Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 21.09.2022

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	9	11	10	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **9 P.|**

   a) Gegeben ist das System **3.5 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1a}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} \quad . \tag{1b}$$

      i. Bestimmen Sie die s-Übertragungsfunktion des Systems (1). 1 P.|

      ii. Berechnen Sie die z-Übertragungsfunktion des Abtastsystems von System (1) mit der Abtastzeit $T_a = \pi$. 2.5 P.|

   b) Die q-Übertragungsfunktion eines offenen Regelkreises ist gegeben durch **3 P.|**

$$L^{\#}(q) = \frac{q-2}{q^2+2q+1} \quad . \tag{2}$$

      i. Bestimmen Sie die q-Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises. 0.5 P.|

      ii. Bestimmen Sie mittels der Überprüfung auf ein Hurwitzpolynom, ob der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist. 1 P.|

      iii. Die Nyquist-Ortskurve des offenen Regelkreises (2) ist gegeben in Abb. 2. Beurteilen Sie die Stabilität des geschlossenen Kreises grafisch mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums. Skizzieren Sie dazu grob die Nyquist-Ortskurve auf einem Blatt Papier und zeichnen Sie die Punkte $\Omega = \pm 0$, $\Omega = \pm\infty$ sowie den Durchlaufsinn deutlich sichtbar ein! 1.5 P.|

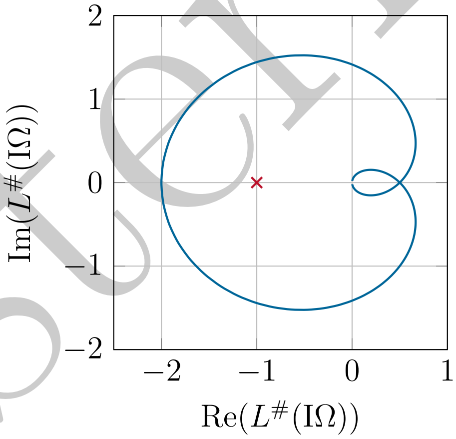

Abbildung 1: Nyquist-Ortskurve des offenen Regelkreises (2).

   c) Gegeben ist das zeitdiskrete System **2.5 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{3a}$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k \quad . \tag{3b}$$

      i. Welche Voraussetzung muss ein System erfüllen, damit ein vollständiger Luenberger Beobachter entworfen werden kann. Prüfen Sie, ob das System (3) diese Eigenschaft erfüllt. 0.5 P.|

      ii. Entwerfen Sie für das System (3) einen Dead-Beat Beobachter. 2 P.|

Lösung:

a) *i.* $G(s) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d = \frac{s-1}{s^2-2s-8}$

ii.

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\mathbf{Z}\left(\frac{G(s)}{s}\right)$$
$$G(z) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\frac{z-1}{z-e^{-2\pi}} + \frac{1}{8}\frac{z-1}{z-e^{4\pi}}$$

b) *i.* $T^{\#}_{r,y}(q) = \frac{q-2}{q^2+3q-1}$

ii. $z_L(q) + n_L(q)$ *ist kein Hurwitzpolynom, weil* $q_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4}}$

iii. *Bedingung:*

$$\Delta \arg\Big(1 + L^{\#}(\mathrm{I}\Omega)\Big) = \Big(\max\Big(\mathrm{grad}(z_L),\, \mathrm{grad}(n_L)\Big) - N_-(n_L) + N_+(n_L)\Big)\pi = 0$$

Grafisch:

$$\Delta \arg(1 + L^{\#}(\mathrm{I}\Omega)) = -2\pi$$

$\rightarrow$ *geschlossener Kreis ist nicht BIBO-stabil*

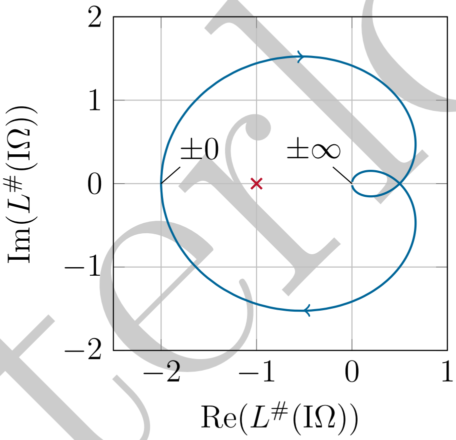

Abbildung 2: Nyquist-Ortskurve des offenen Regelkreises (2).

c) *i.* $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ *Da die Beobachtbarkeitsmatrix* $\mathcal{O}$ *vollen Rang hat ist das System vollständig beobachtbar, wodurch die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix beliebig platziert werden können.*

ii. $\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **11 P.|**

a) Gegeben ist das autonome lineare dynamische System **5 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{4}$$

Bestimmen Sie die Lösungstrajektorie $\mathbf{x}(t)$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$. 1 P.|

ii. Ist das System (4) global asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|

iii. Bestimmen Sie eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{z}(t)$ und geben Sie die transformierte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ in Jordanscher Normalform an. 1.5 P.|

iv. Bestimmen Sie die transformierte Transitionsmatrix $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ und die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}$ des ursprünglichen Systems (4). 1.5 P.|

v. Bestimmen Sie die Lösung des ursprünglichen Systems $\mathbf{x}(t)$ von (4). 0.5 P.|

Hinweis: Vereinfachen Sie Ihre Lösung so weit wie möglich.

b) Gegeben ist die s-Übertragungsfunktion **6 P.|**

$$G(s) = 200 \frac{1 - {}^{s}\!/_{100}}{s^2 + 2s + 100} \quad . \tag{5}$$

i. Untersuchen Sie die s-Übertragungsfunktion (5) auf folgende Eigenschaften, geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Antwort: 2 P.|

A. BIBO-Stabilität

B. Phasenminimalität

C. Sprungfähigkeit

D. Realisierbarkeit

ii. Skizzieren Sie das Bode-Diagramm der s-Übertragungsfunktion (5) auf dem beiliegenden Blatt. Berechnen Sie den Betrag und die Phase bei $\omega = 10\mathrm{rad\,s^{-1}}$ und verwenden Sie die Werte in der Skizze. **Hinweis:** Vereinfachen Sie Ihre Lösung so weit wie möglich und approximieren Sie die Ergebnisse der Funktionen (z.B. Wurzel, arctan). 3 P.|

iii. Geben Sie die eingeschwungene Lösung des Systems (5) für 1 P.|

$$u(t) = 5(1 + e^{-3t}) + 2\sin(10t + 10^\circ) \tag{6}$$

an.

Lösung:

a) *i.* $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 + 2\lambda + 5, \qquad \lambda_{1,2} = -1 \pm \mathrm{I}2$

ii. *Global asymptotisch stabil: Ja, weil* $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$

iii. $\mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\mathbf{v}_1) & \mathrm{Im}(\mathbf{v}_1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

iv. $\tilde{\mathbf{\Phi}} = \exp(\tilde{\mathbf{A}}t) = e^{-t}\begin{bmatrix}\cos(2t) & \sin(2t)\\ -\sin(2t) & \cos(2t)\end{bmatrix}$

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{V}^{-1} = e^{-t}\begin{bmatrix}\cos(2t) + 1/2\sin(2t) & -5/2\sin(2t)\\ 1/2\sin(2t) & \cos(2t) - 1/2\sin(2t)\end{bmatrix}$$

v. $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_0 = e^{-t}\begin{bmatrix}\cos(2t) + 1/2\sin(2t)\\ 1/2\sin(2t)\end{bmatrix}$

b) *i.* *A. BIBO-stabil: Ja, weil Polstellen* $\mathrm{Re}(s_i) < 0$

B. Phasenminimal: Nein, weil Nullstelle $\mathrm{Re}(s_i) > 0$

C. Sprungfähig: Nein, weil $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$

D. Realisierbar: Ja, weil $\lim_{s\to\infty} |G(s)| < \infty$

ii.

$$\begin{aligned}
G(s) &= 2\frac{1 - s/100}{(s/10)^2 + 0.2(s/10) + 1}\,,\\
G(\mathrm{I}10) &= -1 - \mathrm{I}10\,,\\
|G(\mathrm{I}10)| &= \sqrt{(101)} \approx 10\,,\\
\arg(G(\mathrm{I}10)) &= \arctan(10) + \pi \approx -90^\circ
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
y(t) &= 5\Big(\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}G(s)\Big) + 2|G(\mathrm{I}10)|\sin(10t + 10^\circ + \arg(G(\mathrm{I}10)))\\
y(t) &\approx 10 + 20\sin(10t - 80^\circ)
\end{aligned}$$

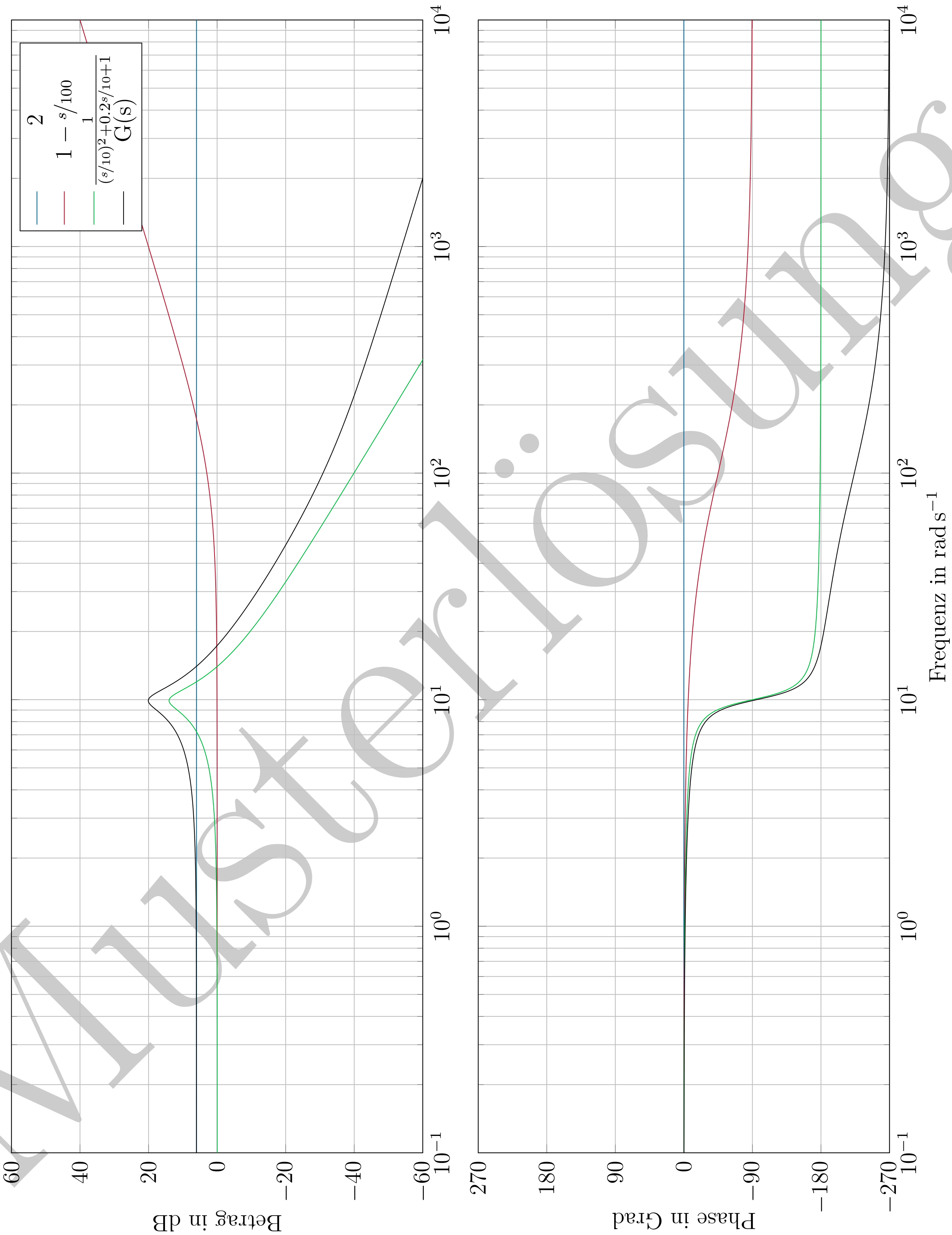

Abbildung 3: Bode-Diagramm zu Aufgabe 2b

3. Die Aufgaben a), b), c) und d) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.|**

a) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten kurz. **3 P.|**

i. Totzeitglieder haben auf die Stabilität von Regelkreisen keine Auswirkung. 0.5 P.|

ii. Nichtminimalphasige Systeme sind immer instabil. 0.5 P.|

iii. Ein System heißt sprungfähig, wenn es einer sprungförmigen Eingangsgröße mit einer sprungförmigen Ausgangsgröße folgt. 0.5 P.|

iv. Bei geeigneter Wahl der Regelparameter kann jede beliebige Strecke durch einen PID-Regler stabilisiert werden. 0.5 P.|

v. Die Lage der Nullstellen der Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Systems ist unabhängig vom Ausgangsvektor $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ und Eingangsvektor $\mathbf{b}$. 0.5 P.|

vi. Man nennt einen Regelkreis intern stabil, wenn sämtliche Übertragungsfunktionen im geschlossenen Kreis BIBO-stabil sind. 0.5 P.|

b) Gegeben ist das Blockschaltbild eines linearen zeitinvarianten Systems in Abb. 4. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\hat{y}_1(s)}{\hat{r}_2(s)}$. **2 P.|**

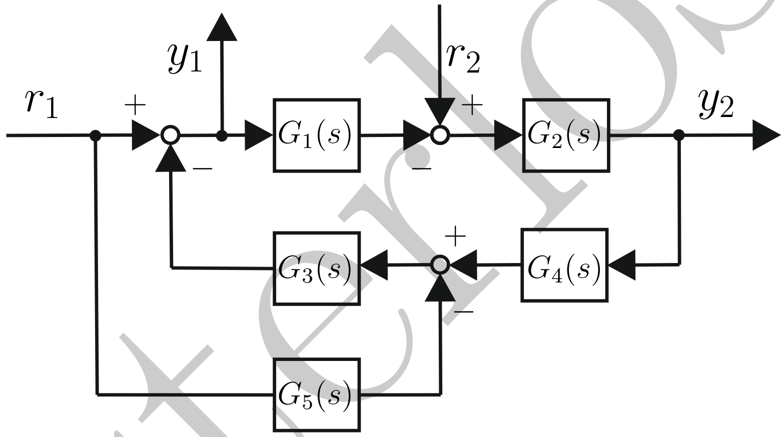

Abbildung 4: Blockschaltbild

c) Von einem System 1. Ordnung sind folgende Daten bekannt: **3 P.|**

Eingangsfunktion	Anfangsbedingung	entstehende Ausgangsfunktion (für $t \geq 0$)
$u(t) = 0$	$x_0 = 1$	$y(t) = 2e^{-t}$
$u(t) = \sigma(t)$	$x_0 = 0$	$y(t) = 1 - e^{-t}$

Geben Sie das System in Zustandsdarstellung an.

d) Geben Sie alle möglichen Ruhelagen des Systems **2 P.|**

$$\dot{x}_1 = -(x_1 - x_2)(1 - x_1 - x_2) \tag{7a}$$

$$\dot{x}_2 = x_1(2 + x_2) \tag{7b}$$

an.

Lösung:

a) i. *falsch*
   ii. *falsch*
   iii. *wahr*
   iv. *falsch*
   v. *falsch*
   vi. *wahr*

b)

$$G(s) = \frac{-G_2G_3G_4}{1 - G_1G_2G_3G_4} \tag{8}$$

c)

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \frac{1}{2}u(t) \tag{9}$$

$$y(t) = 2x(t) \tag{10}$$

d)

$$x_R = \begin{bmatrix} x_{1R} \\ x_{2R} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \tag{11}$$

4. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.|**

a) Für eine zu regelnde Strecke mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ verlangt die Spezifikation an den geschlossenen Kreis eine Anstiegszeit von $t_r = 0.3$ s. Zusätzlich resultiert aus den Anforderungen eine notwendige Phasenanhebung von 45° und eine Betragsabsenkung von 20 dB im offenen Regelkreis bei der gewünschten Durchtrittsfrequenz. Zur Erfüllung der Anforderungen soll ein Regler der Form **3 P.|**

$$R(s) = \frac{V_R s}{1 + sT_R} \tag{12}$$

eingesetzt werden. Berechnen Sie die Größen V_R und T_R.

b) Betrachten Sie den dargestellten Regelkreis in Abb. 5. **Hinweis**: Die Unterpunkte i), ii) und iii) können unabhängig voneinander gelöst werden. **5 P.|**

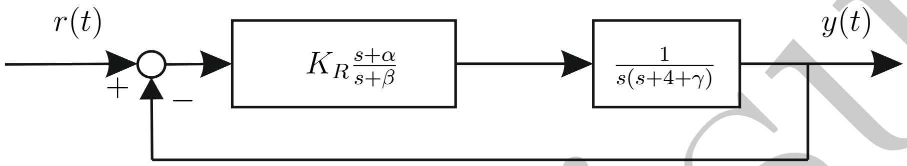

Abbildung 5: Regelkreis

i. Für $\gamma = 0$, berechnen Sie die Parameter α, β sowie den Verstärkungsfaktor K_R unter der Bedingung, dass das System im geschlossenen Regelkreis ein P-T$_2$ Verhalten mit einem Verstärkungsfaktor $V = 1$, dem Dämpfungsgrad $\zeta = 0.6$ und der Zeitkonstante $T = \frac{1}{6}$s besitzt. 2 P.|

ii. Für $\alpha = \beta$ und $\gamma = 0$, geben Sie K_R so an, dass sich bei der Führungsgröße $r(t) = 2 \cdot 10^{-3} t$ eine bleibende Regelabweichung von $e(\infty) = 0.001$ einstellt. 2 P.|

iii. Für $\alpha = \beta$, wie groß sollen K_R und γ sein, damit der Regelkreis ein ungedämpftes P-T$_2$ Verhalten aufweist? 1 P.|

c) Gegeben ist das nichtlineare System eines Synchrongenerators in der Zustandsdarstellung: **2 P.|**

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{13a}$$

$$\dot{x}_2 = b_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 \sin(x_1) - \frac{b_2}{2}\sin(2x_1) \tag{13b}$$

$$\dot{x}_3 = -c_1 x_3 + c_2 \cos(x_1) + u \tag{13c}$$

$$y = x_1 \; . \tag{13d}$$

Linearisieren Sie das System um die allgemeine Ruhelage $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x_{1R} & x_{2R} & x_{3R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ für $u = u_R$. Geben Sie das linearisierte System in der Zustandsdarstellung

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \tag{14a}$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x} + d\Delta u \tag{14b}$$

an. Die Parameter a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 und c_2 sind konstant. **Hinweis:** Die Ruhelagen müssen nicht berechnet werden.

Lösung:

a) $T_R = \frac{1}{5}$, $V_R = \frac{\sqrt{2}}{50}$

b) *i.* $\alpha = 4$, $\beta = 7.2$, $K_R = 36$

ii. $K_R = 8$

iii. $\gamma = -4$, $K_R > 0$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_2 x_{3R}\cos(x_{1R}) - b_2\cos(2x_{1R}) & -a_1 & -a_2\sin(x_{1R}) \\ , -c_2\sin(x_{1R}) & 0 & -c_1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $d = 0$