

Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
 Übung 1 — Lösungen
 VU Automatisierung - WS12/13

Beispiel 1:

Das mathematische Modell der Magnetlagerung lautet mit dem Zustand $\mathbf{x} = [\psi, \delta, w]^T$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\frac{R(p_1 + p_2\delta)}{N^2}\psi + v \\ w \\ -\frac{1}{2}\frac{p_2}{N^2m}\psi^2 + g + \frac{f_l}{m} \end{pmatrix}$$

$$y = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{p_1 + p_2\delta}{N^2}\psi.$$

Die Ruhelagen des Systems berechnen sich zu

$$\psi_R = \pm \sqrt{\frac{2N^2}{p_2}(mg + f_{l,R})}$$

$$\delta_R = \frac{1}{p_2} \left(\frac{v_R N^2}{R\psi_R} - p_1 \right)$$

$$w_R = 0.$$

Damit für $f_{l,R} = 0$ die Position $\delta_R = \bar{\delta}$ eine Ruhelage des Systems darstellt, muss die Spannung zu

$$v_R = \pm \frac{p_2\bar{\delta} + p_1}{N} R \sqrt{\frac{2}{p_2} mg}$$

gewählt werden.

Die Systemmatrizen des linearisierten Modells lauten

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{N^2}(p_1 + p_2\delta_R) & -\frac{Rp_2}{N^2}\psi_R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{p_2}{N^2m}\psi_R & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \left(\frac{p_1 + p_2\delta_R}{N^2} \quad \frac{p_2}{N^2}\psi_R \quad 0 \right) \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

Berechnung der Magnetkraft

Eine Möglichkeit zur Berechnung der magnetischen Kraft f_m ist das Koenergieprinzip. Die Koenergie ist definiert durch

$$W_m^c = \int_0^{i_L} \psi(i_L) d(i_L) = \int_0^{i_L} L(\delta) i_L d(i_L) = \frac{1}{2} L(\delta) i_L^2$$

mit δ , der Position des magnetischen Ankers (hier äquivalent zum Luftspalt). Es gilt dann

$$f_m = \frac{\partial W_m^c}{\partial \delta} = \frac{1}{2} \frac{\partial L(\delta)}{\partial \delta} i_L^2.$$

Beispiel 2: Das mathematische Modell der schwimmenden Kugel kann mit dem Zustand $\mathbf{x} = [h \ w]^T$, dem Eingang $u = F$ und dem Ausgang $y = h$ wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} w \\ g - \frac{F}{m} - \frac{\rho g \pi h^2}{3m} (3R - h) \end{bmatrix}$$

$$h(\mathbf{x}, u) = h .$$

Die benötigte Kraft F_R , um die Kugel bei $h_R = R/3$ in der Ruhe zu halten beträgt dann

$$F_R = mg - \frac{8}{81} \rho g \pi R^3 .$$

Die Systemmatrizen des linearisierten Modells ergeben sich zu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2\rho g \pi h_R}{3m} (3R - h_R) + \frac{\rho g \pi h_R^2}{3m} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [1 \ 0] \quad d = [0] .$$

Beispiel 3:

- a) Das mathematische Modell des elektrischen Netzwerks ergibt sich mit dem Zustand $\mathbf{x} = [u_C \ i_L]^T$ zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{(2u_1 - u_C - u_s - 2R_1 i_L)}{\left(C(u_C) + u_C \frac{d(C(u_C))}{du_C} \right) R_3} \\ \frac{u_1 - R_1 i_L}{L(i_L) + i_L \frac{d(L(i_L))}{di_L}} \end{bmatrix}$$

$$y = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = u_C .$$

- b) Für die Ruhelagen gilt

$$u_{C,R} = 0$$

$$i_{L,R} = \frac{u_1}{R_1} .$$