschten Stellen zu liegen kommen. Man nennt diesen Entwurf deshalb auch *Polvorgabe im Zustandsraum*. Zuvor wird jedoch noch ein für das Weitere wesentlicher Satz, nämlich der Satz von Cayley-Hamilton, formuliert und bewiesen:

Satz 8.1 (Satz von Cayley-Hamilton).

Bezeichnet

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n \quad (8.6)$$

das charakteristische Polynom der Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann genügt Φ der Beziehung

$$p(\Phi) = a_0 \mathbf{E} + a_1 \Phi + \dots + a_{n-1} \Phi^{n-1} + \Phi^n = \mathbf{0} . \quad (8.7)$$

Beweis. Für die Inverse der Matrix $(z\mathbf{E} - \Phi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$(z\mathbf{E} - \Phi)^{-1} = \frac{\text{adj}(z\mathbf{E} - \Phi)}{\det(z\mathbf{E} - \Phi)} , \quad (8.8)$$

wobei die adjunkte Matrix $\text{adj}(z\mathbf{E} - \Phi)$ lediglich Polynome $(n-1)$ -Ordnung besitzt und demnach in der Form

$$\text{adj}(z\mathbf{E} - \Phi) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1 z + \dots + \mathbf{R}_{n-2} z^{n-2} + \mathbf{R}_{n-1} z^{n-1} \quad (8.9)$$

angeschrieben werden kann. Aus (8.7) - (8.9) erhält man schlussendlich

$$\det(z\mathbf{E} - \Phi) \mathbf{E} = (z\mathbf{E} - \Phi) (\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1 z + \dots + \mathbf{R}_{n-2} z^{n-2} + \mathbf{R}_{n-1} z^{n-1}) \quad (8.10)$$

bzw.

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n) \mathbf{E} \\ &= -\Phi \mathbf{R}_0 + \dots + (\mathbf{R}_{n-2} - \Phi \mathbf{R}_{n-1}) z^{n-1} + \mathbf{R}_{n-1} z^n . \end{aligned} \quad (8.11)$$

Durch Koeffizientenvergleich der Potenzen von z in (8.11) ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0 \mathbf{E} &= -\Phi \mathbf{R}_0 \\ a_1 \mathbf{E} &= \mathbf{R}_0 - \Phi \mathbf{R}_1 \\ &\vdots \\ a_{n-2} \mathbf{E} &= \mathbf{R}_{n-3} - \Phi \mathbf{R}_{n-2} \\ a_{n-1} \mathbf{E} &= \mathbf{R}_{n-2} - \Phi \mathbf{R}_{n-1} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{R}_{n-1} . \end{aligned} \quad (8.12)$$

Multipliziert man nun jeweils die j -te Zeile von (8.12) mit Φ^j , $j = 0, \dots, n$, und addiert diese, dann folgt (8.7), womit Satz 8.1 bewiesen ist. \square

Liegt das System (8.3) in 1-ter Standardform (Steuerbarkeitsnormalform) $\{\Phi_R, \Gamma_R, \mathbf{c}_R, d_R\}$ gemäß (7.57) vor, dann erhält man unmittelbar eine Vorschrift, wie \mathbf{k}^T im Zustandsregelgesetz (8.4) festzulegen ist, damit die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\Phi_g = (\Phi_R + \Gamma_R \mathbf{k}^T)$ von (8.5) an beliebig vorgegebenen gewünschten Stellen zu liegen kommen. Es gilt nämlich für Φ_g in diesem Fall

$$\Phi_g = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\Phi_R} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma_R} \underbrace{\begin{bmatrix} k_0 & k_1 & \dots & k_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^T} \quad (8.13)$$

bzw.

$$\Phi_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ k_0 - a_0 & k_1 - a_1 & \dots & k_{n-2} - a_{n-2} & k_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

mit dem zugehörigen charakteristischen Polynom von Φ_g (man wiederhole dazu die Überlegungen von Abschnitt 7.8)

$$p_g(z) = (a_0 - k_0) + (a_1 - k_1)z + \dots + (a_{n-1} - k_{n-1})z^{n-1} + z^n. \quad (8.15)$$

Die Vorgangsweise bei der Polvorgabe im Zustandsraum für ein System in Steuerbarkeitsnormalform $\{\Phi_R, \Gamma_R, \mathbf{c}_R, d_R\}$ ist demnach die folgende: Man gibt die n gewünschten Eigenwerte λ_j , $j = 1, \dots, n$, des geschlossenen Kreises vor und bestimmt sich daraus ein gewünschtes charakteristisches Polynom für den geschlossenen Kreis

$$p_{g,soll}(z) = \prod_{j=1}^n (z - \lambda_j) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_{n-1} z^{n-1} + z^n. \quad (8.16)$$

Durch Koeffizientenvergleich von (8.15) und (8.16) erhält man dann direkt die Zustandsreglerkoeffizienten

$$k_j = a_j - p_j, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (8.17)$$

Wenn nun das System (8.3) nicht in Steuerbarkeitsnormalform vorliegt, dann kann die Polvorgabe im Zustandsraum mit Hilfe der *Formel von Ackermann* durchgeführt werden.

Satz 8.2 (Formel von Ackermann).

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix Φ_g des geschlossenen Kreises (8.5) können genau dann durch eine Zustandsrückführung der Form (8.4) beliebig platziert werden, wenn das System (8.3) vollständig erreichbar ist. Der Rückführungsvektor \mathbf{k}^T berechnet sich nach der Beziehung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_n^T = \Gamma_R^T} = \mathbf{v}_1^T \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \Phi^2\Gamma & \dots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)} \quad (8.18a)$$

$$\mathbf{k}^T = -p_0 \mathbf{v}_1^T - p_1 \mathbf{v}_1^T \Phi - \dots - p_{n-1} \mathbf{v}_1^T \Phi^{n-1} - \mathbf{v}_1^T \Phi^n = -\mathbf{v}_1^T p_{g, \text{soll}}(\Phi) \quad (8.18b)$$

mit $p_{g, \text{soll}}(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_{n-1} z^{n-1} + z^n$ als gewünschtes charakteristisches Polynom des geschlossenen Systems.

Beweis. Am Beginn des Beweises ist festzuhalten, dass die Eigenschaft der vollständigen Erreichbarkeit des Systems (8.3) durch eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x}_k = \mathbf{V}\mathbf{z}_k$ mit einer regulären $(n \times n)$ -Matrix \mathbf{V} weder verloren noch hinzugewonnen werden kann. Dies ist unmittelbar einsichtig, denn die Erreichbarkeitsmatrix des zu (8.3) zugehörigen äquivalenten transformierten Systems

$$\mathbf{z}_{k+1} = \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\Phi\mathbf{V}}_{\tilde{\Phi}} \mathbf{z}_k + \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\Gamma}_{\tilde{\Gamma}} u_k, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0 \quad (8.19a)$$

$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + du_k \quad (8.19b)$$

lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma}) &= \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma} & \tilde{\Phi}\tilde{\Gamma} & \tilde{\Phi}^2\tilde{\Gamma} & \dots & \tilde{\Phi}^{n-1}\tilde{\Gamma} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{-1}\Gamma & \mathbf{V}^{-1}\Phi\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}\Gamma & \mathbf{V}^{-1}\Phi\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}\Phi\Gamma & \dots & \mathbf{V}^{-1}\Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix} &= \mathbf{V}^{-1}\mathcal{R}(\Phi, \Gamma) . \end{aligned} \quad (8.20)$$

Aus (8.20) erkennt man, dass wegen der Regularität von \mathbf{V} die Regularität der Erreichbarkeitsmatrix $\mathcal{R}(\tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma})$ des transformierten Systems (8.19) unmittelbar aus der Regularität der Erreichbarkeitsmatrix $\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)$ des ursprünglichen Systems (8.3) folgt und vice versa. Weiters wurde in (7.59) gezeigt, dass ein System, welches in Steuerbarkeitsnormalform vorliegt, immer vollständig erreichbar ist. Kombiniert man diese beiden Erkenntnisse, dann folgt, dass ein vollständig erreichbares System immer auf Steuerbarkeitsnormalform transformiert werden kann.

Die Idee zur Bestimmung der Beziehung (8.18) besteht nun darin, das System (8.3) in einem ersten Schritt auf Steuerbarkeitsnormalform zu transformieren und anschließend die Polvorgabe im Zustandsraum, wie in (8.17) gezeigt, durchzuführen.

Gesucht ist also eine reguläre Zustandstransformation der Form

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (8.21)$$

so, dass das System (8.3) im neuen Zustand \mathbf{z} in Steuerbarkeitsnormalform

$$\mathbf{z}_{k+1} = \underbrace{\mathbf{V}\Phi\mathbf{V}^{-1}}_{\Phi_R} \mathbf{z}_k + \underbrace{\mathbf{V}\Gamma}_{\Gamma_R=\mathbf{e}_n} u_k \quad (8.22)$$

vorliegt. Aus der Gleichung

$$\Phi_R = \mathbf{V}\Phi\mathbf{V}^{-1} \quad (8.23a)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} \Phi \quad (8.23b)$$

erhält man

$$\mathbf{v}_{j+1}^T = \mathbf{v}_j^T \Phi, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (8.24a)$$

$$-a_0 \mathbf{v}_1^T - a_1 \mathbf{v}_2^T - \dots - a_{n-1} \mathbf{v}_n^T = \mathbf{v}_n^T \Phi. \quad (8.24b)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen für \mathbf{v}_j^T , $j = 2, \dots, n$, in die letzte Gleichung von (8.24)

$$\mathbf{v}_1^T (a_0 + a_1 \Phi + \dots + a_{n-1} \Phi^{n-1} + \Phi^n) = \mathbf{0}^T \quad (8.25)$$

und Anwenden des Satzes 8.1 erkennt man, dass (8.25) trivialerweise erfüllt ist. Die noch fehlende Gleichung zur Bestimmung von \mathbf{v}_1^T erhält man aus

$$\Gamma_R = \mathbf{e}_n = \mathbf{V}\Gamma \quad (8.26a)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} \Gamma \quad (8.26b)$$

und mit (8.24) folgt

$$\mathbf{e}_n^T = \mathbf{v}_1^T \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \Phi^2\Gamma & \dots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)}. \quad (8.27)$$

Unter der Voraussetzung, dass das System (8.3) vollständig erreichbar ist, lautet dann die Zustandstransformation

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_1^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{v}_1^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

mit

$$\mathbf{v}_1^T = \mathbf{e}_n^T \mathcal{R}(\Phi, \Gamma)^{-1}. \quad (8.29)$$

Für das System in Steuerbarkeitsnormalform (8.22) kann durch

$$u_k = \mathbf{k}_R^T \mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} a_0 - p_0 & a_1 - p_1 & \dots & a_{n-1} - p_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{z}_k \quad (8.30)$$

direkt das gewünschte charakteristische Polynom

$$p_{g, \text{soll}}(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_{n-1} z^{n-1} + z^n \quad (8.31)$$

und damit die Eigenwerte des geschlossenen Kreises vorgegeben werden (man vergleiche dazu auch (8.13) - (8.17)).

Da man diese zwei Schritte (Transformation auf Steuerbarkeitsnormalform mit anschließender Polvorgabe) nicht immer getrennt durchführen möchte, transformiert man den geschlossenen Kreis (8.22) und (8.30) in den ursprünglichen Zustand \mathbf{x} zurück, also

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\mathbf{V}^{-1} \Phi_R \mathbf{V}}_{\Phi} \mathbf{x}_k + \underbrace{\mathbf{V}^{-1} \Gamma_R}_{\Gamma} \underbrace{\mathbf{k}_R^T \mathbf{V}}_{\mathbf{k}^T} \mathbf{x}_k. \quad (8.32)$$

Damit lautet aber der Rückführungsvektor \mathbf{k}^T im ursprünglichen System wie folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^T &= \mathbf{k}_R^T \mathbf{V} = \begin{bmatrix} a_0 - p_0 & a_1 - p_1 & \dots & a_{n-1} - p_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_1^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{v}_1^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{v}_1^T \underbrace{\left(a_0 + a_1 \Phi + \dots + a_{n-1} \Phi^{n-1} \right)}_{= -\Phi^n \text{ nach Satz 8.1}} - \mathbf{v}_1^T \left(p_0 + p_1 \Phi + \dots + p_{n-1} \Phi^{n-1} \right) \\ &= -\mathbf{v}_1^T \left(p_0 + p_1 \Phi + \dots + p_{n-1} \Phi^{n-1} + \Phi^n \right) = -\mathbf{v}_1^T p_{g, \text{soll}}(\Phi) \end{aligned} \quad (8.33)$$

mit dem gewünschten charakteristischen Polynom $p_{g,soll}$ von (8.31). Es ist damit bewiesen, dass wenn das System (8.3) vollständig erreichbar ist, dann können die Pole des geschlossenen Kreises mit dem Zustandsregler $u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$ und \mathbf{k}^T nach (8.18) beliebig platziert werden.

Aufgabe 8.1. Zeigen Sie die Umkehrung, dass aus der Tatsache der nicht vollständigen Erreichbarkeit von (8.3) folgt, dass die Pole des geschlossenen Kreises nicht alle beliebig vorgegeben werden können.

Hinweis: Nutzen Sie die Tatsache, dass jedes nicht vollständig erreichbare System auf die Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,k+1} \\ \mathbf{x}_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \mathbf{0} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,k} \\ \mathbf{x}_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T & \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,k} \\ \mathbf{x}_{2,k} \end{bmatrix} + du_k .$$

transformiert werden kann.

Mit der Lösung von Aufgabe 8.1 ist aber Satz 8.2 gezeigt. \square

Wie man gesehen hat, spielt die Eingangsfolge (r_k) von (8.5) für die Polvorgabe keine Rolle. Nun beinhaltet das Zustandsregelgesetz

$$u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k + gr_k \quad (8.34)$$

von (8.4) noch den Parameter g , mit dessen Hilfe man beispielsweise erreichen kann, dass für den geschlossenen Kreis

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{(\Phi + \Gamma \mathbf{k}^T)}_{\Phi_g} \mathbf{x}_k + \Gamma gr_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8.35a)$$

$$y_k = (\mathbf{c}^T + d\mathbf{k}^T) \mathbf{x}_k + dgr_k \quad (8.35b)$$

gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = r_0 \quad (8.36)$$

mit der Sprungfolge $(r_k) = r_0 (1^k) = (r_0, r_0, r_0, \dots)$ als Eingangsgröße. Berechnet man nun die z -Transformierte von (y_k) , so erhält man

$$y_z(z) = (\mathbf{c}^T + d\mathbf{k}^T) (z\mathbf{E} - \Phi - \Gamma \mathbf{k}^T)^{-1} \left(\underbrace{\Gamma g r_0 \frac{z}{z-1}}_{r_z(z)} + z\mathbf{x}_0 \right) + dg r_0 \frac{z}{z-1} \quad (8.37)$$

bzw. durch Anwendung des Endwertsatzes folgt

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) y_z(z) = (\mathbf{c}^T + d\mathbf{k}^T) (\mathbf{E} - \Phi - \Gamma \mathbf{k}^T)^{-1} \Gamma g r_0 + dg r_0 = r_0, \quad (8.38)$$

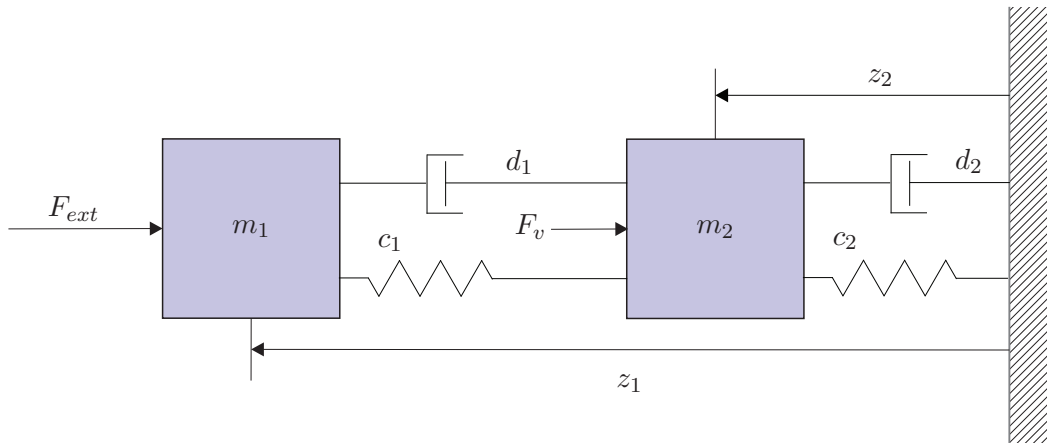


Abbildung 8.1.: Zweimassenschwinger.

da alle Nullstellen von $\det(z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T)$ im Inneren des Einheitskreises der komplexen z -Ebene liegen. Damit errechnet sich g aus (8.36) und (8.38) zu

$$g = \frac{1}{(\mathbf{c}^T + d\mathbf{k}^T)(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T)^{-1}\mathbf{\Gamma} + d}. \quad (8.39)$$

Beispiel 8.1 (Simulationsbeispiel). Als Beispiel betrachte man den Zweimassenschwinger von Abbildung 8.1 bestehend aus den zwei Massen m_1 und m_2 , den zwei linearen Federn mit den Federkonstanten c_1 und c_2 sowie den zwei geschwindigkeitsproportionalen Dämpfern mit den Dämpfungskonstanten d_1 und d_2 .

Auf die erste Masse m_1 wirkt die externe Kraft F_{ext} , die zugleich die Stellgröße $u = F_{ext}$ des Systems darstellt, und die auf die zweite Masse m_2 wirkende Kraft $F_v = v$ ist als unbekannte Störung aufzufassen. Das mathematische Modell errechnet sich direkt durch Anwendung des Impulserhaltungssatzes auf die beiden Massen m_1 und m_2 in der Form

$$m_1 \ddot{z}_1 = -c_1(z_1 - z_2) - d_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - F_{ext} \quad (8.40a)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = c_1(z_1 - z_2) + d_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - c_2 z_2 - d_2 \dot{z}_2 - F_v, \quad (8.40b)$$

wobei z_1 und z_2 die Auslenkungen der Massen m_1 und m_2 um die entspannte Lage der Federn beschreiben. Mit den Zustandsgrößen $\mathbf{x}^T = [z_1 \quad v_1 = \dot{z}_1 \quad z_2 \quad v_2 = \dot{z}_2]$, der Stellgröße $u = F_{ext}$, der Störung $v = F_v$ und der Ausgangsgröße $y = z_2$ ergibt sich die Zustandsdarstellung von (8.40) zu

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{b}_v v, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8.41a)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (8.41b)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1}{m_1} & -\frac{d_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & \frac{d_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_1}{m_2} & \frac{d_1}{m_2} & -\frac{c_1 + c_2}{m_2} & -\frac{d_1 + d_2}{m_2} \end{bmatrix}, \quad (8.42a)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.42b)$$

$$\mathbf{b}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix}, \quad (8.42c)$$

$$\mathbf{c}^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0]. \quad (8.42d)$$

Wählt man für die Parameter die Werte $m_1 = 1$, $m_2 = 10$, $c_1 = c_2 = 1$ und $d_1 = d_2 = 1$, dann lautet das mathematische Modell

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ v_1 \\ z_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ v_1 \\ z_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} v \quad (8.43a)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} z_1 \\ v_1 \\ z_2 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (8.43b)$$

Für den Reglerentwurf berechnet man in einem ersten Schritt das zugehörige Abtastsystem mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y für die Abtastzeit $T_a = 2$ (MATLAB-Befehl `c2d`). Im Anschluss daran soll für das Abtastsystem ein Zustandsregler mittels Polvorgabe so entworfen werden, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei $\exp(\lambda_j T_a)$, $j = 1, \dots, 4$, mit $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 0.5I$, $\lambda_3 = -1$ und $\lambda_4 = -2$ zu liegen kommen (MATLAB-Befehl `acker`). Man beachte, dass in MATLAB der Zustandsregler im Gegensatz zum Skriptum, siehe (8.34), mit negativem Vorzeichen in der Form $u_k = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$ angesetzt ist! Im Weiteren ist der Vorfaktor g in (8.34) so zu bestimmen, dass für eine Sprungfolge $(r_k) = r_0 (1^k)$ als Führungsgröße gilt $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = r_0$.

Mit diesen Vorgaben errechnet sich für das vorliegende Beispiel der Zustandsregler (8.34) zu

$$u_k = \begin{bmatrix} 0.0189 & 0.4627 & 0.5245 & 3.8538 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k - 1.5624r_k . \quad (8.44)$$

Aufgabe 8.2. Zeigen Sie, dass für den Fall, dass das System (8.3) in 1-ter Standardform $\{\Phi_R, \Gamma_R, \mathbf{c}_R, d_R\}$ gemäß (7.57) vorliegt, sich der Ausdruck für g von (8.39) wie folgt

$$g = \frac{\sum_{j=0}^n p_j}{(\mathbf{c}^T + d\mathbf{k}^T) \mathbf{1} + d \sum_{j=0}^n p_j}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_n = 1$$

vereinfacht.

Hinweis: Es gilt folgender Zusammenhang

$$\left(\mathbf{E} - \Phi_R - \Gamma_R \mathbf{k}_R^T\right)^{-1} = \frac{\text{adj}\left(\mathbf{E} - \Phi_R - \Gamma_R \mathbf{k}_R^T\right)}{\det\left(\mathbf{E} - \Phi_R - \Gamma_R \mathbf{k}_R^T\right)}$$

mit

$$\det\left(\mathbf{E} - \Phi_R - \Gamma_R \mathbf{k}_R^T\right) = p_{g,\text{soll}}(z)|_{z=1} = \sum_{j=0}^n p_j, \quad p_n = 1$$

und

$$\left(\mathbf{E} - \Phi_R - \Gamma_R \mathbf{k}_R^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{n-2} & 1 + p_{n-1} \end{bmatrix} .$$

Aufgabe 8.3. Entwerfen Sie für das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

einen Zustandsregler so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei λ_1 und λ_2 liegen.

Hinweis: Für festes λ_1 und λ_2 verwenden Sie den MATLAB-Befehl `acker`.

Lösung von Aufgabe 8.3. Der Zustandsregler lautet $u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$ mit dem Rückführungsvektor

$$\mathbf{k}^T = \left[1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \right].$$

Aufgabe 8.4. Gegeben ist das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_k$$

mit den Parametern $a_{ij} \neq 0$.

- (1) Berechnen Sie die Erreichbarkeitsmatrix und geben Sie Bedingungen für b_1 und b_2 an, damit diese regulär ist.
- (2) Entwerfen Sie einen Zustandsregler so, dass das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises die Form

$$p_{g,soll}(z) = z^2 + p_1 z + p_2$$

hat.

Lösung von Aufgabe 8.4. ad (1) Die Bedingungen für die vollständige Erreichbarkeit lauten

$$\begin{aligned} b_1 &\neq 0 \\ b_2 &\neq \frac{a_{21} b_1}{a_{11} - a_{22}} \quad \text{für } a_{11} \neq a_{22} \\ b_2 &\text{ beliebig} \quad \text{für } a_{11} = a_{22}, a_{21} \neq 0. \end{aligned}$$

ad (2) Der Zustandsregler errechnet sich zu $u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$ mit

$$\mathbf{k}^T = \left[-\frac{b_2 a_{11}^2 + b_2 p_1 a_{11} + b_2 p_2 - a_{21} b_1 a_{11} - a_{21} b_1 a_{22} - a_{21} b_1 p_1}{b_1 (-a_{21} b_1 - a_{22} b_2 + a_{11} b_2)} \quad \frac{a_{22}^2 + p_1 a_{22} + p_2}{-a_{21} b_1 - a_{22} b_2 + a_{11} b_2} \right].$$

8.1.1. Dead-Beat Regler

Will man nun ein Zustandsregelgesetz der Form (8.34) mit $g = 0$ so entwerfen, dass jede Anfangsauslenkung \mathbf{x}_0 des Systems (8.3) möglichst schnell zu $\mathbf{0}$ gemacht wird, dann gelangt man zum so genannten *Dead-Beat Regler*. Es gilt nun folgender Satz:

Satz 8.3 (Dead-Beat Regler). *Legt man für ein vollständig erreichbares System (8.3) gemäß Satz 8.2 sämtliche Eigenwerte der Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises nach Null, das gewünschte charakteristische Polynom lautet also $p_{g,soll}(z) = z^n$, dann wird jede Anfangsauslenkung \mathbf{x}_0 in höchstens n Schritten in $\mathbf{0}$ übergeführt.*

Beweis. Die Dynamikmatrix Φ_g des geschlossenen Kreises lautet für $p_{g,soll}(z) = z^n$

$$\Phi_g = \Phi + \Gamma \mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.45)$$

und diese ist nach Definition 3.1 nilpotent der Ordnung n , d. h., es gilt $\mathbf{N}^k = \mathbf{0}$ für $k \geq n$. Damit lässt sich aber für eine beliebige Anfangsauslenkung \mathbf{x}_0 für den geschlossenen Kreis $\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_g \mathbf{x}_k$ zeigen, dass wegen

$$\mathbf{x}_k = \Phi_g^k \mathbf{x}_0 \quad (8.46)$$

gilt $\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ für $k \geq n$. □

Aufgabe 8.5. Entwerfen Sie für das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

einen Dead-Beat Regler und bestimmen Sie jenes Gebiet \mathcal{D} in der $(x_{1,0}, x_{2,0})$ -Ebene, wo die Anfangsauslenkungen \mathbf{x}_0 liegen dürfen, damit der Betrag der Stellgröße immer kleiner gleich 1 ist, also $|u_k| \leq 1$ für $k = 0, 1, 2, \dots$

Lösung von Aufgabe 8.5. Der Dead-Beat Regler lautet $u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$ mit

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

und das Gebiet der zulässigen Anfangsauslenkungen für $|u_k| \leq 1$ errechnet sich zu

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} -\frac{1}{2}(1 + x_{1,0}) < x_{2,0} < \frac{1}{2}(1 - x_{1,0}) \\ -(1 + x_{1,0}) < x_{2,0} < (1 - x_{1,0}) \end{array} \right\}.$$

8.2. Der PI-Zustandsregler

In (8.39) wurde der Vorfaktor g des Zustandsreglers (8.4) so berechnet, dass die bleibende Regelabweichung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (r_k - y_k) \quad (8.47)$$

zufolge der Eingangssprungfolge $(r_k) = r_0 (1^k) = (r_0, r_0, r_0, \dots)$ Null wird. Dies ist natürlich dann nicht mehr erfüllt, wenn die Streckenparameter vom nominellen Wert abweichen bzw. Störungen auf die Strecke einwirken. Man betrachte dazu das System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma u_k + \Gamma_v v_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8.48a)$$

$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k \quad (8.48b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang u , dem Ausgang y , der Störung v sowie den Matrizen $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\Gamma, \Gamma_v, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Setzt man für u_k den Zustandsregler (8.4) mit $(r_k) = (0^k)$ ein, dann erhält man

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{(\Phi + \Gamma \mathbf{k}^T)}_{\Phi_g} \mathbf{x}_k + \Gamma_v v_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8.49a)$$

$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k \quad (8.49b)$$

bzw. für eine konstante Störfolge $v_k = v_0 (1^k)$ errechnet sich die bleibende Regelabweichung zu

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (r_k - y_k) = - \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) y_z(z) = -\mathbf{c}^T (\mathbf{E} - \Phi - \Gamma \mathbf{k}^T)^{-1} \Gamma_v v_0 \neq 0. \quad (8.50)$$

Aus diesem Grund muss man wie bereits beim Frequenzkennlinienverfahren im Regler einen Integralanteil einbauen, um zumindest konstante Störungen und Parameterschwankungen stationär unterdrücken zu können. Dazu wird ein so genannter *PI-Zustandsregler* der Form

$$x_{I,k+1} = x_{I,k} + \left(r_k - \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{x}_k}_{y_k} \right) \quad (8.51a)$$

$$u_k = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_x^T & k_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix} + k_P \left(r_k - \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{x}_k}_{y_k} \right) \quad (8.51b)$$

angesetzt. Der Entwurf der Reglerparameter \mathbf{k}_x^T , k_I und k_P erfolgt nun in zwei Schritten:

Schritt 1: Im ersten Schritt wird für das um einen Integrator erweiterte System (8.48)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ x_{I,k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^T & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi_I} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\Gamma_I} u_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma_{r,I}} r_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\Gamma_{v,I}} v_k \quad (8.52a)$$

$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k \quad (8.52b)$$

ein Zustandsregler

$$u_k = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^T & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix} \quad (8.53)$$

nach Satz 8.2 entworfen. Ein Vergleich von (8.51b) mit (8.53) zeigt, dass gilt

$$\mathbf{k}_x^T - k_P \mathbf{c}^T = \mathbf{k}_1^T \quad (8.54a)$$

und

$$k_I = k_2 . \quad (8.54b)$$

Man beachte, dass dies unter bestimmten Voraussetzungen immer möglich ist, denn es gilt folgender Satz:

Satz 8.4. Wenn die Dynamikmatrix Φ des Systems (8.52) keinen Eigenwert bei 1 und die Übertragungsfunktion von u_k zu y_k keine Nullstelle bei 1 hat, dann folgt aus der vollständigen Erreichbarkeit von (Φ, Γ) die vollständige Erreichbarkeit von (Φ_I, Γ_I) .

Beweis: siehe Anhang C

Schritt 2: Im zweiten Schritt müssen noch gemäß (8.54) die Parameter \mathbf{k}_x^T und k_P festgelegt werden. Da dieses Problem unterbestimmt ist, legt man im Allgemeinen k_P fest und berechnet sich anschließend aus (8.54) \mathbf{k}_x^T . Geht man davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $x_{I,0} = 0$, dann folgt aus (8.51b)

$$u_0 = k_P r_0 . \quad (8.55)$$

Wenn nun die Dynamikmatrix Φ stabil ist, also lauter Eigenwerte im Inneren des Einheitskreises besitzt, dann errechnet sich die Ausgangsgröße im eingeschwungenen Zustand zu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_\infty = \mathbf{c}^T (\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \Gamma u_\infty . \quad (8.56)$$

In diesem Fall ist es nun zweckmäßig, den Proportionalanteil k_P so festzulegen, dass zum Zeitpunkt Null die Stellgröße u_0 den gleichen Wert, der auch für $k \rightarrow \infty$ zur Einhaltung der Bedingung $y_\infty = r_0$ benötigt wird, annimmt, also gilt

$$u_0 = k_P r_0 = \frac{r_0}{\mathbf{c}^T (\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \Gamma} = u_\infty \quad (8.57)$$

bzw.

$$k_P = \frac{1}{\mathbf{c}^T (\mathbf{E} - \Phi)^{-1} \Gamma} . \quad (8.58)$$

Abbildung 8.2 zeigt das Blockschaltbild eines zeitdiskreten, zeitinvarianten, linearen Systems mit PI-Zustandsregler.

Beispiel 8.2 (Simulationsbeispiel). Für den Zweimassenschwinger von Abbildung 8.1 mit dem zugehörigen mathematischen Modell in Zustandsdarstellung (8.43) soll ein zeitdiskreter PI-Zustandsregler gemäß (8.51) für eine Abtastzeit $T_a = 2$ so entworfen werden, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei $\exp(\lambda_j T_a)$, $j = 1, \dots, 5$, mit $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 0.5I$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -2$ und $\lambda_5 = -3$ zu liegen kommen (MATLAB-Befehl `acker`).

Mit diesen Vorgaben errechnet sich für das vorliegende Beispiel der PI-

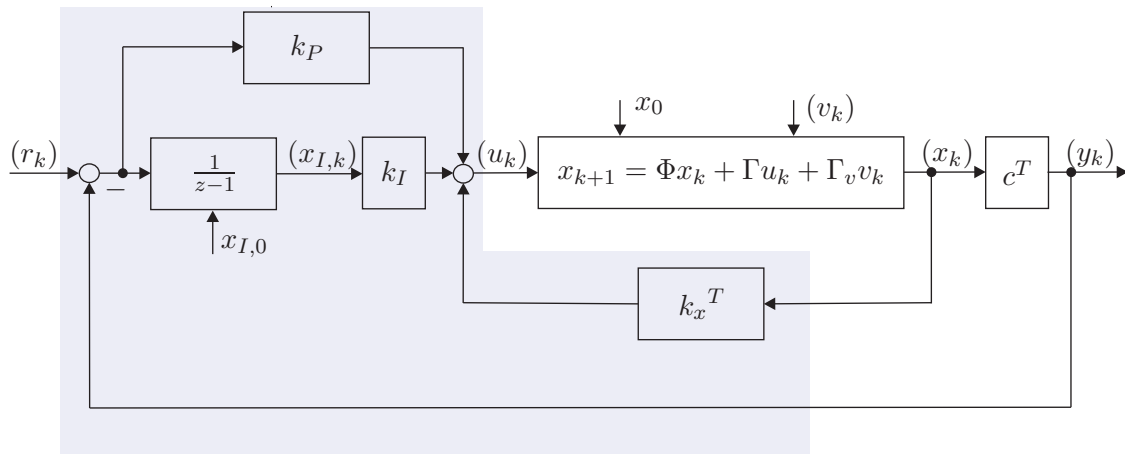


Abbildung 8.2.: Blockschaltbild zum PI-Zustandsregler für den zeitdiskreten Fall.

Zustandsregler (8.51) zu

$$x_{I,k+1} = x_{I,k} + (r_k - y_k) \quad (8.59a)$$

$$u_k = \begin{bmatrix} 0.2163 & 0.7201 & 2.4323 & 6.7892 & -1.5585 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix} + (-1)(r_k - y_k) . \quad (8.59b)$$

8.3. Zustandsbeobachter

Der Nachteil des Zustandsreglers liegt offensichtlich darin, dass für dessen Realisierung der gesamte Zustand \mathbf{x} gemessen werden muss. In vielen Fällen ist dies natürlich nicht möglich, weshalb man sich die Frage stellt, ob man den Zustand \mathbf{x} allein durch Kenntnis der Ausgangsgröße y und der Stellgröße u rekonstruieren kann. Um diese Frage zu beantworten, betrachte man das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete Eingrößensystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma u_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8.60a)$$

$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d u_k \quad (8.60b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang u , dem Ausgang y sowie den Matrizen $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ und $d \in \mathbb{R}$. Eine Einrichtung, die aus Kenntnis der Eingangsgrößen (u_0, u_1, \dots, u_k) und der Ausgangsgrößen (y_0, y_1, \dots, y_k) den Zustand \mathbf{x} zum Zeitpunkt k schätzt, nennt man auch *Beobachter*. Es wird sich in weiterer Folge noch zeigen, dass so ein Beobachter für (8.60) genau dann konstruiert werden kann, wenn das System (8.60) vollständig beobachtbar ist. Sämtliche Überlegungen lassen sich ohne zusätzlichen Aufwand direkt auf den zeitkontinuierlichen Fall übertragen.

8.3.1. Trivialer Beobachter (Simulator)

Die einfachste Möglichkeit, den Zustand \mathbf{x} zu schätzen, besteht darin, das mathematische Modell der Strecke gemäß (8.60)

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma u_k, \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (8.61a)$$

$$\hat{y}_k = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k + d u_k \quad (8.61b)$$

mit dem *geschätzten Zustand* $\hat{\mathbf{x}}$ im Rechner zu simulieren. Die Abweichung des geschätzten Zustandes $\hat{\mathbf{x}}$ vom tatsächlichen Zustand \mathbf{x} , der so genannte *Beobachtungsfehler* $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$, genügt dann folgender Differenzgleichung

$$\mathbf{e}_{k+1} = \Phi \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0. \quad (8.62)$$

Ein Beobachter der Form (8.61), der einfach eine Kopie des Streckenmodells im Rechner darstellt, wird auch als *trivialer Beobachter* oder *Simulator* bezeichnet und er hat folgende Nachteile:

- (1) Die Fehlerdynamik (8.62) ist offenbar nur dann stabil, wenn die Strecke stabil ist, also sämtliche Eigenwerte von Φ im Inneren des Einheitskreises liegen und
- (2) das Abklingen von Beobachtungsfehlern \mathbf{e}_0 bei stabilen Strecken kann nicht beeinflusst werden, sondern ist durch die Streckendynamik festgelegt.

Der triviale Beobachter (8.61) macht noch nicht von der Tatsache Gebrauch, dass dem System (8.60) eine Messung, nämlich die von y , zur Verfügung steht. Diese Überlegung führt schlussendlich zum so genannten *vollständigen Luenberger Beobachter*, der im Folgenden behandelt wird.

Beispiel 8.3 (Simulationsbeispiel). Für den Zweimassenschwinger von Abbildung 8.1 mit dem zugehörigen mathematischen Modell in Zustandsdarstellung (8.43) lautet der zeitdiskrete triviale Beobachter gemäß (8.61) für eine Abtastzeit $T_a = 2$

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_{1,k+1} \\ \hat{v}_{1,k+1} \\ \hat{z}_{2,k+1} \\ \hat{v}_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2036 & 0.5061 & 0.6941 & 1.3366 \\ -0.3724 & -0.1688 & 0.2387 & 0.9328 \\ 0.0694 & 0.1337 & 0.7589 & 1.5754 \\ 0.0239 & 0.0933 & -0.1814 & 0.5774 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_{1,k} \\ \hat{v}_{1,k} \\ \hat{z}_{2,k} \\ \hat{v}_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.8987 \\ -0.5061 \\ -0.1023 \\ -0.1337 \end{bmatrix} u_k \quad (8.63a)$$

$$\hat{y}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_{1,k} \\ \hat{v}_{1,k} \\ \hat{z}_{2,k} \\ \hat{v}_{2,k} \end{bmatrix}. \quad (8.63b)$$

8.3.2. Vollständiger Luenberger Beobachter

Fügt man dem trivialen Beobachter von (8.61) einen zusätzlichen Term $\hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k)$, $\hat{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}^n$, hinzu, dann erhält man den so genannten *vollständigen Luenberger Beobachter*

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma u_k + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (8.64a)$$

$$\hat{y}_k = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k + du_k. \quad (8.64b)$$

Die zugehörige Fehlerdynamik für $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ mit \mathbf{x} von (8.60) und $\hat{\mathbf{x}}$ von (8.64) errechnet sich in der Form

$$\mathbf{e}_{k+1} = \underbrace{(\Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T)}_{\Phi_e} \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0. \quad (8.65)$$

Es stellt sich nun die Frage, unter welchen Voraussetzungen kann $\hat{\mathbf{k}}$ so entworfen werden, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix Φ_e von (8.65) an vorgegebenen gewünschten Stellen zu liegen kommen? Diese Aufgabenstellung erinnert sehr stark an den Zustandsreglerentwurf von Abschnitt 8.1 – und tatsächlich kann hier ein Satz vollkommen analog zu Satz 8.2 angegeben werden:

Satz 8.5 (Formel von Ackermann für den Zustandsbeobachterentwurf). Die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix Φ_e von (8.65) des vollständigen Beobachters (8.64) zum System (8.60) können genau dann durch $\hat{\mathbf{k}}$ beliebig platziert werden, wenn das System (8.60) vollständig beobachtbar ist. Der Vektor $\hat{\mathbf{k}}$ berechnet sich nach der Beziehung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}(\mathbf{c}^T, \Phi)} \hat{\mathbf{v}}_1 \quad (8.66a)$$

$$\hat{\mathbf{k}} = -\hat{p}_0 \hat{\mathbf{v}}_1 - \hat{p}_1 \Phi \hat{\mathbf{v}}_1 - \dots - \hat{p}_{n-1} \Phi^{n-1} \hat{\mathbf{v}}_1 - \Phi^n \hat{\mathbf{v}}_1 = -\hat{p}_{g, \text{soll}}(\Phi) \hat{\mathbf{v}}_1 \quad (8.66b)$$

mit $\hat{p}_{g, \text{soll}}(z) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 z + \hat{p}_2 z^2 + \dots + \hat{p}_{n-1} z^{n-1} + z^n$ als gewünschtes charakteristisches Polynom der Fehlerdynamikmatrix Φ_e .

Beweis. Aufgrund der Tatsache, dass das charakteristische Polynom einer Matrix gleich dem charakteristischen Polynom der Transponierten dieser Matrix ist, es gilt also

$$\det(z\mathbf{E} - \Phi_e) = \det(z\mathbf{E} - \Phi - \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T) = \det(z\mathbf{E} - \Phi^T - \mathbf{c}\hat{\mathbf{k}}^T) = \det(z\mathbf{E} - \Phi_e^T), \quad (8.67)$$

kann der Entwurf von $\hat{\mathbf{k}}$ zur Platzierung der Eigenwerte von $\Phi_e = \Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T$ auf Basis von $\Phi_e^T = \Phi^T + \mathbf{c}\hat{\mathbf{k}}^T$ durchgeführt werden. Vergleicht man nun Φ_e^T mit $\Phi_g = \Phi + \Gamma\mathbf{k}^T$

von (8.5), so erkennt man, dass der *Beobachterentwurf* gemäß dem Dualitätsprinzip von Abschnitt 7.7 *dual zum Zustandsreglerentwurf* ist, indem man einfach

$$\begin{array}{ll} \Phi^T & \text{durch } \Phi \\ \mathbf{c} & \text{durch } \Gamma \\ \hat{\mathbf{k}} & \text{durch } \mathbf{k} \end{array} \quad (8.68)$$

ersetzt. Mit Hilfe dieses Dualitätsprinzips kann Satz 8.5 unmittelbar aus Satz 8.2 hergeleitet werden. \square

Beispiel 8.4 (Simulationsbeispiel). Für den Zweimassenschwinger von Abbildung 8.1 mit dem zugehörigen mathematischen Modell in Zustandsdarstellung (8.43) soll ein zeitdiskreter vollständiger Luenberger Beobachter gemäß (8.64) für eine Abtastzeit $T_a = 2$ so entworfen werden, dass die Pole der Fehlerdynamikmatrix bei $\exp(\lambda_j T_a)$, $j = 1, \dots, 4$, mit $\lambda_{1,2} = -3 \pm 3I$ und $\lambda_{3,4} = -1 \pm I$ zu liegen kommen (MATLAB-Befehl `acker`).

Mit diesen Vorgaben errechnet sich für das vorliegende Beispiel der zeitdiskrete vollständige Luenberger Beobachter (8.64) zu

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \underbrace{(\Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T)}_{\Phi_e} \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma u_k - \hat{\mathbf{k}} y_k \quad (8.69a)$$

$$\hat{y}_k = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \hat{\mathbf{x}}_k \quad (8.69b)$$

mit

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0.2036 & 0.5061 & -0.6543 & 1.3366 \\ -0.3724 & -0.1688 & 0.1383 & 0.9328 \\ 0.0694 & 0.1337 & -0.7201 & 1.5754 \\ 0.0239 & 0.0933 & -0.2390 & 0.5774 \end{bmatrix}, \quad (8.70a)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -0.8987 \\ -0.5061 \\ -0.1023 \\ -0.1337 \end{bmatrix}, \quad (8.70b)$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} -1.3483 \\ -0.1004 \\ -1.4790 \\ -0.0576 \end{bmatrix}. \quad (8.70c)$$

Aufgabe 8.6. Welche vereinfachte Berechnungsvorschrift lässt sich für $\hat{\mathbf{k}}$ von (8.64) angeben, wenn das System (8.60) in 2-ter Standardform (*Beobachtbarkeitsnormalform*)

$\{\Phi_B, \Gamma_B, \mathbf{c}_B d_B\}$ gemäß (7.58) mit dem charakteristischen Polynom $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ vorliegt und das gewünschte charakteristische Polynom der Fehlerdynamikmatrix $\Phi_e = \Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T$ durch $\hat{p}_{g,soll}(z) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 z + \hat{p}_2 z^2 + \dots + \hat{p}_{n-1} z^{n-1} + z^n$ gegeben ist.

Lösung von Aufgabe 8.6. Die Komponenten des Vektors $\hat{\mathbf{k}}$ lauten in diesem Fall

$$\hat{k}_j = a_j - p_j, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Aufgabe 8.7. Zeigen Sie, dass das System (8.60) genau dann auf Beobachtbarkeitsnormalform transformiert werden kann, wenn es vollständig beobachtbar ist. Geben Sie an, wie diese Transformation zu konstruieren ist.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis von Satz 8.2.

Aufgabe 8.8. Zeigen Sie, dass wenn man sämtliche Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix $\Phi_e = \Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T$ von (8.64) auf Null legt - das gewünschte charakteristische Polynom lautet also $\hat{p}_{g,soll}(z) = z^n$ - dann wird jeder Anfangsfehler $\mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$ in höchstens n Schritten zu $\mathbf{0}$ gemacht. Man nennt so einen Beobachter in Analogie zum gleichnamigen Regler *Dead-Beat Beobachter*.

Aufgabe 8.9. Entwerfen Sie für das System

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}$$

einen Dead-Beat Beobachter. Bestimmen Sie weiters das Gebiet \mathcal{D} der zulässigen Anfangsfehler \mathbf{e}_0 in der $(e_{0,1}, e_{0,2})$ -Ebene so, dass gilt

$$\|\mathbf{e}_j\|_2^2 < 1, \quad j = 0, 1, \dots$$

Hinweis: Verwenden Sie den MATLAB-Befehl `acker`.

Lösung von Aufgabe 8.9. Der Dead-Beat Beobachter lautet

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{1,k+1} \\ \hat{x}_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,k} \\ \hat{x}_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k - \begin{bmatrix} 12 \\ 100 \end{bmatrix} (\hat{y}_k - y_k)$$

$$\hat{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,k} \\ \hat{x}_{2,k} \end{bmatrix}$$

und das Gebiet der zulässigen Anfangsfehler errechnet sich zu

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{e}_0 \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} e_{0,1}^2 + e_{0,2}^2 < 1 \\ 101(e_{0,2} - 10e_{0,1})^2 \leq 1 \end{array} \right\}.$$

8.4. Separationsprinzip

Wenn man nun nicht den gesamten Zustand \mathbf{x} messen kann und doch einen Zustandsregler einsetzen will, ist es doch naheliegend, den Zustandsregler mit einem Zustandsbeobachter zu kombinieren. Dazu wird für das lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete Eingrößensystem der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma u_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8.71a)$$

$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k \quad (8.71b)$$

ein Zustandsbeobachter gemäß (8.64)

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma u_k + \hat{\mathbf{k}} (\hat{y}_k - y_k), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (8.72a)$$

$$\hat{y}_k = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k \quad (8.72b)$$

entworfen und im Zustandsregelgesetz (8.4) wird anstelle des tatsächlichen Zustandes \mathbf{x} der beobachtete Zustand $\hat{\mathbf{x}}$ in der Form

$$u_k = \mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}}_k + g r_k \quad (8.73)$$

eingesetzt. Abbildung 8.3 veranschaulicht diese so genannte *Zustandsregler/Zustandsbeobachter* Konfiguration.

Wenn man nun den Zustandsregler und den Zustandsbeobachter nach den Sätzen 8.2 und 8.5 getrennt entwirft, also die Eigenwerte getrennt vorgibt, stellt sich die Frage, wo die Eigenwerte des geschlossenen Kreises nach Abbildung 8.3 zu liegen kommen? Die Antwort auf diese Frage gibt das so genannte *Separationsprinzip*:

Satz 8.6 (Separationsprinzip). *Wenn das System (8.71) vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar ist, dann ergibt sich das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises von Abbildung 8.3 nach den Gleichungen (8.71)-(8.73) zu*

$$\begin{aligned} p_{ges}(z) &= \det \left(z \mathbf{E}_{n \times n} - \left(\Phi + \Gamma \mathbf{k}^T \right) \right) \det \left(z \mathbf{E}_{n \times n} - \left(\Phi + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T \right) \right) \\ &= p_{g,soll}(z) \hat{p}_{g,soll}(z) \end{aligned} \quad (8.74)$$

mit den gewünschten charakteristischen Polynomen $p_{g,soll}(z)$ für den Zustandsreglerentwurf nach Satz 8.2 und $\hat{p}_{g,soll}(z)$ für den Zustandsbeobachterentwurf nach Satz 8.5.

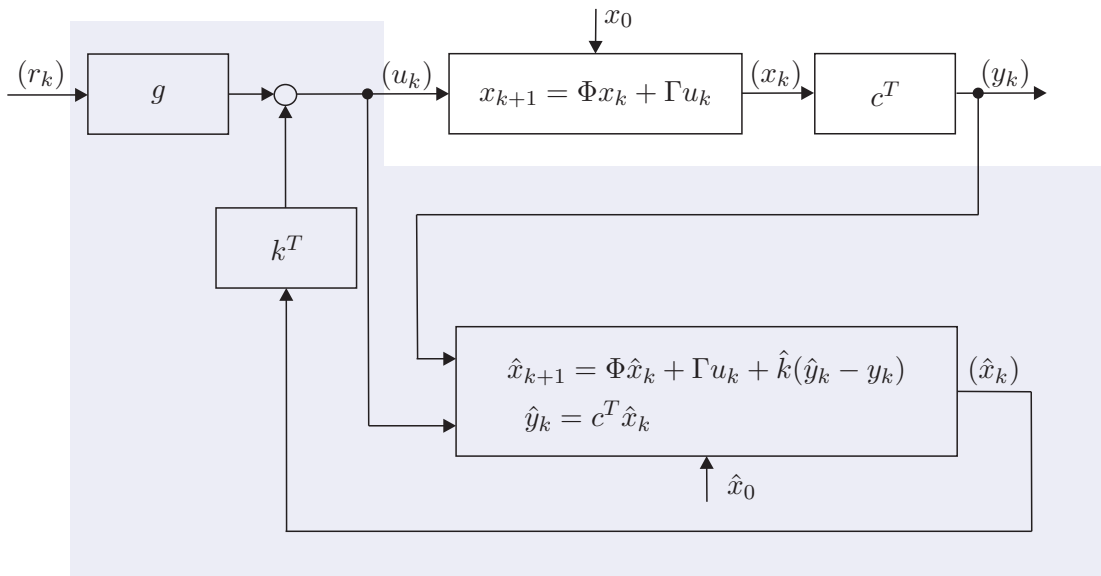


Abbildung 8.3.: Zustandsregler/Zustandsbeobachter Konfiguration.

Beweis. Um diesen zentralen Satz zu beweisen, schreibe man den geschlossenen Kreis (8.71)-(8.73) als Differenzgleichungssystem im Zustand $\mathbf{x}_{ges}^T = [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{e}^T]$ mit dem Beobachtungsfehler $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ in der Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{e}_{k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{ges,k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \mathbf{k}^T & \Gamma \mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \Phi + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T \end{bmatrix}}_{\Phi_{ges}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{ges,k}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma g \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\Gamma_{ges}} r_k \quad (8.75a)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_{ges}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{ges,k}} \quad (8.75b)$$

an. Man erkennt unmittelbar, dass sich wegen der Blockdiagonalstruktur der Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises Φ_{ges} das charakteristische Polynom in der Form

$$\det(z\mathbf{E}_{2n \times 2n} - \Phi_{ges}) = \det\left(z\mathbf{E}_{n \times n} - (\Phi + \Gamma \mathbf{k}^T)\right) \det\left(z\mathbf{E}_{n \times n} - (\Phi + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T)\right) \quad (8.76)$$

berechnet.

Aufgabe 8.10. Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung (8.76).

□

Beispiel 8.5 (Simulationsbeispiel). Für den Zweimassenschwinger von Abbildung 8.1 mit dem zugehörigen mathematischen Modell in Zustandsdarstellung (8.43) sollen der PI-Zustandsregler (8.59) und der vollständige Luenberger Beobachter (8.69) und (8.70) kombiniert werden.

Aufgabe 8.11. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $R(z) = y_z(z)/r_z(z)$ des *dynamischen Reglers*, der sich durch Zusammenschaltung des vollständigen Beobachters mit dem Zustandsregler ergibt. Welchen Schluss können Sie aus der Ordnung der Übertragungsfunktion $R(z)$ ziehen?

Lösung von Aufgabe 8.11. Die Übertragungsfunktion lautet

$$R(z) = \frac{y_z(z)}{r_z(z)} = \mathbf{c}^T \left(z\mathbf{E} - (\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T) \right)^{-1} \mathbf{\Gamma}g .$$

Die Ordnung der Übertragungsfunktion ist lediglich n , da der Beobachtungsfehler in (8.75) durch den Eingang (r_k) nicht beeinflusst werden kann und somit das System (8.75) ein nichterreichbares Teilsystem n -ter Ordnung besitzt.

Aufgabe 8.12. In wieviel Abtastschritten kann eine Anfangsauslenkung \mathbf{x}_0 des Systems (8.71) bei der Zustandsregler/Zustandsbeobachter Konfiguration schnellst möglich zu $\mathbf{0}$ geregelt werden. Beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 8.12. Bei der Kombination eines vollständigen Dead-Beat Beobachters mit einem Dead-Beat Zustandsregler in höchstens $2n$ Schritten. Man beachte, dass durch Anwendung eines im Rahmen dieses Skriptums nicht diskutierten so genannten reduzierten Dead-Beat Beobachters bei einer Messgröße die Schrittzahl um 1 weiter reduziert werden kann, also in höchstens $(2n - 1)$ Schritten.

Aufgabe 8.13. Entwerfen Sie für das System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

einen Zustandsregler nach Satz 8.2 so, dass sämtliche Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $\lambda = 1/5$ liegen. Berechnen Sie weiters einen vollständigen Beobachter nach Satz 8.5 für die gewünschten Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix bei $\lambda_j = 1/20$, $j = 1, \dots, 4$. Kombinieren Sie den Zustandsregler und den vollständigen Zustandsbeobachter nach Abbildung 8.3 und simulieren Sie den geschlossenen Kreis

in MATLAB/SIMULINK. Vergleichen Sie das Ergebnis, wenn Sie den vollständigen Beobachter durch den trivialen Beobachter von (8.61) ersetzen.

Lösung von Aufgabe 8.13. Der dynamische Regler bestehend aus Zustandsregler und vollständigem Zustandsbeobachter lautet

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} -\frac{10219}{3691} \\ \frac{37500}{411} \\ \frac{9375}{1169} \\ -\frac{2500}{7500} \end{bmatrix} (\hat{y}_k - y_k)$$

$$\hat{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k$$

und

$$u_k = \begin{bmatrix} \frac{481567}{1200000} & -\frac{2187}{80000} & \frac{488491}{1200000} & -\frac{23}{4000} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k .$$

8.5. Literatur

- [8.1] J. Ackermann, *Abtastregelung*, 3. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 1988.
- [8.2] K. J. Åström und B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems*, 3. Aufl. New Jersey: Prentice Hall, 1997.
- [8.3] G. F. Franklin, J. D. Powell und M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*. California: Addison Wesley, 1998.
- [8.4] T. Kailath, *Linear Systems*. New York: Prentice Hall, 1980.
- [8.5] G. Ludyk, *Theoretische Regelungstechnik 1*. Berlin Heidelberg: Springer, 1995.

A. Die Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ist eine im Wesentlichen eindeutige Zuordnung von Funktionen der Zeit t zu Funktionen einer komplexen Variablen s . Im Rahmen der (einseitigen) Laplace-Transformation werden nur so genannte *kausale Zeitfunktionen* $f(t)$ betrachtet, für die gilt $f(t) = 0$ für $t < 0$.

Definition A.1 (Laplace-Transformation). Es sei angenommen, dass die Zeitfunktion $f(t)$ kausal und auf jedem finiten Zeitintervall $t \geq 0$ stückweise stetig ist sowie der Ungleichung

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad (\text{A.1})$$

für geeignete positive Konstanten γ und M genügt. Dann ist das Integral

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s = \alpha + I\omega \quad (\text{A.2})$$

für alle $\text{Re}(s) = \alpha > \gamma$ *absolut konvergent*. Man nennt die Funktion $\hat{f}(s)$ auch die Laplace-Transformierte der kausalen Zeitfunktion $f(t)$ und das Gebiet $\mathbf{C}_\gamma = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > \gamma\}$ den *Existenzbereich* von $\hat{f}(s)$.

Als Beispiel berechne man die Laplace-Transformierte $\hat{f}(s)$ der kausalen Zeitfunktion

$$f(t) = e^{at} \quad (\text{A.3})$$

und bestimme den zugehörigen Existenzbereich. Auswertung des Laplace-Integrals (A.2) ergibt

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^{\infty} = \frac{e^{-(\alpha-a)t} e^{-I\omega t}}{-(s-a)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a} \quad (\text{A.4})$$

für $\text{Re}(s) = \alpha > a$. Die Laplace-Transformierte von $f(t) = e^{at}$ lautet $\hat{f}(s) = \frac{1}{s-a}$ und der Existenzbereich errechnet sich zu $\mathbf{C}_a = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > a\}$.

Die ursprüngliche Zeitfunktion $f(t)$ von (A.2) kann nun über die inverse Laplace-Transformation aus der zugehörigen Laplace-Transformierten $\hat{f}(s)$ in der Form

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\hat{f}(s)) = \frac{1}{2\pi I} \int_{r-I\infty}^{r+I\infty} \hat{f}(s) e^{st} ds, \quad t \geq 0 \quad (\text{A.5})$$

bestimmt werden, wobei r eine beliebige reelle Zahl bezeichnet, die im Existenzbereich von $\hat{f}(s)$ liegt. Man beachte, dass an Unstetigkeitspunkten der Zeitfunktion $f(t)$ das

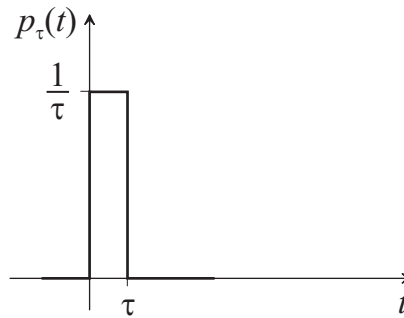


Abbildung A.1.: Zur Definition des Einheitsimpulses.

Integral von (A.5) den Mittelwert von links- und rechtsseitigem Grenzwert, also $f(t) = \frac{1}{2}(f(+t) + f(-t))$, liefert.

Bevor die wesentlichen Eigenschaften der Laplace-Transformation zusammengefasst werden, sollen noch zwei für die weiteren Betrachtungen benötigte Zeitfunktionen in Erinnerung gerufen werden.

Der so genannte *Einheitsprung* (*Heaviside-Funktion*) $\sigma(t)$ ist als

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \text{undefiniert} & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

definiert und die zugehörige Laplace-Transformierte errechnet sich nach (A.2) zu

$$\mathcal{L}(\sigma(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (\text{A.7})$$

Der *Einheitsimpuls* (*Dirac Delta-Funktion*) $\delta(t)$ ist keine Funktion im herkömmlichen Sinne sondern vielmehr ein *Funktional*, dass über die Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) g(t) dt &= g(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^n}{dt^n} \delta(t) \right) g(t) dt &= (-1)^n \left(\frac{d^n}{dt^n} g \right) (0) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

einer stetigen bzw. n -fach stetig differenzierbaren Funktion $g(t)$ eine reelle Zahl $g(0)$ bzw. $\left(\frac{d^n}{dt^n} g \right) (0)$ zuordnet. Der Einheitsimpuls $\delta(t)$ kann nun als Grenzübergang von herkömmlichen Funktionen definiert werden, z. B. in der Form (siehe Abbildung A.1)

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} p_{\tau}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sigma(t) - \sigma(t - \tau)}{\tau}. \quad (\text{A.9})$$

Zur Berechnung der Laplace-Transformierten von $\delta(t)$ bestimme man zuerst die Laplace-Transformierte von $p_\tau(t)$

$$\mathcal{L}(p_\tau(t)) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-s\tau}}{\tau s} \quad (\text{A.10})$$

und führe anschließend den Grenzübergang $\tau \rightarrow 0$ unter Zuhilfenahme der Regel von l'Hospital

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}(p_\tau(t)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\tau s}}{\tau s} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{se^{-\tau s}}{s} = 1 \quad (\text{A.11})$$

durch.

A.1. Eigenschaften und Korrespondenzen der Laplace-Transformation

I. Linearität:

Zeitbereich: $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Bildbereich: $c_1 \hat{f}_1(s) + c_2 \hat{f}_2(s)$

II. Ähnlichkeitssatz:

Zeitbereich: $f(at)$, $a > 0$

Bildbereich: $\frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$

III. Erster Verschiebungssatz:

Zeitbereich: $f(t-a) \sigma(t-a)$, $a > 0$

Bildbereich: $e^{-as} \hat{f}(s)$

IV. Zweiter Verschiebungssatz:

Zeitbereich: $f(t+a)$, $a > 0$

Bildbereich: $e^{as} \left(\hat{f}(s) - \int_0^a f(t) e^{-st} dt \right)$

V. Dämpfungssatz:

Zeitbereich: $e^{-ct} f(t)$, $c \in \mathbb{C}$

Bildbereich: $\hat{f}(s+c)$

VI. Differentiation:

$$\text{Zeitbereich: } \frac{d}{dt} f(t) = \ddot{f}(t)$$

$$\text{Bildbereich: } s\hat{f}(s) - f(+0)$$

bzw.

$$\text{Zeitbereich: } \frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t)$$

$$\text{Bildbereich: } s^n \hat{f}(s) - f(+0) s^{n-1} - f^{(1)}(+0) s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(+0)$$

VII. Integration:

$$\text{Zeitbereich: } \int_0^t f(\tau) d\tau$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{1}{s} \hat{f}(s)$$

VIII. Umkehrung zu VI:

$$\text{Zeitbereich: } (-t)^n f(t)$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{d^n}{ds^n} \hat{f}(s)$$

IX. Umkehrung zu VII:

$$\text{Zeitbereich: } \frac{1}{t} f(t)$$

$$\text{Bildbereich: } \int_s^\infty \hat{f}(\sigma) d\sigma$$

X. Faltungssatz:

$$\text{Zeitbereich: } (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

$$\text{Bildbereich: } \hat{f}_1(s) \hat{f}_2(s)$$

XI. Periodische Funktionen:

$$\text{Zeitbereich: } f(t + T) = f(t)$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

XII. Grenzwertsätze: (nur anwendbar, wenn die Grenzwerte auch existieren)

$$\text{Anfangswertsatz: } \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\hat{f}(s)$$

$$\text{Endwertsatz: } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{f}(s)$$

Aufgabe A.1. Beweisen Sie die Eigenschaften I-V sowie X und XI.

Man beachte, dass sowohl bei der Differentiationsregel VI als auch beim Anfangswertsatz XII der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(+0)$ der Funktion $f(t)$ (bzw. ihrer zeitlichen Ableitungen) an der Stelle $t = 0$ verwendet wurde. Es ist natürlich unmittelbar

einsichtig, dass im Falle einer an der Stelle $t = 0$ stetigen (bzw. n -fach differenzierbaren Funktion) $f(t)$ gilt $f(0) = f(+0)$ (bzw. $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(+0)$, $i = 0, \dots, (n-1)$).

Die Berechnung der Laplace-Transformation und insbesondere auch der inversen Laplace-Transformation erfolgt im Allgemeinen nicht über die Beziehungen (A.2) bzw. (A.5), sondern mit Hilfe geeigneter Korrespondenztabelle unter Verwendung der Eigenschaften der Laplace-Transformation. Nachfolgende Tabelle A.1 fasst einige wesentliche Korrespondenzen zusammen:

Nummer	Zeitbereich $f(t)$	Bildbereich $\hat{f}(s)$	Nummer	Zeitbereich $f(t)$	Bildbereich $\hat{f}(s)$
I.	$\delta(t)$	1	VI.	$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
II.	$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	VII.	$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
III.	t	$\frac{1}{s^2}$	VIII.	$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
IV.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	IX.	$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
V.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$			

Tabelle A.1.: Laplace-Korrespondenztabelle einiger wichtiger Funktionen.

Aufgabe A.2. Berechnen Sie zu den Zeitfunktionen $f(t)$ von Tabelle A.1 die jeweiligen Laplace-Transformierten $\hat{f}(s)$ und weisen Sie somit die Gültigkeit dieser Korrespondenzen nach.

Hinweis: Verwenden Sie unter anderem die Euler-Formeln

$$\sin(bt) = \frac{e^{Ibt} - e^{-Ibt}}{2I} \quad \text{und} \quad \cos(bt) = \frac{e^{Ibt} + e^{-Ibt}}{2}$$

in Kombination mit der Linearitätseigenschaft I der Laplace-Transformation.

Bei der inversen Laplace-Transformation hat man im Allgemeinen die Aufgabe, rationale Funktionen $\hat{f}(s)$ in der Laplace-Variablen s in den Zeitbereich zu transformieren. Es hat sich nun gezeigt, dass eine Zerlegung der rationalen Funktionen $\hat{f}(s)$ in eine Summe einfacherer Ausdrücke mit Hilfe der so genannten *Partialbruchzerlegung* sehr zweckmäßig ist.

Satz A.1 (Partialbruchzerlegung). *Es sei*

$$\hat{f}(s) = \frac{\hat{p}(s)}{\hat{q}(s)} \quad (\text{A.12})$$

eine rationale Funktion in s mit den teilerfremden reellwertigen Polynomen $\hat{p}(s)$ (Zählerpolynom) und $\hat{q}(s)$ (Nennerpolynom) mit der Eigenschaft $\text{grad}(\hat{p}) \leq \text{grad}(\hat{q}) = n$. Weiters sei angenommen, dass sich das Nennerpolynom $\hat{q}(s)$ in der Form

$$\hat{q}(s) = \prod_{j=1}^h (s - \lambda_j)^{k_j} \prod_{j=1}^m \left((s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 \right)^{l_j} \quad (\text{A.13})$$

mit

$$\text{grad}(\hat{q}) = n = \sum_{j=1}^h k_j + 2 \sum_{j=1}^m l_j \quad (\text{A.14})$$

darstellen lässt.

Dann hat $\hat{f}(s)$ eine eindeutige Darstellung in der Form

$$\hat{f}(s) = c_0 + \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^{k_j} \frac{c_{j,i}}{(s - \lambda_j)^i} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{l_j} \frac{d_{j,i} + e_{j,i}s}{\left((s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 \right)^i} \quad (\text{A.15})$$

mit

$$c_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\hat{p}(s)}{\hat{q}(s)} \quad (\text{A.16})$$

und den reellen Koeffizienten $c_{j,i}$, $d_{j,i}$ und $e_{j,i}$. Man nennt die rechte Seite von (A.15) auch Partialbruchzerlegung von $\hat{f}(s)$.

Die Partialbruchkoeffizienten $c_{j,i}$, $d_{j,i}$ und $e_{j,i}$ lassen sich im Allgemeinen sehr einfach durch Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmen. Die Rücktransformation der einzelnen Summanden von (A.15) erfolgt direkt über die Korrespondenztabelle A.1.

- **Einfache reelle Wurzel** λ_j ($k_j = 1$): Siehe IV in Tabelle A.1

- Bildbereich: $\frac{c_{j,1}}{(s - \lambda_j)}$

- Zeitbereich: $c_{j,1}e^{(\lambda_j t)}$

- **Mehrfache reelle Wurzel** λ_j ($k_j = k$): Siehe V in Tabelle A.1

- Bildbereich: $\sum_{i=1}^k \frac{c_{j,i}}{(s - \lambda_j)^i} = \frac{c_{j,1}}{(s - \lambda_j)} + \frac{c_{j,2}}{(s - \lambda_j)^2} + \dots + \frac{c_{j,k}}{(s - \lambda_j)^k}$

- Zeitbereich: $e^{\lambda_j t} \left(c_{j,1} + c_{j,2} \frac{t}{1!} + \dots + c_{j,k} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right)$

- **Einfache konjugiert komplexe Wurzel** $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ ($l_j = 1$): Siehe VIII und IX in Tabelle A.1

- Bildbereich: $\frac{d_{j,1} + e_{j,1}s}{(s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2} = e_{j,1} \frac{(s - \alpha_j)}{(s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2} + \frac{d_{j,1} + e_{j,1}\alpha_j}{\beta_j} \frac{\beta_j}{(s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2}$
- Zeitbereich: $e^{\alpha_j t} \left(e_{j,1} \cos(\beta_j t) + \frac{d_{j,1} + e_{j,1}\alpha_j}{\beta_j} \sin(\beta_j t) \right)$

Aufgabe A.3. Berechnen Sie die Zeitbereichsfunktion für eine zweifach konjugiert komplexe Wurzel, also für $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ ($l_j = 2$).

Lösung von Aufgabe A.3.

$$e^{\alpha_j t} \left(e_{j,1} \cos(\beta_j t) + \frac{d_{j,1} + e_{j,1}\alpha_j}{\beta_j} \sin(\beta_j t) \right) + e^{\alpha_j t} \left(\frac{e_{j,2}}{2\beta_j} t \sin(\beta_j t) + \frac{e_{j,2}\alpha_j + d_{j,2}}{2\beta_j^3} (\sin(\beta_j t) - \beta_j t \cos(\beta_j t)) \right)$$

Beispiel A.1. Als Anwendungsbeispiel für die Laplace-Transformation soll das Anfangswertproblem

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 4t \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} y(0) = -1 \quad (\text{A.17})$$

gelöst werden. Die Laplace-Transformierte von (A.17) lautet

$$s^2 \hat{y}(s) - (1)s - (-1) - 3(s\hat{y}(s) - 1) + 2\hat{y}(s) = \frac{4}{s^2} \quad (\text{A.18})$$

bzw.

$$\hat{y}(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2(s^2 - 3s + 2)}. \quad (\text{A.19})$$

Die Partialbruchzerlegung von $\hat{y}(s)$ errechnet sich zu

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} \quad (\text{A.20})$$

und die Rücktransformation in den Zeitbereich über die Korrespondenztabelle A.1 liefert unmittelbar das Ergebnis

$$y(t) = 2t + 3 - e^t - e^{2t}, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.21})$$

Aufgabe A.4. Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - 2 \frac{d}{dt} y(t) + 5y(t) = 8 \sin(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} y(0) = 3$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation. Verwenden Sie dazu das Maple-Package *int-trans*.

Lösung von Aufgabe A.4.

$$y(t) = e^t \left(\frac{1}{5} \cos(2t) + \frac{3}{5} \sin(2t) \right) + \frac{4}{5} \cos(t) + \frac{8}{5} \sin(t)$$

Aufgabe A.5. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$\hat{f}(s) = \frac{5s^4 - s^3 - 3s^2 - 6s - 3}{(s^2 + s + 1)s^2}.$$

Lösung von Aufgabe A.5.

$$\hat{f}(s) = 5 - \frac{3}{s} - \frac{3}{s^2} - \frac{2 + 3s}{s^2 + s + 1}$$

A.2. Literatur

- [A.1] G. Doetsch, *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Berlin Heidelberg: Springer, 1974.
- [A.2] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 6. Aufl. Berlin Heidelberg: John Wiley & Sons, 1988.
- [A.3] A. Papoulis, *The Fourier Integral and its Applications*. New York: McGraw-Hill, 1987.