Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Übung 2
VU Automatisierung - WS12/13

Beispiel 4: Überprüfen Sie die folgenden dynamischen Systeme auf Linearität bzw. Zeitinvarianz.

a)
$$5\ddot{y} - \frac{1}{10}\dot{y}y = 7.5tu$$

b)
$$\frac{1}{2}y^{(3)} - 10\ddot{y} - \frac{y}{1+t} = \int_0^t \sqrt{2}u(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{3}\dot{u}$$

c)
$$\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)\ddot{y} + 3y = \frac{7}{10}u$$

Beispiel 5: Gegeben sind die beiden autonomen Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \mathbf{x} \tag{1}$$

und

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2} \mathbf{x}\,. \tag{2}$$

Berechnen Sie die regulären Zustandstransformationen $\mathbf{x} = \mathbf{V}_1\mathbf{z}$ und $\mathbf{x} = \mathbf{V}_2\mathbf{z}$, die die Systeme (1) und (2) in die Jordansche Normalform transformieren. Geben Sie außerdem die Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ in Jordanscher Normalform an.

Beispiel 6: Gegeben ist das Modell eines linearen Feder-Masse-Dämpfer-Systems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned} \tag{3}$$

mit der Federsteifigkeit k, der Dämpfungskonstante d, der Masse m und $u = F$ als Kraft auf die Masse. Für die Parameter gelte $d^2 < 4km$.
Berechnen Sie die reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$, die das System (3) in die *reelle* Jordansche Normalform transformiert und geben Sie das entsprechende transformierte System an.

Beispiel 7: Berechnen Sie die Transitionsmatrizen $\mathbf{\Phi}$ der Systeme (1), (2) und (3). Berechnen Sie die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{4}$$

mit $\mathbf{A}_1$ aus (1) für die Eingangsgröße $u(t) = 1 + t$ und den Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.
Geben Sie die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Systems (3) für den Fall $u = 0$, $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ sowie die Parameterwerte $m = 1$, $d = 6$ und $k = 10$ an.
Zeichnen Sie den jeweiligen Lösungsverlauf im Zustandsraum mit MAPLE.

Beispiel 8: Gegeben ist das folgende lineare System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}$ des Systems (5) mit Hilfe der Laplacetransformation. Berechnen Sie den Verlauf des Ausgangs y für die Anfangsbedingung $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ und die Stellgröße $u = \exp(t)$. Interpretieren Sie das Ergebnis anhand der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}$.

Hinweise:

- Die Inverse einer (regulären) Matrix läßt sich relativ einfach über die Adjunkte $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$ berechnen. Es gilt dann $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}$, wobei für die Einträge der Adjunkten gilt $\mathrm{adj}(\mathbf{A})_{j,i} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, mit M_{ij} dem Wert der Unterdeterminanten, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von $\mathbf{A}$ entsteht.
- Es ist nicht notwendig, den Verlauf des gesamten Zustandes zu berechnen.

Beispiel 9: Welche der folgenden Systeme sind asymptotisch stabil?

$$\dot{x} = x \tag{6}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{7}$$

Begründen Sie jeweils Ihre Aussage. Was muss für die Parameterwerte des Systems (3) gelten, damit es asymptotisch stabil ist?