Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 09.02.2022

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	$\sum$
erreichbare Punkte	12	12	16	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

Unterweisung für Studierende
COVID-19-Schutzmaßnahmen an der TU Wien

Diese Unterweisung bezieht sich auf die COVID-19 Schutzmaßnahmen, die an der TU Wien einzuhalten sind.

Inhalt der Unterweisung (siehe beiliegendes Infoblatt)

Allgemeine Vorgaben

- Die Hände sind regelmäßig und gründlich zu reinigen.
- Schutzabstand einhalten.
- Richtige Husten- und Niesetikette beachten (bitte Ellenbogenbeuge vorhalten)
- Händeschütteln und Körperkontakt vermeiden
- Es dürfen keine Gruppen innerhalb der Gebäude bzw. auf dem Gelände der TU Wien gebildet werden.
- Bei Erkrankung UNBEDINGT zu Hause bleiben.

Sicherheitsabstand einhalten

Die wichtigste Schutzmaßnahme gegen COVID-19-Infektionen ist der Sicherheitsabstand von mindestens 1,5 m. Dieser muss innerhalb aller Areale der TU Wien eingehalten werden.

Schutzmasken

Das Tragen von Mund-Nasen-Schutzmasken (MNS-Masken) wird in allen allgemeinen Räumlichkeiten dann empfohlen, wenn ein Kontakt mit anderen Personen sehr wahrscheinlich ist und nicht sichergestellt werden kann, dass der notwendige Sicherheitsabstand eingehalten wird.

In den institutsspezifischen Arbeitsräumen ist das Tragen von MNS-Masken (bei Bedarf auch Visiere) dann verpflichtend, wenn sich mehr als eine Person im Raum aufhält und der Abstand von 1,5 m in Büros, Labors, Werkstätten und Hörsälen nicht durchgehend eingehalten werden kann.

Präventions- und Hygienemaßnahmen

Grundsätzlich gilt: Waschen Sie Ihre Hände regelmäßig und gründlich mit Seife. Das ist für die Haut weniger belastend als Desinfektion und erhält die als Ansteckungsschutz nötige Hautbarriere.

Direkt bei den Eingängen sind Desinfektionsstellen eingerichtet, an denen man sich beim Betreten der Gebäude der TU Wien die Hände desinfizieren kann.

Allgemein: Auf die Hygiene ist unbedingt zu achten (regelmäßiges Händewaschen, keine Berührungen der Mitmenschen, Atemhygiene)!

Risikominimierung

Jede_r, der Krankheitssymptome wie Husten, Fieber, Geschmacksverlust, etc. aufweist oder befürchtet, muss jedenfalls zu Hause bleiben und sofort die telefonische Gesundheitsberatung unter 1450 kontaktieren.

Zusatzinformationen

Weitere Informationen können Sie auch unter folgendem Link nachlesen:
https://colab.tuwien.ac.at/pages/viewpage.action?pageId=11638263

Ich erkläre hiermit, dass ich über die Schutzmaßnahmen unterrichtet wurde, diese verstanden und zur Kenntnis genommen habe und verpflichte mich, diese einzuhalten.

………………………………	………………………………………………..…
Datum	Name und Unterschrift

1. Mit dem dargestellten Seiltrieb soll eine Masse m über ein Seil, welches an der Seiltrommel T befestigt ist, angehoben werden. Die Seiltrommel ist fest mit der Seilrolle B verbunden. Das Seil, mit dem die Seilrollen A und B verbunden sind, wird mit der Spannrolle C gespannt. Diese ist an einem Arm der Länge l befestigt auf welchen das Moment τ_C wirkt. Zwischen dem Seil und den Triebrollen A, B tritt jeweils Haftung auf. An der Spannrolle C tritt keine Reibung auf. Die Rollen A, B und C sowie die Trommel T sind masselos. Das Seil zum Heben der Last ist fest mit der Trommel verbunden. Das System befindet sich in Ruhe. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative y-Richtung. 12 P.

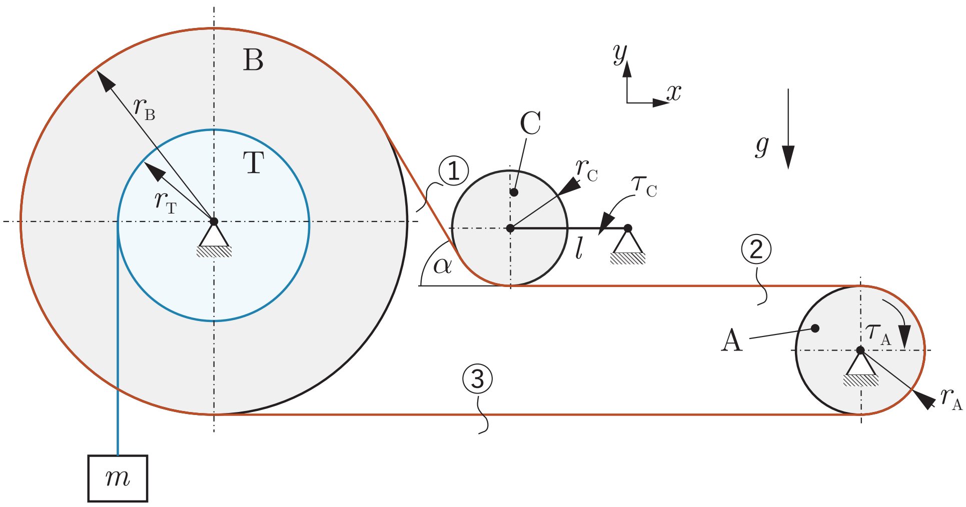


Abbildung 1: Seiltrieb.

a) Schneiden Sie die Seilrolle A, die Seilrolle B gemeinsam mit der Trommel T und die Spannrolle C zusammen mit dem Arm frei. Fertigen Sie die Schnittskizze an und zeichnen Sie alle Kräfte ein. 2 P.

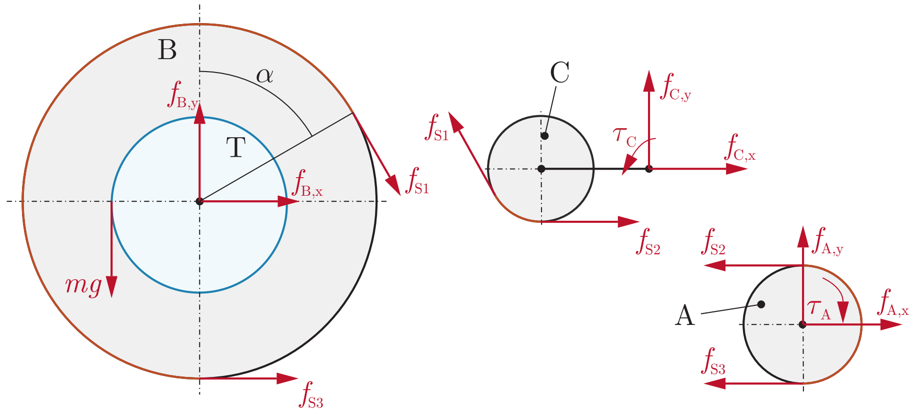
b) Berechnen Sie die Seilkräfte an den Stellen 1, 2 und 3 als Funktion von τ_C sowie das erforderliche Drehmoment τ_A um die Masse in ihrer Position fest zu halten. 5 P.

c) Wie groß muss τ_C sein, damit das Seil an keiner Stelle die Spannung verliert (d.h. die Seilkraft ist überall > 0)? 1 P.

d) Berechnen Sie den erforderlichen Haftreibkoeffizient $\mu_{H,B}$ zwischen Seil und Rolle B, sodass das Seil an Rolle B nicht rutscht. 2 P.

e) Berechnen Sie die Lagerkraft des Arms der Spannrolle C. 2 P.

Lösung:



a)

Abbildung 2: Seiltrieb freigeschnitten.

Hinweis: *Werden die Spannrolle* C *und der Arm getrennt freigeschnitten folgt aus der Drehmomentenbilanz für die Spannrolle* C *unmittelbar, dass* $f_{\mathrm{S1}} = f_{\mathrm{S2}}$ *gilt.*

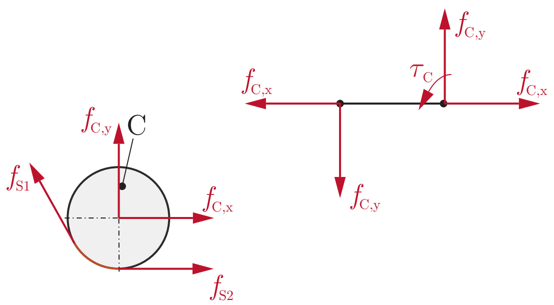


Abbildung 3: Spannrolle C und Hebel getrennt freigeschnitten.

b) $\tau_{\mathrm{A}} = mgr_{\mathrm{T}}\frac{r_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{B}}}$,
$f_{\mathrm{S1}} = f_{\mathrm{S2}} = \frac{\tau_{\mathrm{C}}}{l\sin(\alpha)}$, $f_{\mathrm{S3}} = \frac{\tau_{\mathrm{C}}}{l\sin(\alpha)} - mg\frac{r_{\mathrm{T}}}{r_{\mathrm{B}}}$

c) $\tau_{\mathrm{C}} \geq mg\frac{r_{\mathrm{T}}}{r_{\mathrm{B}}}l\sin(\alpha)$

d) $\mu_{\mathrm{H,B}} \geq \frac{1}{\pi+\alpha}\ln\left(1 + \frac{mgr_{\mathrm{T}}}{f_{\mathrm{S3}}r_{\mathrm{B}}}\right)$

e) $f_{\mathrm{C,x}} = \frac{\tau_{\mathrm{C}}}{l\sin(\alpha)}(\cos(\alpha) - 1)$, $f_{\mathrm{C,y}} = -\frac{\tau_{\mathrm{C}}}{l}$
Lagerkräfte in den Lagern der Rollen A und B:
$f_{\mathrm{A,x}} = \frac{2\tau_{\mathrm{C}}}{l\sin(\alpha)} - mg\frac{r_{\mathrm{T}}}{r_{\mathrm{B}}}$, $f_{\mathrm{A,y}} = 0$,
$f_{\mathrm{B,x}} = -\frac{\tau_{\mathrm{C}}}{l\sin(\alpha)}(1 + \cos(\alpha)) + mg\frac{r_{\mathrm{T}}}{r_{\mathrm{B}}}$, $f_{\mathrm{B,y}} = mg + \frac{\tau_{\mathrm{C}}}{l}$

2. Ein ferromagnetisches Projektil der Masse m_P wird mithilfe einer Spule unter einem Winkel α beschleunigt. Die Kraft die von der Spule auf das Projektil ausgeübt wird kann näherungsweise durch $f_\mathrm{m} = k \sin\left(-\frac{z\pi}{2l}\right)$ beschrieben werden. Beim Verlassen des Laufs ($z \geq 0$) wird der Strom unterbrochen und die Kraft f_m wird zu null. Zu Beginn befindet sich das Projektil bei $z = -l$ und steht still. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative y-Richtung. 12 P.|

Hinweis: Die Unterpunkte a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

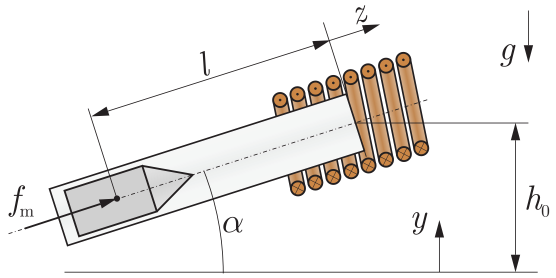


Abbildung 4: Coilgun.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das Projektil im Bereich $-l \leq z \leq 0$ auf, wenn Luftreibung auftritt. Dafür sind die Grundfläche des Projektils A, der Widerstandsbeiwert c_W und die Dichte der Luft ρ_L bekannt. 2 P.|

b) Vernachlässigen Sie nun die Luftreibung und berechnen Sie die Austrittsgeschwindigkeit v_E des Projektils. 3 P.|
Hinweis: Verwenden Sie das Prinzip der Energieerhaltung.

c) Das Projektil verlässt die Mündung mit der Geschwindigkeit v_E. Berechnen Sie die maximale Flughöhe $y_{\max}$ des Projektils, wenn sich die Mündung in einer Höhe h_0 über dem Boden befindet. 2 P.|

Das Projektil wird nun wie in Abbildung 5 dargestellt auf einen Holzblock mit der Masse m_B gefeuert. Der Holzblock ist fest mit einer homogenen, drehbar gelagerten, unendlich dünnen Stange der Masse m_S verbunden. Nach dem Einschlag des Projektils bleibt dieses stecken. Holzblock und Projektil können als Punktmassen am Ende des Stabes beschrieben werden.

Hinweis: Die Unterpunkte d) und f) können unabhängig voneinander gelöst werden.

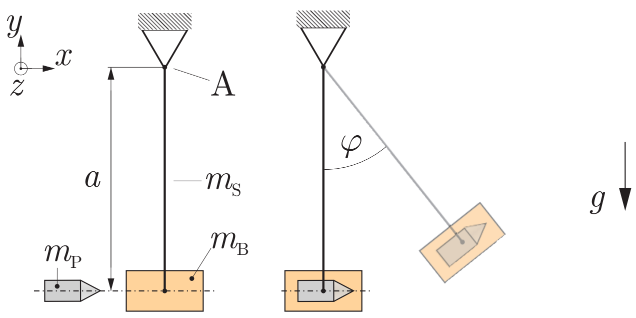


Abbildung 5: Ballistisches Pendel.

d) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment des Pendels nach dem Einschlag des Projektils um den Drehpunkt A. 2 P.|

e) Berechnen Sie die Drehwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ des Pendels unmittelbar nachdem das Projektil mit der Geschwindigkeit v einschlägt. 1 P.|
Hinweis: Es handelt sich um einen vollkommen unelastischen Stoß.

f) Bis zu welchem Winkel $\varphi_{\max}$ schlägt das Pendel nach dem Einschlag maximal aus? 2 P.|

Lösung:

a) $m_\mathrm{P}\ddot{z} = k\sin\left(-\frac{z\pi}{2l}\right) - c_\mathrm{W}A\frac{\rho_\mathrm{L}}{2}\dot{z}^2 - m_\mathrm{P}g\sin(\alpha)$

b) $v_\mathrm{E} = \sqrt{-2gl\sin(\alpha) + 4\frac{kl}{m_\mathrm{P}\pi}}$

c) $y_\mathrm{max} = h_0 + \frac{v_\mathrm{E}^2}{2g}\sin(\alpha)^2$

d) $I_{zz}^{(\mathrm{A})} = \left(m_\mathrm{B} + m_\mathrm{P} + \frac{m_\mathrm{S}}{3}\right)a^2$

e) $\dot{\varphi} = \frac{v}{a}\frac{m_\mathrm{P}}{m_\mathrm{B}+m_\mathrm{P}+\frac{m_\mathrm{S}}{3}}$

f) $\varphi_\mathrm{max} = \arccos\left(1 - \frac{v^2}{2ag}\frac{m_\mathrm{P}^2}{\left(m_\mathrm{B}+m_\mathrm{P}+\frac{m_\mathrm{S}}{2}\right)\left(m_\mathrm{B}+m_\mathrm{P}+\frac{m_\mathrm{S}}{3}\right)}\right)$

3. Der in Abbildung 6 dargestellte Manipulator verfügt über drei Freiheitsgrade $\mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}$. Die Freiheitsgrade q_1 bzw. q_3 bewirken Rotationen in Gelenk 1 bzw. Gelenk 3 und q_2 bewirkt eine translatorische Bewegung des Gelenks 2. Gelenk 1 und Gelenk 3 sind durch eine lineare Feder miteinander verbunden, die eine Federkonstante $c > 0$ besitzt und für $q_2 = 0$ entspannt ist. Der Endeffektor hat die Masse m_E und das Trägheitsmoment $\mathbf{I}_0^E = \mathrm{diag}(I_{E,xx}, I_{E,yy}, I_{E,zz})$, gegeben relativ zum Inertialsystem. Alle anderen Bestandteile des Manipulators sind als masselos zu betrachten. Im Koordinatenursprung des Endeffektors wirkt das externe Störmoment $\boldsymbol{\tau}_e^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \tau_{e,x} & \tau_{e,y} & \tau_{e,z} \end{bmatrix}$. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative z_0-Richtung. 16 P.|

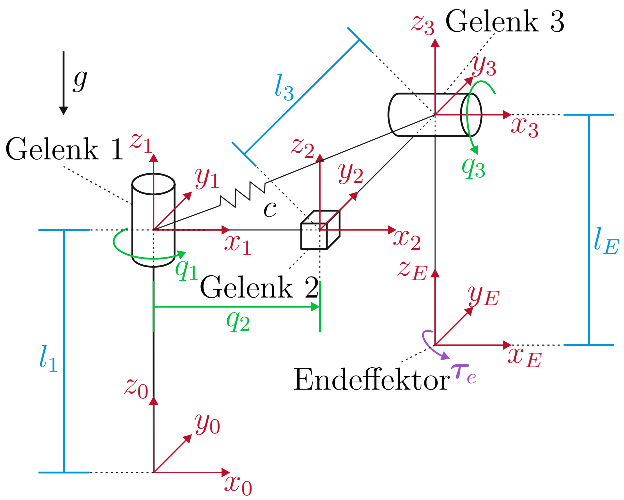


Abbildung 6: Manipulator.

a) Geben Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q})$, $\mathbf{H}_1^2(\mathbf{q})$, $\mathbf{H}_2^3(\mathbf{q})$ und $\mathbf{H}_3^E(\mathbf{q})$ zwischen den Koordinatensystemen als Funktion der generalisierten Koordinaten an. 3 P.|

b) Berechnen Sie die homogene Transformation zwischen dem Ursprung und dem Endeffektor des Manipulators $\mathbf{H}_0^E(\mathbf{q})$. 3 P.|

c) Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^E)$ und den rotatorischen Anteil der Jacobi-Manipulator-Matrix $(\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^E$ des Endeffektors im Inertialsystem. 3 P.|

d) Berechnen Sie den translatorischen Anteil der Manipulator Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_{\mathbf{v}})_0^E$ für den Endeffektor im Inertialsystem. 2 P.|

e) Berechnen Sie den rotatorischen Anteil der kinetischen Energie des Manipulators. 1 P.|

f) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor des Endeffektors $\mathbf{v}_0^E$ im Inertialsystem und geben Sie den translatorischen Anteil der kinetischen Energie des Manipulators an. *Hinweis:* Sie müssen den Ausdruck für die kinetische Energie nicht vereinfachen. 1.5 P.|

g) Berechnen Sie die gesamte potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ des Manipulators sowie den Vektor der Potentialkräfte $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. 1.5 P.|

h) Berechnen Sie die generalisierte Kraft $\mathbf{f}_{q,E}$, die zur Folge des externen Störmoments $\boldsymbol{\tau}_e$ wirkt. 1 P.|

Lösung:

a)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 & 0 \\ s_{q_1} & c_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{q_3} & -s_{q_3} & l_3 \\ 0 & s_{q_3} & c_{q_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{H}_0^E = \begin{bmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1}c_{q_3} & s_{q_1}s_{q_3} & -s_{q_1}s_{q_3}l_E - s_{q_1}l_3 + c_{q_1}q_2 \\ s_{q_1} & c_{q_1}c_{q_3} & -c_{q_1}s_{q_3} & c_{q_1}s_{q_3}l_E + c_{q_1}l_3 + s_{q_1}q_2 \\ 0 & s_{q_3} & c_{q_3} & -c_{q_3}l_E + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^E) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & s_{q_1}\dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 & 0 & -c_{q_1}\dot{q}_3 \\ -s_{q_1}\dot{q}_3 & c_{q_1}\dot{q}_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{J}_\omega)_0^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{q_1} \\ 0 & 0 & s_{q_1} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$(\mathbf{J}_\mathbf{v})_0^E = \begin{bmatrix} -c_{q_1}s_{q_3}l_E - c_{q_1}l_3 - s_{q_1}q_2 & c_{q_1} & -s_{q_1}c_{q_3}l_E \\ -s_{q_1}s_{q_3}l_E - s_{q_1}l_3 + c_{q_1}q_2 & s_{q_1} & c_{q_1}c_{q_3}l_E \\ 0 & 0 & s_{q_3}l_E \end{bmatrix}$$

e)

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_0^E)^{\mathrm{T}}\mathbf{I}_0^E\boldsymbol{\omega}_0^E \\ &= \frac{1}{2}I_{E,zz}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_{E,yy}\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}(I_{E,xx} - I_{E,yy})\dot{q}_3^2\cos^2(q_1) \end{aligned}$$

f)

$$\mathbf{v}_0^E = \begin{bmatrix} \cos(q_1)(-\dot{q}_1 l_E\sin(q_3) - \dot{q}_1 l_3 + \dot{q}_2) - \sin(q_1)(\dot{q}_3 l_E\cos(q_3) + \dot{q}_1 q_2) \\ \sin(q_1)(-\dot{q}_1 l_E\sin(q_3) - \dot{q}_1 l_3 + \dot{q}_2) + \cos(q_1)(\dot{q}_3 l_E\cos(q_3) + \dot{q}_1 q_2) \\ \dot{q}_3 l_E\sin(q_3) \end{bmatrix}$$

$$T_t = \frac{1}{2}m_E(\mathbf{v}_0^E)^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_0^E$$

g)

$$V(\mathbf{q}) = m_E g(-l_E\cos(q_3) + l_1) + \frac{c}{2}\left(\sqrt{q_2^2 + l_3^2} - l_3\right)^2$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{cq_2\left(\sqrt{l_3^2+q_2^2}-l_3\right)}{\sqrt{l_3^2+q_2^2}} & m_E g\sin(q_3)l_E \end{bmatrix}$$

h)

$$\mathbf{f}_{q,E} = \begin{bmatrix} \tau_{E,z} \\ 0 \\ c_{q_1}\tau_{E,x} + s_{q_1}\tau_{E,y} \end{bmatrix}$$