Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 12.07.2024

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10.5	9.5	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

   a) Gegeben ist das System **6 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u \,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \tag{1a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{1b}$$

      i. Bestimmen Sie die Übertragsfunktion $G(s)$ des Systems (1) . 2 P.|

      ii. Ist das System (1) BIBO-stabil? Ist die Übertragsfunktion $G(s)$ realisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|

      iii. Berechnen Sie die Sprungantwort $h(t)$ und die Impulsantwort $g(t)$ des Systems (1). 3 P.|

   b) Betrachten Sie die Zusammenschaltung der Übertragungsfunktionen **4 P.|**

$$G_1(s) = \frac{1}{s-1} \qquad G_2(s) = G_5(s) = \frac{1}{s}$$

$$G_3(z) = \frac{2T_a}{z-1} \qquad G_4(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

in Abbildung 1. Berechnen Sie die zeitdiskrete Gesamtübertragungsfunktion $G(z)$ vom Eingang u_k zum Ausgang y_k. Sie müssen den Ausdruck nicht weiter vereinfachen.

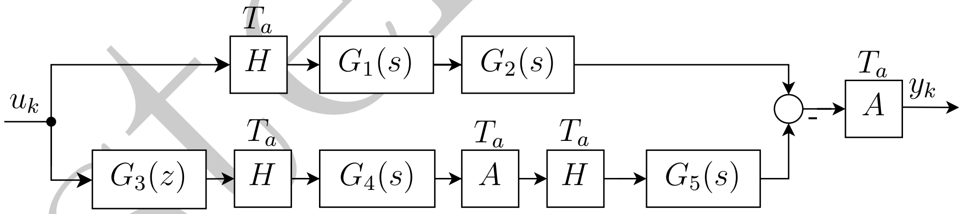

Abbildung 1: Blockschaltbild

Lösung:

a) *i.*

$$y(s) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}u(s)$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{2s+4}{s^2 - 3s - 4}$$

ii. *Die Polstellen von $G(s)$ sind λ_1=-1 und λ_2=4. Das System ist nicht BIBO-stabil, weil λ_2 in der rechten offenen s-Halbene ist. Das System ist realisierbar, weil grad(z(s)) $\leq$ grad(n(s)).*

iii.

$$H(s) = \frac{2s+4}{s(s^2 - 3s - 4)} = -\frac{1}{s} + \frac{2}{5}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{5}\frac{1}{s-4}.$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s} + \frac{2}{5}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{5}\frac{1}{s-4}\right) = -\sigma(t) + \frac{2}{5}e^{-t} + \frac{3}{5}e^{4t}.$$

$$g(t) = -\frac{2}{5}e^{-t} + \frac{12}{5}e^{4t}.$$

b)

$$G(z) = \left(-1 - \tfrac{T_a}{z-1} + \tfrac{z-1}{z-e^{-T_a}}\right) - \left(\tfrac{2T_a^2}{(z-1)^2}\right)\left(1 - \tfrac{(z-1)(z-\cos(T_a))}{z^2-2z\cos(T_a)+1}\right)$$

2. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben ist die Differentialgleichung **4 P.|**

$$a\ddot{y} + b\dot{y} - c\sin(y) = dy^2u \tag{2a}$$

$$\ddot{w} = u \tag{2b}$$

mit $a, b, c, d \neq 0$.

i. Geben Sie (2) als System von Differentialgleichungen 1. Ordnung in Zustandsform $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathrm{u})$ an. 1 P.|

ii. Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems (2). 1 P.|

iii. Linearisieren Sie das System (2) um eine allgemeine Ruhelage $(\mathbf{x}_R,\ u_R)$ und geben Sie die Zustandsraumdarstellung des linearisierten Systems an. 2 P.|

b) Gegeben ist das lineare, zeitinvariante, zeitkontinuierliche dynamische System **6 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u, \tag{3a}$$

$$y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + u. \tag{3b}$$

i. Das System (3) soll mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens 1 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T_a(\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k) \tag{4}$$

mit der Abtastzeit $T_a = 1$s diskretisiert werden. Geben Sie die Matrizen $\mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{\Gamma}$ sowie die Systemgleichungen des diskretisierten Systems im Zustandsraum an.

ii. Ist das diskretisierte System aus 2(b)i vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|

iii. Für das System soll ein vollständiger Luenberger Beobachter anhand des Systems aus 2(b)i entworfen werden. Wählen Sie die Beobachterverstärkung $\hat{\mathbf{k}}$ so, dass die Fehlerdynamikmatrix Eigenwerte bei $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ hat. 2.5 P.|

iv. Können durch die Wahl der Abtastzeit T_a Eigenschaften wie Stabilität, Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit beeinflusst werden? Wenn ja, erklären Sie allgemein, wieso und wie man den eventuellen Verlust dieser Eigenschaften vermeiden kann. 1.5 P.|
Hinweis: Sie müssen keine detaillierten Beispiele nennen.

Lösung:

a) *i.*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ w \\ \dot{w} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{w} \\ \ddot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{a}(dx_1^2 u + c\sin(x_1) - bx_2) \\ x_4 \\ u \end{bmatrix}$$

ii. Die Ruhelage besteht aus $x_{2,R} = 0$, $u_R = 0$, $x_{3,R} = 0$, $x_{4,R}$beliebig, und für $x_{1,R}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{c}{a}\sin(x_{1,R}) &= 0 \\ \implies x_{1,R} &= k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

iii.

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2d}{a}x_{1,R}u_R + \frac{c}{a}\cos(x_{1,R}) & \frac{-b}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d}{a}x_{1,R}^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u$$

b)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + T_a(\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}u_k) \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \\ y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + du_k \\ \mathbf{\Phi} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = 1 \end{aligned}$$

c)

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Das System ist völlstandig beobachtbar, weil $\mathcal{O}(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}, \Phi)$ Rang 2 hat.

d)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Phi \end{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1$$

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{p}_{g,soll}(z) = (z - \frac{1}{3})(z + \frac{1}{3}) = z^2 - \frac{1}{9}$$

$$\mathbf{\Phi}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}} &= -\hat{p}_0 \hat{\mathbf{v}}_1 - \hat{p}_0 \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{v}}_1 - ... - \hat{p}_0 \mathbf{\Phi}^{n-1} \hat{\mathbf{v}}_1 - \mathbf{\Phi}^n \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \hat{\mathbf{k}} &= -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{k}} &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -\frac{8}{9} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e) *Die Wahl der Abtastzeit beeinflusst nur die Beobachbarkeit und Erreichbarkeit. Wenn* $\omega_j \neq \frac{l\pi}{T_a}$, $\quad l = \pm 1, \pm 2, ...$, *dann ist das zugehörige Abstastsystem vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar (Satz 7.9).*

3. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10.5 P.|**

a) Gegeben ist die Impulsantwort **4 P.|**

$$g_k = (0, -1, 1, 0, 0, \dots)$$

eines zeitdiskreten LTI-Systems.

i. Beurteilen Sie die BIBO-Stabilität, Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems, wenn dieses $n = 2$ Zustände besitzt. 1 P.|

ii. Mithilfe einer Eingangsfolge 3 P.|

$$u_k = (u_0, u_1, u_2, 0, 0, \dots)$$

soll die Ausgangsfolge

$$y_k = (0, 1, 2, 2, \delta, 0, 0, \dots)$$

erreicht werden. Berechnen Sie u_0, u_1 und u_2. Welchen Wert muss δ haben, damit $u_k = 0$ für alle $k > 2$ möglich ist?

b) Betrachten Sie die Übertragungsfunktion **6.5 P.|**

$$G(s) = \frac{V}{1 + sT} \mathrm{e}^{-sT_0} \ , \ V, T, T_0 > 0 \ .$$

i. Skizzieren Sie die Impulsantwort von $G(s)$ für $V = 3$, $T = 1$ und $T_0 = 2$ und zeichnen Sie V, T und T_0 ein. 2 P.|

ii. Es wird ein I-Regler $R(s) = V_I/s$ für die Strecke $G(s)$ mit allgemeinen V und T verwendet. Geben Sie einen analytischen Ausdruck für V_I so an, dass die Phasenreserve Φ beträgt. Vernachlässigen Sie hierfür zunächst T_0. 3 P.|

iii. Nun wird der Ausdruck mit T_0 wieder eingefügt, wobei die restlichen Werte in $G(s)$ und $R(s)$ aus 3(b)ii gleich bleiben. Wie groß darf T_0 maximal sein, damit der geschlossene Regelkreis noch stabil ist? 1.5 P.|

Lösung:

a) i. *Das System ist BIBO-stabil sowie vollständig erreichbar und beobachtbar.*

   ii. $u_0 = -1$, $u_1 = -3$, $u_2 = \delta = -5$

b) i. *Betrachten Sie Abbildung 2 für die Impulsantwort.*

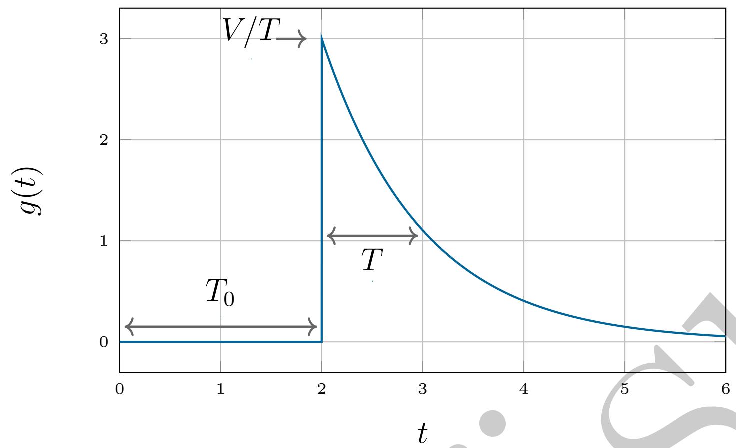

Abbildung 2: Impulsantwort der Übertragungsfunktion $G(s)$.

   ii. $\omega_c = \frac{\tan(\pi/2-\Phi)}{T}$, $V_I = \frac{\omega_c\sqrt{1+\omega_c^2 T^2}}{V}$

   iii. $T_{0,max} = \Phi/\omega_c = \Phi T/\tan(\pi/2 - \Phi)$

4. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **9.5 P.|**

a) Für die Strecke **7 P.|**

$$G(s) = \frac{1}{10} \frac{1+s}{\left(\frac{s}{30}\right)^2 + 2 \cdot 0.1 \frac{s}{30} + 1}$$

wird der Regler

$$R(s) = \frac{\left(\frac{s}{30}\right)^2 + 2 \cdot 0.1 \frac{s}{30} + 1}{s(1 + \frac{s}{10})^\gamma}$$

verwendet.

i. Um welchen Regler handelt es sich bei $R(s)$? Geben Sie alle $\gamma \in \mathbb{Z}$ an, für die der Regler realisierbar ist. 1 P.|

ii. Setzen Sie von nun an $\gamma = 1$ und betrachten Sie die Nyquist-Ortskurve des offenen Regelkreises $L(s) = R(s)G(s)$ in Abbildung 3. Verwenden Sie das Nyquist-Kriterium, um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu untersuchen. 2 P.|

iii. Zeichnen Sie die Bode-Diagramme für $G(s)$ und $L(s)$ in Abbildung 5 ein. 4 P.|

b) Gegeben ist ein LTI-System der Form **2.5 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{5a}$$
$$y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\ , \tag{5b}$$

dessen Übertragungsfunktion $G(s)$ BIBO-stabil ist.

i. Gilt damit für den Fall $u = 0$ immer, dass $\mathbf{x}(t) \to 0$ für $t \to \infty$ und beliebige $\mathbf{x}(0)$? Begründen Sie ausführlich Ihre Antwort. Wie nennt man diese Eigenschaft? 1.5 P.|

ii. Wie müssen $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aussehen, damit (5) einen Dreifach-Integrator beschreibt? 1 P.|

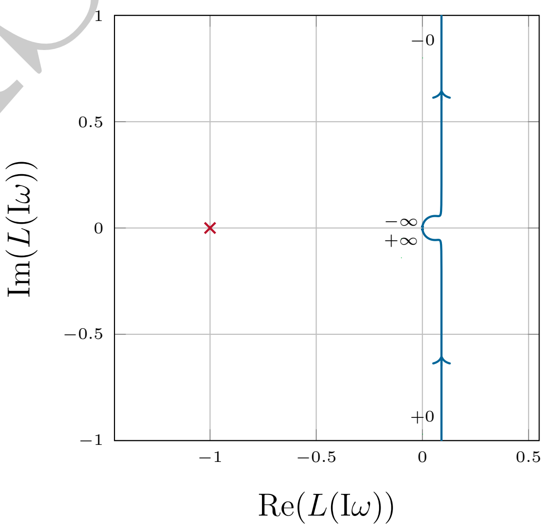

Abbildung 3: Nyquist-Ortskurve der Übertragungsfunktion $L(s)$.

Lösung:

a)
   i. ***Kompensationsregler*** *mit Integrator und Realisierungsterm,* $\gamma \geq 1$

   ii. *Nyquist-Kriterium:* $\Delta\arg(1 + L(I\omega)) = \pi$,
   $(\max(\mathrm{grad}(n_L), \mathrm{grad}(z_L)) - N_-(n_L) + N_+(n_L))\pi = \pi$
   $\implies$ *Der geschlossene Regelkreis ist BIBO-stabil.*

   iii. *Die Bode-Diagramme sind in Abbildung 4 ersichtlich.*

b)
   i. *Nein, dies gilt nicht immer, da beim Übergang vom Zustandsraum zu* $G(s)$ *Pol-Nulstellen-Kürzungen in der rechten offenen Halbebene auftreten können. Das System ist dann zwar BIBO-stabil, aber nicht* ***global asymptotisch stabil****.*

   ii.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

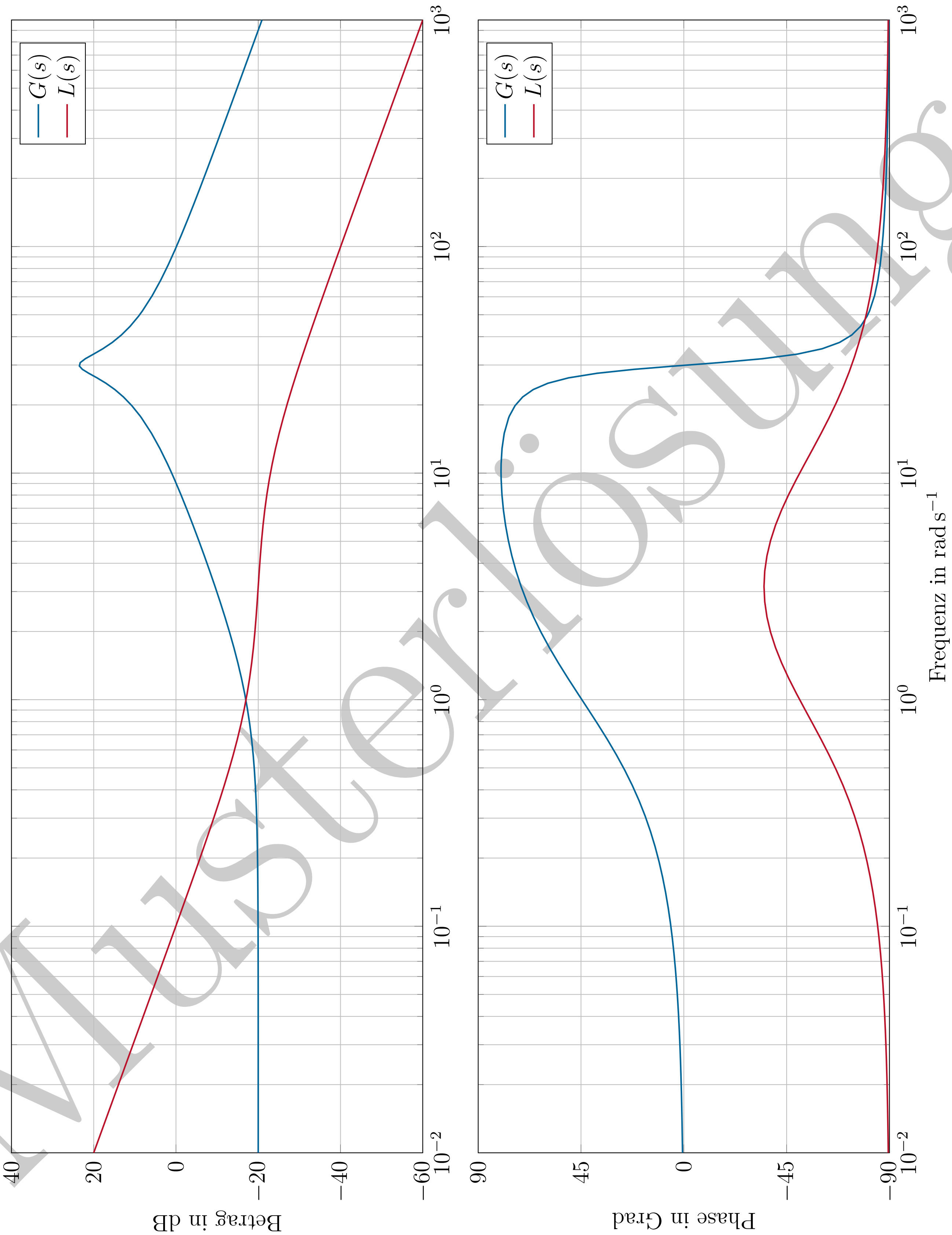

Abbildung 4: Bode-Diagramm zu Aufgabe 4aiii

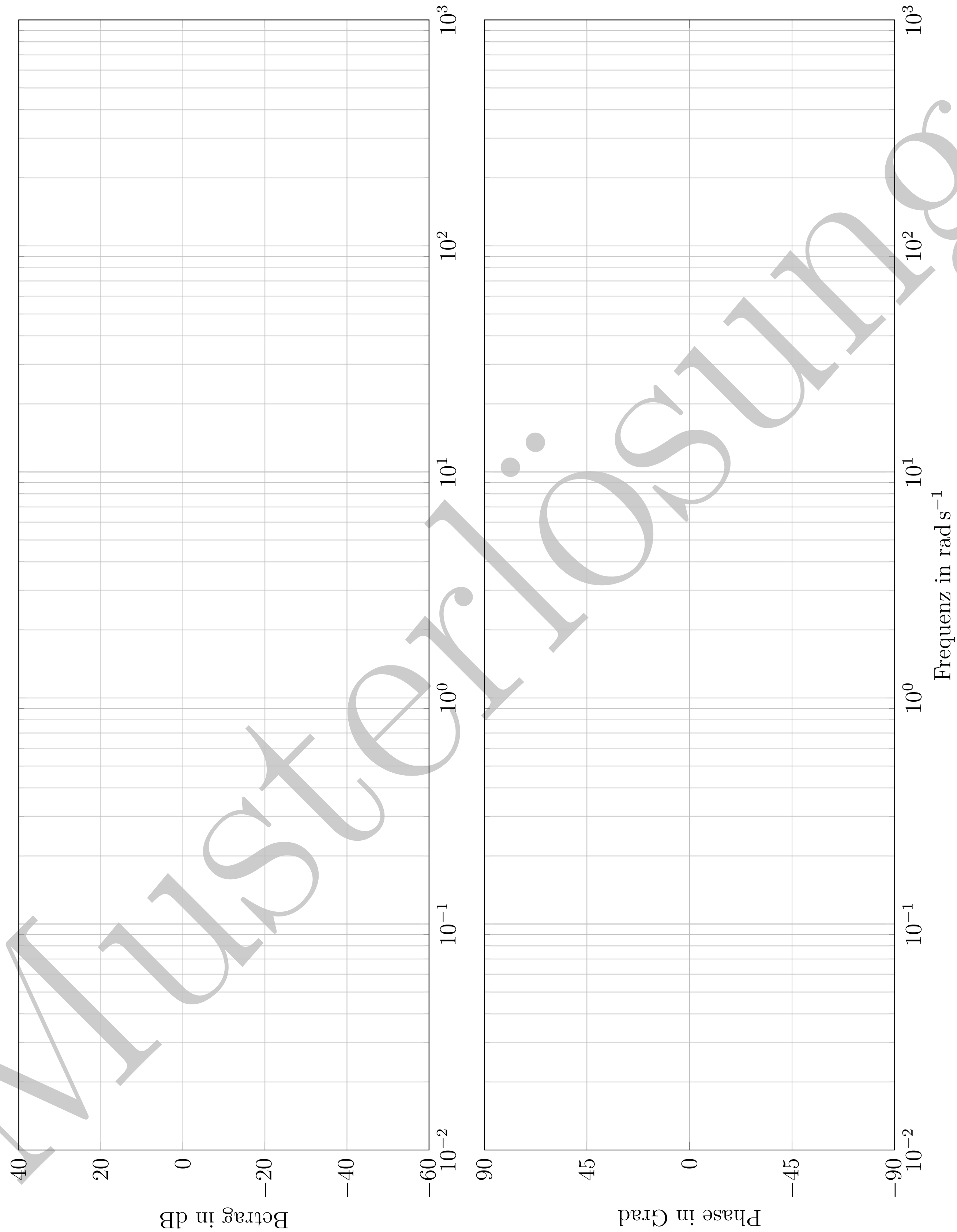

Abbildung 5: Vorlage Bode-Diagramm zu Aufgabe 4aiii