Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 07.02.2025

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

   a) Gegeben sind folgende Modellgleichungen **4 P.|**

$$\dot{x}_1 = (u - x_1)^2 - x_2^2(x_1 + 2) + 3 \tag{1a}$$
$$\dot{x}_2 = x_2 x_1^2 - \mathrm{e}^{1-u} x_1 - x_2 + 1 \tag{1b}$$
$$y = x_1^2 + x_1 x_2 + 0.5 x_2^2, \tag{1c}$$

   wobei u der Eingang und y der Ausgang des Systems ist.

   i. Berechnen Sie die unbekannten Werte u_R und $x_{2,R}$ für alle Ruhelagen mit $x_{1,R} = 1$. 1 P.|

   ii. Linearisieren Sie das System (1) um eine allgemeine Ruhelage ($\mathbf{x}_R$, u_R) und geben Sie die Zustandsraumdarstellung des linearisierten Systems an. 3 P.|

   b) Gegeben ist das lineare, zeitinvariante und zeitkontinuierliche dynamische System **6 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \end{bmatrix} u, \tag{2a}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{2b}$$

   mit Anfangswert $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

   i. Überprüfen Sie, ob das System (2) asymptotisch stabil und beobachtbar ist. Begründen Sie Ihre Antworten! 2 P.|

   ii. Transformieren Sie das System mittels Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x}$ auf Jordansche Normalform 2.5 P.|

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{B}}u$$
$$y = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{z} + \tilde{d}u.$$

   Bestimmen Sie $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ und $\tilde{d}$.

   iii. Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ des ursprünglichen Systems (2). 1.5 P.|

Lösung:

a) *i.* $u_R = 1, x_{2R} = \pm 1$

ii. *Die linearisierte System um die Ruhelage ist*

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -(x_{2R}^2 + 2u_R - 2x_{1R}) & -2x_{2R}(x_{1R}+2) \\ 2x_{1R}x_{2R} - e^{1-u_R} & x_{1R}^2 - 1 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2(x_{1R} - u_R) \\ x_{1R}e^{1-u_R} \end{bmatrix} \Delta u$$
$$\Delta y = \begin{bmatrix} 2x_{1R} + x_{2R} & x_{1R} + x_{2R} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x} + 0\Delta u$$

b) *i.*

- *Die Eigenwerte des Systems sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$. Das System ist nicht asymptotisch stabil.*
- *Das System ist beobachtbar: Die Beobachtbarkeitsmatrix hat Rang 2.*

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ii. *Achtung: Die Transformation $\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x}$ ist nicht die gleiche wie im Skript. $\mathbf{V}$ würde hier der* Inversen *der Eigenvektormatrix entsprechen. Da dies zu Verwirrung führen könnte, wurden beide möglichen Definitionen von $\mathbf{V}$ korrekt gewertet. Die korrekte Lösung für $\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x}$ ist unten angegeben.*
Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ sind $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ und $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.
Die richtige Transformation ist

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & -0.8 \end{bmatrix}$$

mit der Inversen, die die Eigenvektoren enthält,

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die transformierte Systemmatrizen sind

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 3 \\ -12 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + 0u$$

iii. *Die Transitionsmatrix ist*

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{V}^{-1}\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{V} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} e^{-2t} + 4e^{3t} & -4e^{-2t} + 4e^{3t} \\ -e^{-2t} + e^{3t} & 4e^{-2t} + e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Achtung: Die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ ist nicht die gleiche wie in den Notizen. Die gegebene Form wurde für $\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x}$ abgeleitet.

2. *Die Aufgaben a), b), c) und d) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Die Übertragungsfunktion $G(s)$ hat konjugiert komplexe Pole $s = a \pm Ik$. Zeigen Sie, dass die Pole der zugehörigen z-Übertragungsfunktion mit Abtastzeit $T_a = \pi$ für alle $a < 0$ und $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ auf der negativen reellen Achse liegen. **1 P.|**

b) In Abbildung 1 sind die Sprungantworten von vier verschiedenen zeitdiskreten Systemen dargestellt. Welche Antwort (h_1, h_2, h_3 oder h_4) entspricht der zeitdiskreten Übertragungsfunktion $H(z) = \frac{1.44}{(z+0.2)^2}$? Begründen Sie Ihre Antwort. **2 P.|**

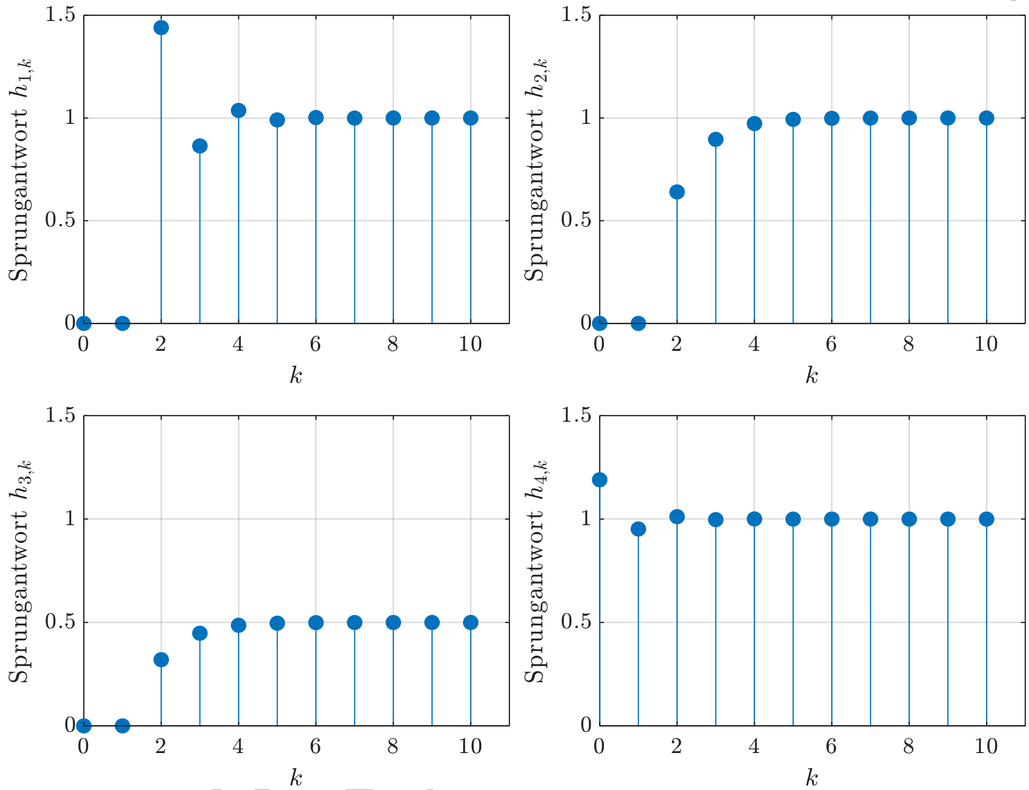


Abbildung 1: Sprungantworten zu Aufgabe 2b).

c) Gegeben ist die Eingangsfolge **3 P.|**

$$u_k = (2, -1, -1, 0, 0, \dots)$$

und die resultierende Ausgangsfolge

$$y_k = (0, \gamma, 4, 1, -1, 0, 0 \dots).$$

Bestimmen Sie die Impulsantwort (g_k) und die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems sowie den Parameter γ so, dass $g_k = 0$ für $k \geq 3$.

d) Gegeben ist das System **4 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_k, \tag{3a}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \tag{3b}$$

i. Ist es möglich mit einem Zustandsregler der Form 1 P.

$$u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$$

die Eigenwerte des geschlossenen Kreises beliebig zu platzieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii. Entwerfen Sie einen Dead-Beat Regler für das System (3). 3 P.

Lösung:

a) *In der z-Ebene sind die Pole der Übertragungsfunktion* $G(z)$ *gegeben durch* $z = e^{sT_a}$*. Für die gegebenen Pole ergibt sich*

$$z = e^{(a \pm Ik)\pi} = e^{a\pi}e^{\pm Ik\pi} = e^{a\pi}(\cos(k\pi) \pm I\sin(k\pi))$$

Da $sin(k\pi) = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$ *und* $cos(k\pi) = (-1)^k$*, liegen die Pole für alle* $k = \pm1, \pm3, \pm5, \dots$ *auf der negativen reellen Achse.*

b)

- *Nicht sprungfähig und wegen* $\mathrm{grad}(a(z)) \neq \mathrm{grad}(b(z)) = 2$ $(G(z) = \frac{b(z)}{a(z)})$ *muss gelten y0 = y1 = 0. Deswegen kann* h_4 *nicht die Antwort sein.*
- *Mittels Endwertsatz ist der Endwert der Sprungantwort 1. (Nicht* h_3*)*
- *Da das System polen auf der negativen reellen Achse hat, ist eine oszillierende Antwort zu erwarten (Sehen Sie Aufgabe a)). Deswegen ist* h_1 *die Antwort.*

c) *Die Impulsantwort ist*

$$g_k = (0, -2, 1, 0, 0, \dots)$$

und die Übertragungsfunktion ist

$$G(z) = \frac{-2z + 1}{z^2}$$

mit $\gamma = -4$.

d) i. *Ja, da die Erreichbarkeitsmatrix Rang 2 hat.*

$$\begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma} & \mathbf{\Phi\Gamma}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2 \\ 2 & -2\end{bmatrix}$$

ii. *Mittels Ackermanns Formel, mit den gewünschten Polen* $p_0 = p_1 = 0$*, ist* $\mathbf{k}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix}-2.5 & -0.5\end{bmatrix}$.

3. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

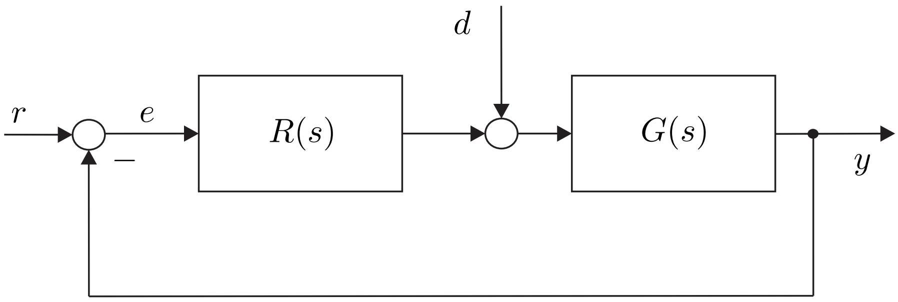


Abbildung 2: Regelkreis

a) Für die Strecke **5 P.|**

$$G(s) = \frac{s+2}{s(s-2)}$$

soll ein Regler in einem Regelkreis nach Abbildung 2 entworfen werden. Die Struktur das Reglers ist mit

$$R(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s + b_0} \ ,$$

gegeben.

i. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1, a_0 und b_0, sodass sämtliche Pole des geschlossenen Regelkreises bei $s_i = -2$ liegen. 3 P.|

ii. Berechnen Sie die bleibende Regelabweichung e_∞ zufolge eines Einheitssprungs der Führungsgröße $r(t) = \sigma(t)$ mit konstanter Störung $d(t) = \sigma(t)$. 2 P.|

b) Gegeben ist die Impulsantwort **5 P.|**

$$g(t) = \mathrm{e}^{-t} \sin(t)$$

eines linearen, zeitinvarianten Systems.

i. Skizzieren Sie die Impulsantwort $g(t)$ und beurteilen Sie die BIBO-Stabilität des zugehörigen Systems anhand der Impulsantwort $g(t)$. 2 P.|

ii. Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems an. 1 P.|

iii. Geben Sie eine Minimalrealisierung des Systems in Zustandsraumdarstellung an. 2 P.|

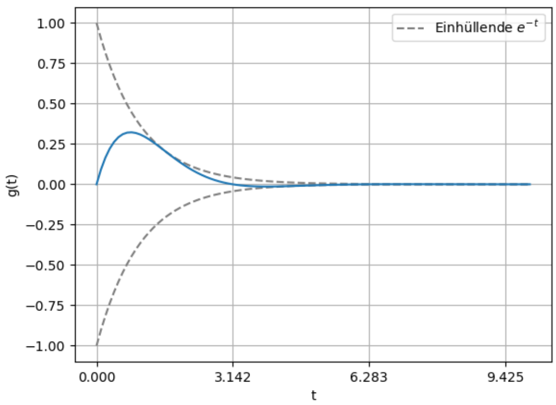
Lösung 3.:

a) i. $a_0 = 4$, $a_1 = 6$, $b0 = 2$

   ii. $e_\infty = \frac{1}{2}$

b) i. *Da $g(t)$ absolut integrabel ist, ist das System BIBO-stabil.*

$$\int_0^\infty |\mathrm{e}^{-t}\sin(t)|dt < \int_0^\infty |\mathrm{e}^{-t}|dt = 1 \tag{4}$$



   ii.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

   iii. *Eine von vielen möglichen Lösungen ist die reelle Jordansche Normalform*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

Andere Lösungen wären zum Beispiel die 1-te oder 2-te Standardform.

4. a) Für die Strecke **10 P.|**

$$G(s) = \frac{1}{s\left(\left(\frac{s}{20}\right)^2 + 2 \cdot 0.1\frac{s}{20} + 1\right)}$$

wurde der Regler

$$R(s) = \frac{9}{s}\frac{\left(1+\frac{s}{3}\right)\left(\left(\frac{s}{20}\right)^2 + 2 \cdot 0.1\frac{s}{20} + 1\right)}{(1+\frac{s}{300})^2}$$

in einem Regelkreis nach Abbildung 2 entworfen.

i. Um welche Art Regler handelt es sich bei $R(s)$? Beschreiben Sie die Funktion aller Faktoren in $R(s)$. 2 P.|

ii. Skizzieren Sie das Bode-Diagramm des offenen Regelkreises $L(s) = R(s)G(s)$. Nutzen Sie das folgende Diagramm und beschriften Sie die Achsen. 3 P.|

iii. Überprüfen Sie, ob das Nyquist-Kriterium in Frequenzkennliniendarstellung anwendbar ist, um BIBO-Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu zeigen. 1 P.|

iv. Zeichnen Sie die Durchtrittsfrequenz ω_c und die Phasenreserve Φ in Ihr Bodediagramm ein und schätzen Sie die Werte ω_c und Φ ab. 2 P.|

v. Überprüfen Sie anhand Ihrer geschätzten Werte aus iv., ob der geschlossene Regelkreis intern stabil ist. 1 P.|

vi. Skizzieren Sie den Betragsfrequenzgang der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises $T_{ry}(s)$. 1 P.|

Lösung:

a) i. *Kompensationsregler mit PID.*

- $1/s$*: Integralanteil, um konstante Störungen zu unterdrücken und bleibende Regelabweichung bei rampenartiger Führungsgröße auf Null zu regeln.*
- $\left(\left(\frac{s}{20}\right)^2 + 2 \cdot 0.1\frac{s}{20} + 1\right)$*: Kompensationsanteil, um schwach gedämpfte Polstelle zu kompensieren*
- 9*: Konstante Verstärkung um die Durchtrittsfrequenz um somit die Anstiegszeit festzulegen*
- $\left(1 + \frac{s}{3}\right)$*: Proportional-Differential Anteil um Phase anzuheben und gewünschte Phasenreserve und Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu erreichen.*
- $(1 + \frac{s}{300})^2$*: Realisierungsterm*

ii. *Siehe Bodediagramm 4*

iii. (A) $V = 9 > 0$, $T_t = 0 >= 0$

(B) $\mathrm{grad}(n_L(s)) + \rho = 4$, $\mathrm{grad}(z_L(s)) = 1$

(C) $n_L(s)$ *Hurwitz*, $\rho = 2$

(D) *Die Betragskennlinie von* $L(\mathrm{I}\omega)$ *weist genau einen Schnittpunkt mit der 0-dB-Linie (eine Durchtrittsfrequenz* ω_C*) auf. (Siehe Bodediagramm aus ii.).*

(E) *Im Bereich* $|L(\mathrm{I}\omega)|_{dB} \geq 0$ *gilt* $-540° < \arg(L(\mathrm{I}\omega)) < 180°$.

iv. *Zeichnung siehe Bodediagramm Abbildung 4,* $\Phi = 51.1°, \omega_c = 3.8\,\mathrm{rad/s}$

v. *Da die Phasenreserve positiv ist (*$\Phi = 51.1° > 0$*) und keine Kürzungen von instabilen Polstellen auftreten ist der geschlossene Regelkreis intern stabil.*

vi. *Skizze siehe Abbildung 3*

$\omega \ll \omega_c \quad |L(I\omega)| \gg 1 \quad |T_{ry}(I\omega)| \approx 1$

$\omega \gg \omega_c \quad |L(I\omega)| \ll 1 \quad |T_{ry}(I\omega)| \approx L(I\omega)$

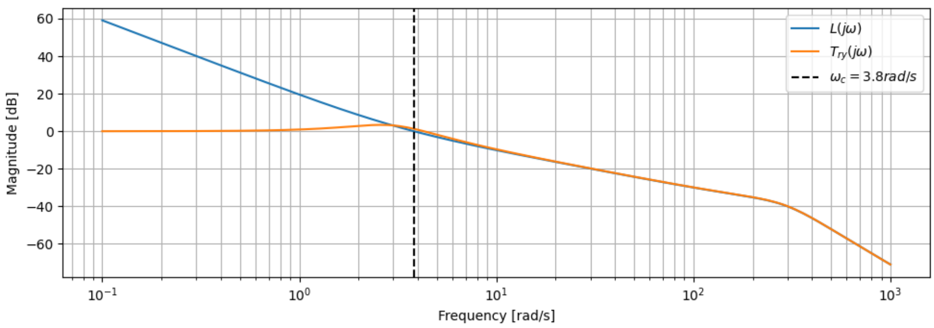


Abbildung 3: Betragsfrequenzgang der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises $T_{ry}(s)$

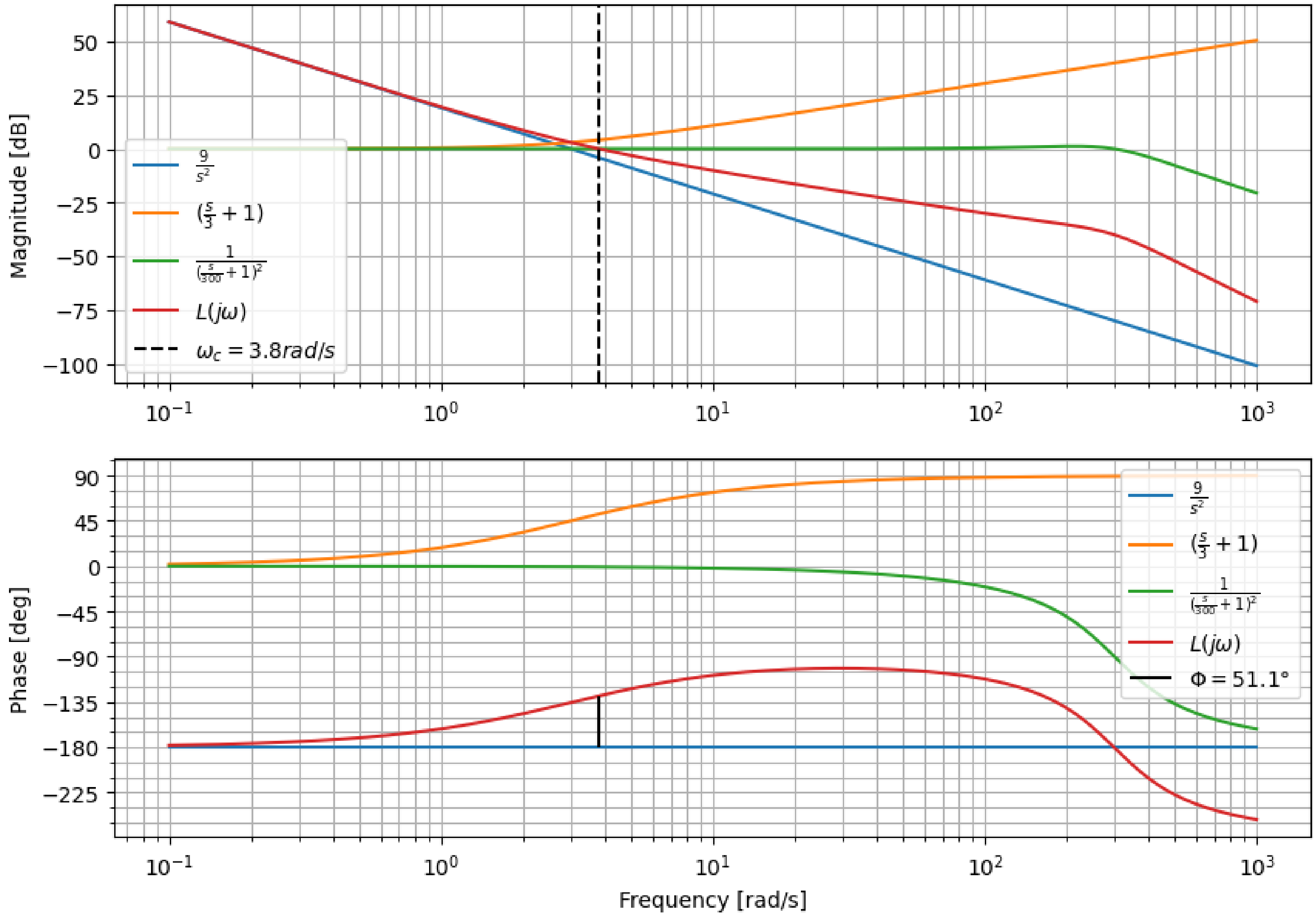


Abbildung 4: Bode Diagramm Frage 4aii