Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 14.07.2023

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	8	10	10	12	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Betrachten Sie das lineare, zeitkontinuierliche, dynamische System **8 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{1a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{1b}$$

a) Ist die Ruhelage des Systems für $u = 0$ asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! **2 P.|**

b) Ist das System vollständig erreichbar? Wenn nein, welches Teilsystem ist nicht erreichbar? Begründen Sie Ihre Antwort! **2 P.|**

c) Kann für das System ein Zustandsregler in der Form **1 P.|**

$$u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_k$$

so entworfen werden, dass die Pole des geschlossenen Kreises frei gewählt werden können? Kann das System über einen Zustandsregler stabilisiert werden? Begründen Sie Ihre Antwort!

d) Kann für das System ein trivialer Beobachter entworfen werden? Begründen Sie Ihre Antwort! **1 P.|**

e) Identifizieren Sie aus Abbildung 1 jene Sprungantworten $h_1(t), \ldots, h_4(t)$, die zur Sprungantwort der Übertragungsfunktion **2 P.|**

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} \tag{2}$$

passen. Begründen Sie Ihre Antwort.

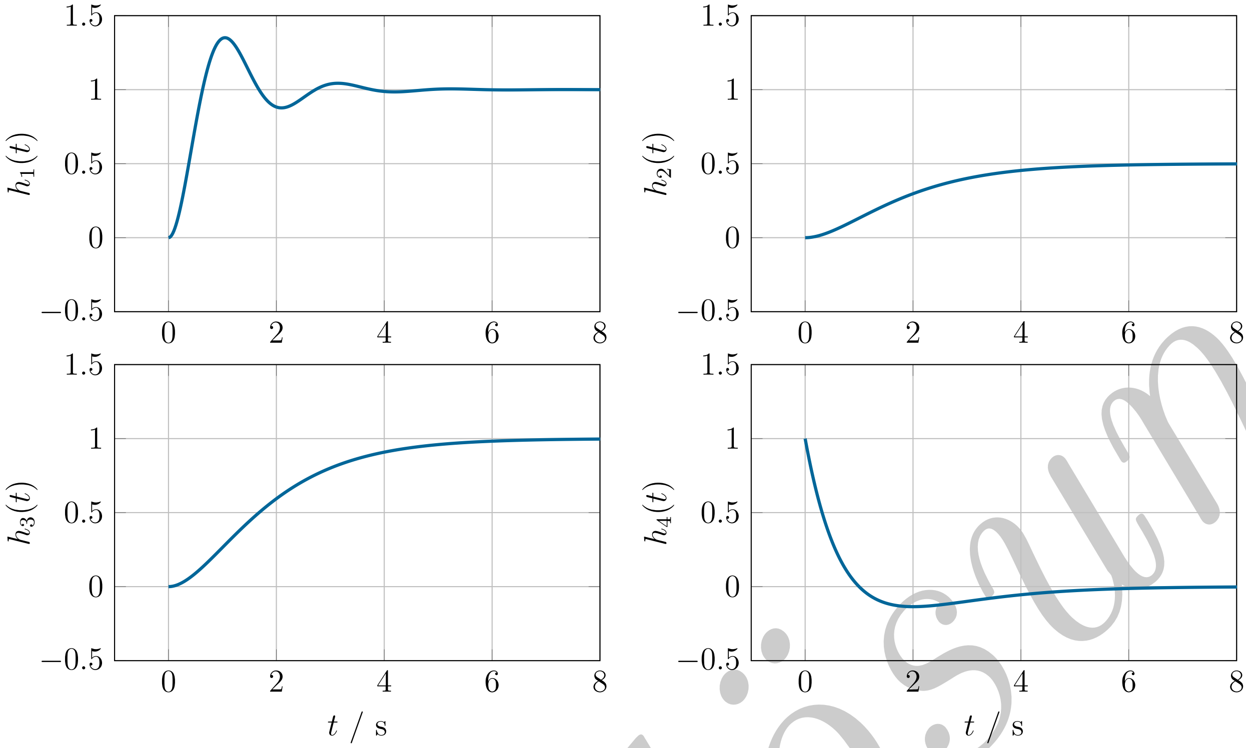

Abbildung 1: Sprungantworten $h_1(t), \ldots, h_4(t)$.

Lösung:

a) *Matrix* $\mathbf{A}$ *in Blockmatrix Form, d.h. es gilt*

$$det\Big(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}\Big) = det\left(\lambda\mathbf{E} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}\right) = det\Big(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}_{11}\Big)det\Big(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}_{22}\Big)$$
$$= (\lambda^2 + 3\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 10)$$

zweiter Teil des charakteristischen Polynoms hat unterschiedliche Vorzeichen $\rightarrow$ *kein Hurwitz Polynom* $\rightarrow$ *Eigenwerte mit Realteil größer 0* $\rightarrow$ *nicht asymptotisch stabil*

b) *Die Erreichbarkeitsmatrix des Systems*

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \mathbf{A}^3\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 8 \\ 1 & -3 & 8 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hat Rang 2 (dies ist auch schon nach dem berechnen der 3. Spalte ersichtlich) und damit nicht vollen Rang $\rightarrow$ *nicht vollständig Erreichbar* $\rightarrow$ *Die zweite und dritte Zeile der Erreichbarkeitsmatrix sind* 0 $\rightarrow$ *das Teilsystem*

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

ist nicht erreichbar. Dies ist auch daran erkenn bar, dass weder der Eingangsvektor $\mathbf{b}$ *noch* x_1 *und* x_2 *auf* x_3 *und* x_4 *einwirken.*

c) *System ist nicht vollständig erreichbar → Pole können mit konstantem Zustandsregler nicht frei gewählt werden.*

d) *Nein, da die Ruhelage des Systems nicht asymptotisch stabil ist, es kann kein trivialer Beobachter entworfen werden.*

e) $h_3(t)$,
Sprungantwort des Systems im s-Bereich:

$$H(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{1}{s(s^2+3s+1)}.$$

Mittels Endwertsatz

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sH(s) = 1.$$

Nur h_1 *und* h_3 *laufen für* $t \to \infty$ *nach 1.*
Pole der Übertragungsfunktion sind $s_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$ → *kein Imaginärteil* → *kein schwingendes Verhalten* → *nur* $h_3(t)$ *schwingt nicht.*

2. *Sie können die Aufgaben a) und b) unabhängig voneinander lösen.* **10 P.|**
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + k\dot{y} + my^3 + n^2 y = \sin(u) \tag{4}$$

mit dem Eingang u und dem Ausgang y, wobei k, m und n geeignete Konstanten sind.

a) Das System gegeben in Gleichung (4) soll linearisiert werden. **7 P.|**

i. Stellen Sie (4) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung in Zustandsform $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ dar. 1 P.|

ii. Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems für $u_R = 0$. 1 P.|

iii. Linearisieren Sie das System um eine allgemeine Ruhelage $(\mathbf{x}_\mathrm{R},\ u_\mathrm{R})$ und geben Sie die Systemmatrizen $\mathbf{A},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$ und d in der folgenden Form an: 3 P.|

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^\top \Delta\mathbf{x} + d\Delta u \end{aligned} \tag{5}$$

iv. Zeichnen Sie das Blockschaltbild für die Regelung des Systems (4) mittels eines linearen Zustandsreglers, der basierend auf dem linearisierten System (5) mit dem Zustand $\Delta\mathbf{x}$ entworfen wurde. 2 P.|

b) Gegeben ist die Differenzengleichung **3 P.|**

$$y_{k+3} + \alpha u_{k+4} = 2y_{k+2} - y_k + u_{k+3} + 3u_{k+2} + \frac{1}{2}u_k$$

i. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)}$. 1 P.|

ii. Bestimmen Sie ein α, sodass $G(z)$ realisierbar ist, und geben Sie eine Minimalrealisierung von $G(z)$ an. 1,5 P.|

iii. Ist $G(z)$ für das gewählte α sprungfähig? Begründen Sie Ihre Antwort. 0,5 P.|

Lösung:

a) *i.*

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin(u) - kx_2 - mx_1^3 - n^2 x_1\end{bmatrix} \tag{6}$$

ii. $x_2 = 0,\ x_{1,1} = 0,\ x_{1,2} = \sqrt{\frac{-n^2}{m}},\ x_{1,3} = -\sqrt{\frac{-n^2}{m}}$

iii. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3mx_{1,R}^2 - n^2 & -k\end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix}0\\ \cos(u_R)\end{bmatrix},\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\ d = 0$

iv. Siehe Abbildung 2

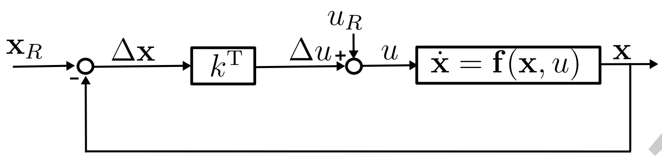

Abbildung 2: System mit Regler basierend auf Linearisierung

b) *i.*

$$G(z) = \frac{-\alpha z^4 + z^3 + 3z^2 + \frac{1}{2}}{z^3 - 2z^2 + 1} \tag{7}$$

ii. $\alpha = 0$

iii.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u_k \tag{8}$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 5\end{bmatrix}\mathbf{x}_k + u_k \tag{9}$$

oder

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\5\end{bmatrix}u_k \tag{10}$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}_k + u_k \tag{11}$$

iv. Ja ist sprungfähig, da Zählergrad gleich Nennergrad.

3. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

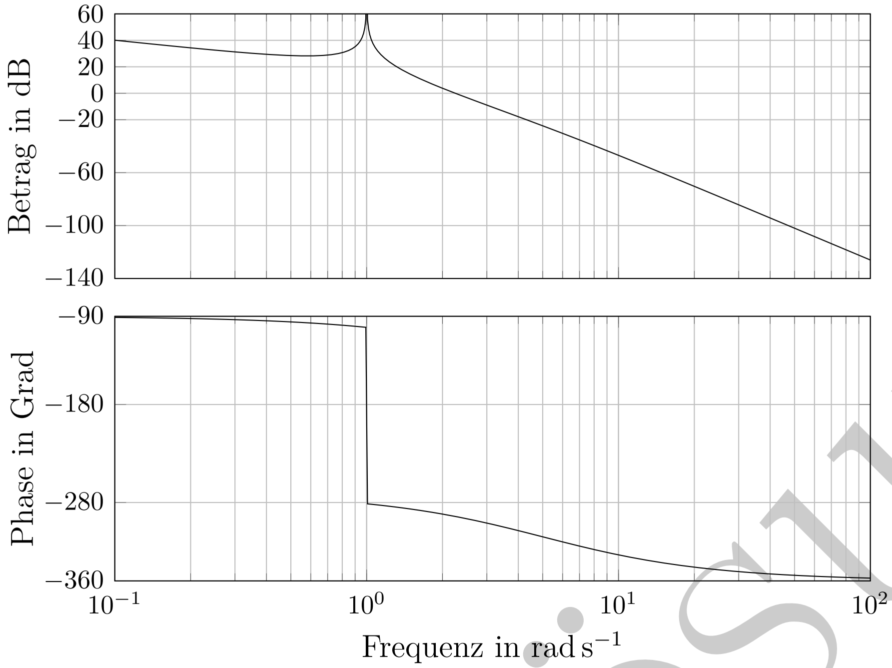

Abbildung 3: Bode-Diagramm von $G(s)$.

a) Betrachten Sie das Bode-Diagramm der Strecke $G(s)$ mit einer ungedämpften Resonanz gemäß Abbildung 3. **5,5 P.|**

i. Bestimmen Sie die Parameter ω_r, δ und ω_n für einen Kompensationsregler der Form 3 P.|

$$R(s) = V_r \frac{\left(\frac{s}{\omega_r}\right)^2 + 2\delta \frac{s}{\omega_r} + 1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)^2} \tag{12}$$

anhand von Abbildung 3. Die Phasenreserve des offenen Kreises soll $\Phi = 60°$ betragen, wobei davon ausgegangen wird, dass V_r so gewählt ist, dass die Durchtrittsfrequenz bei ω_r liegt. Benutzen Sie dabei die Approximation $\tan(x) = \frac{4}{\pi}x$. **Hinweis:** Bestimmen Sie nicht V_r.

ii. Zeichnen Sie die Amplitude des resultierenden Reglers für $V_r = 1$ in das Bode-Diagramm in Abbildung 3 ein. 1,5 P.|

iii. Welchen Nachteil hat ein Kompensationsregler, wenn er auf ein reales physikalisches System angewendet wird? 1 P.|

b) Gegeben sind die Übertragungsfunktionen **4,5 P.|**

$$G_1(s) = 10$$
$$G_2(s) = \frac{10}{s+10}$$
$$G_3(s) = \frac{\frac{s}{100}+1}{1}$$
$$G_4(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4s + 1}$$

i. Zeichnen Sie die vier Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ bis $G_4(s)$ in das Bode-Diagramm in Abbildung 4 ein. 2,5 P.|

ii. Zeichnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$ in das Bode-Diagramm in Abbildung 4 ein. 1 P.|

iii. Ist die Übertragungsfunktion $G(s)$ phasenminimal? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|

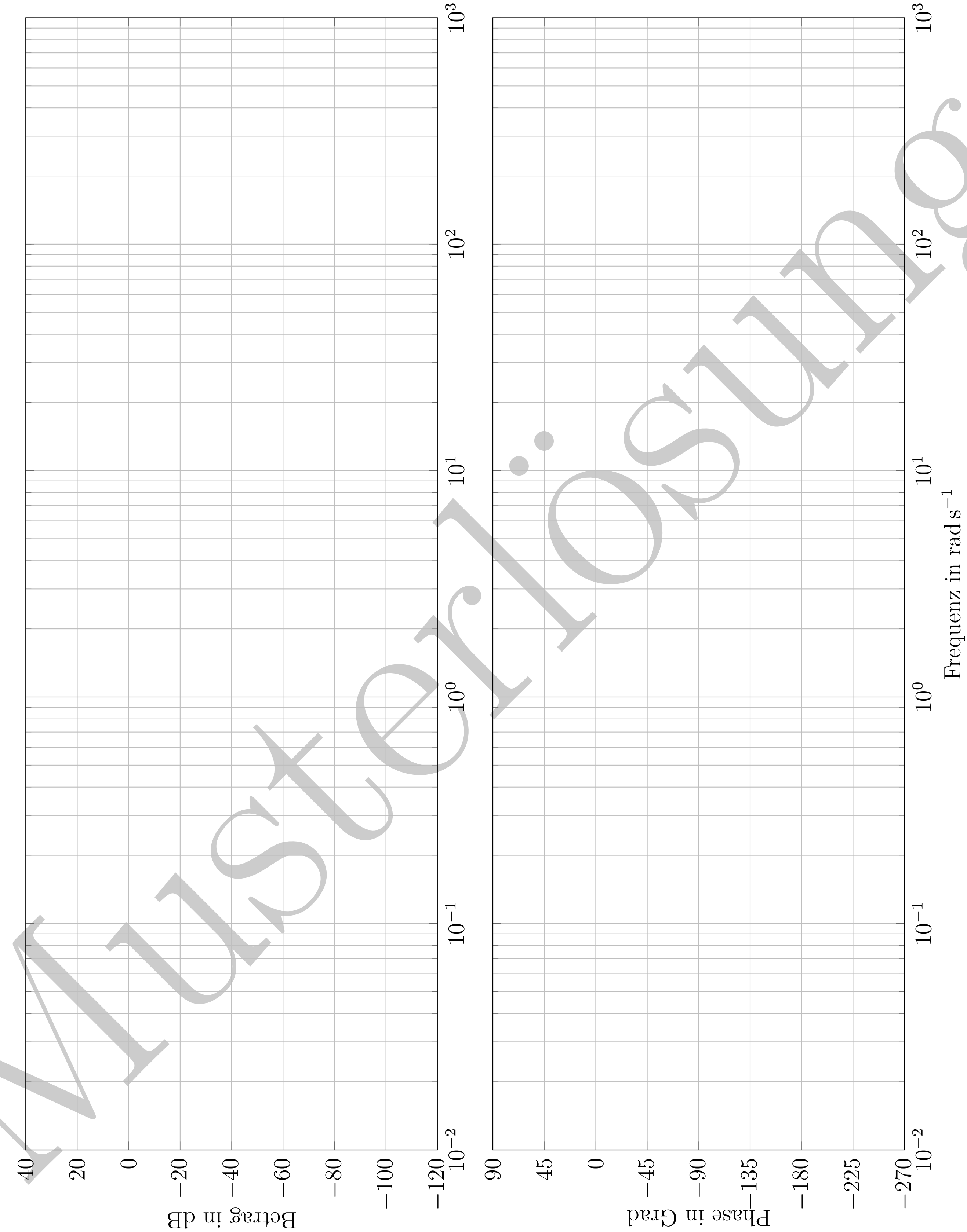

Abbildung 4: Vorlage Bode-Diagramm

Lösung:

a) i. $\omega_r = 1,\ \delta = 0,\ \omega_n = \frac{9}{2}$

ii. *Siehe Abbildung 5.*

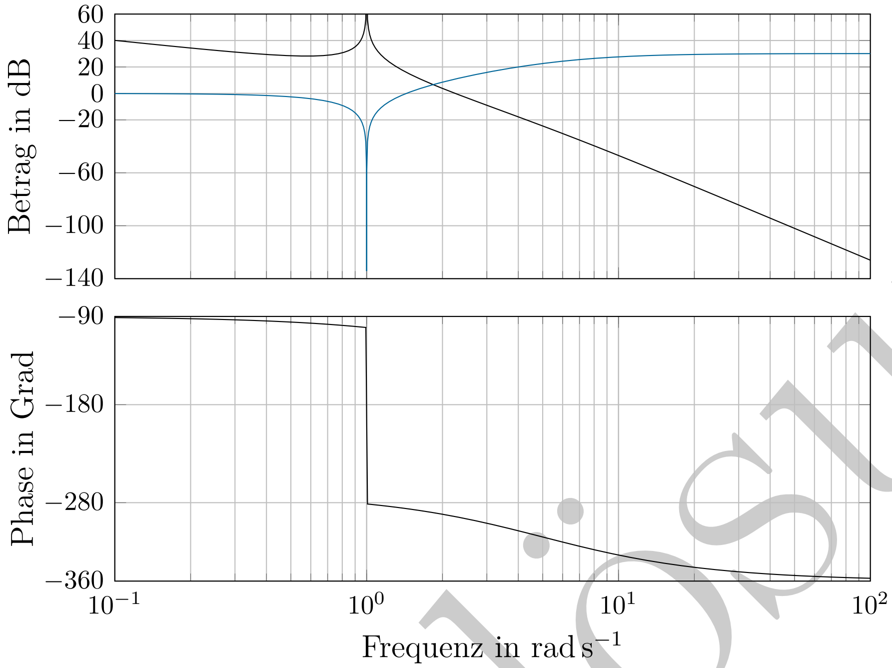

Abbildung 5: Bode-Diagramm von $G(s)$.

iii. *Nachteil: Modelabweichungen können dafür sorgen, dass die Resonanzfrequenz des Modells nicht genau der des physikalischen Systems entspricht.*

b) i. *Siehe Abbildung 6*

ii. *Siehe Abbildung 6*

iii. *Ja, weil alle Pole und Nullstellen in der linken offenen s-Halbebene liegen.*

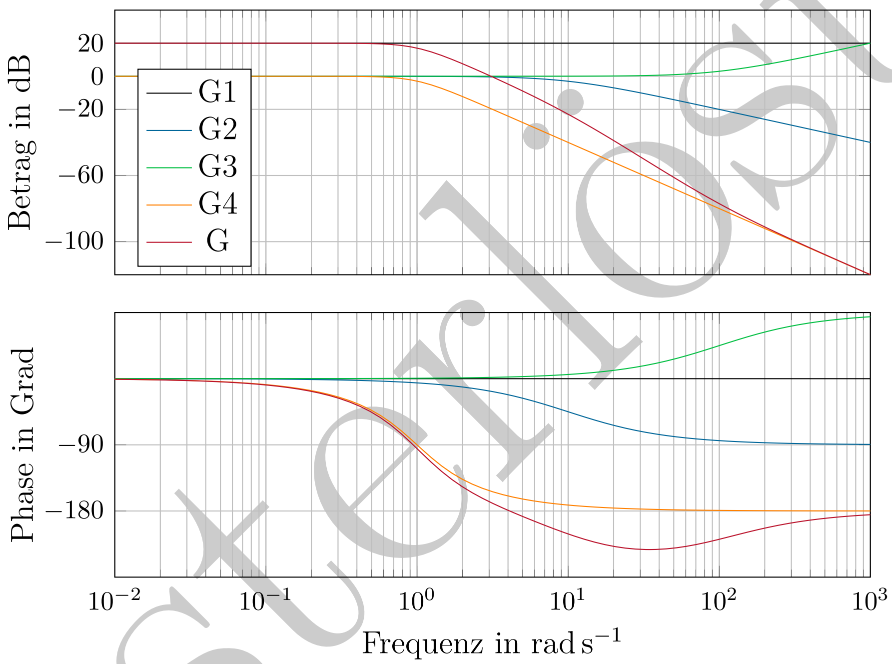

Abbildung 6: Bode-Diagramme.

4. Betrachten Sie im Folgenden das lineare, zeitkontinuierliche, dynamische System **12 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \tag{13a}$$

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + 1u. \tag{13b}$$

Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Für das System wurde ein Zustandsregler der Form **2 P.|**

$$u = \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + r \tag{14}$$

entworfen. Ist die Ruhelage des geregelten Systems für $r = 0$ asymptotisch stabil? Begründen sie Ihre Antwort!

b) Das System soll um einen Integratorzustand x_I, der den Fehler zwischen Referenzsignal r und Ausgang y aufintegriert **5 P.|**

$$\dot{x}_I = r - y, \tag{15}$$

erweitert werden.

i. Geben Sie das System mit dem erweiterten Zustand 2 P.|

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix} \tag{16}$$

in Zustandsraumdarstellung an.

ii. Für das erweiterte System wurde ein Zustandsregler der Form 3 P.|

$$u = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_x^T & k_{x,I} \end{bmatrix}\mathbf{x}_e \tag{17}$$

entworfen. Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des erweiterten, geregelten Systems, nutzen Sie dafür Matrixmultiplikatoren, Integratorblöcke und Additionen. Beschriften Sie unbedingt die Signale $\mathbf{x}$, x_I, u, r und y. Benützen sie hierbei die Variablenbezeichnungen aus (13) und (15).

c) Das System in (13a) und (13b) soll mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens **5 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T_a(\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k), \tag{18}$$

mit der Abtastzeit $T_a = 1$, diskretisiert werden.

i. Geben Sie das diskretisierte System in Zustandsraumdarstellung an. 1 P.|

ii. Ist das diskretisierte System vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P.|

iii. Bestimmen Sie für das diskretisierte System den Vektor $\hat{\mathbf{k}}$, so dass die Fehlerdynamikmatrix $\mathbf{\Phi}_e$ des Beobachterfehlers $\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ des vollständigen Luenberger Beobachters 3 P.|

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}u_k + \hat{\mathbf{k}}(\mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}_k + du_k - y_k), \tag{19}$$

Eigenwerte bei $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ hat.

Lösung:

a) Nein,

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{A} + \mathbf{k}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte von $\mathbf{A}_r$*:* $(-3, 2)$

b) i.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_e &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_e + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -1 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}r \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_e + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}r \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_e + 1d = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_e + 1d \end{aligned}$$

ii. *siehe Abbildung 7.*

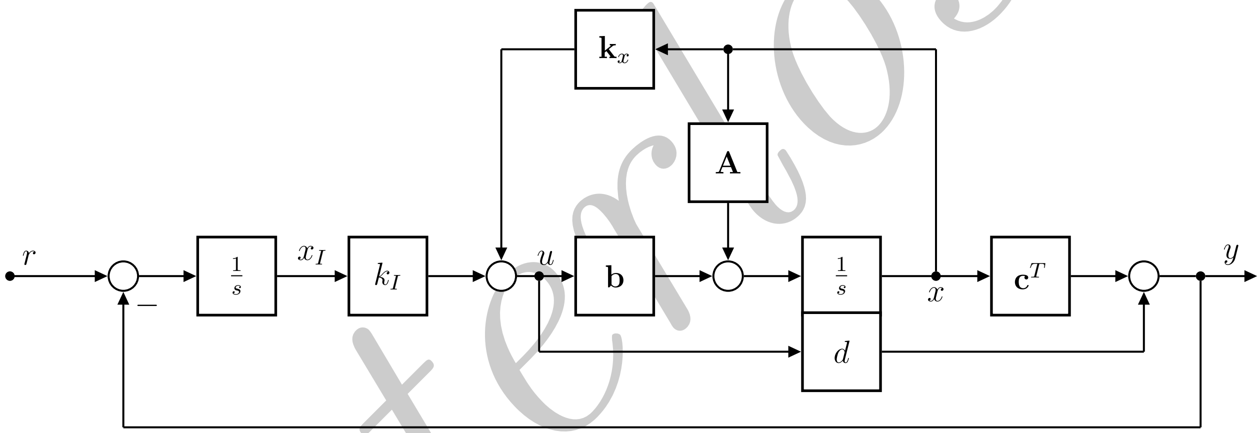

Abbildung 7: Erweitertes, geregeltes System.

c) i.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{E}\mathbf{x}_k + T_a\Big(\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k\Big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + 1\Big(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u_k\Big) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + 1u_k \end{aligned}$$

ii. *Beobachtbarkeitsmatrix*

$$\mathcal{O}\Big(\mathbf{c}^T, \mathbf{\Phi}\Big) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

hat vollen Rang $\rightarrow$ *vollständig beobachtbar.*

iii. *Gewünschtes charakteristisches Polynom:* $p_{g,soll}(s) = (s - \frac{1}{2})(s + \frac{1}{2}) = s^2 - \frac{1}{4}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathcal{O}\Big(\mathbf{c}^T, \mathbf{\Phi}\Big)\mathbf{v}_1 \qquad \textit{gibt} \qquad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mit

$$\mathbf{\Phi}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$

ist der Vektor

$$\hat{\mathbf{k}} = -p_{g,soll}(\mathbf{\Phi})\mathbf{v}_1 = -\Big(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Big)\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} -30 \\ 49 \end{bmatrix}$$