



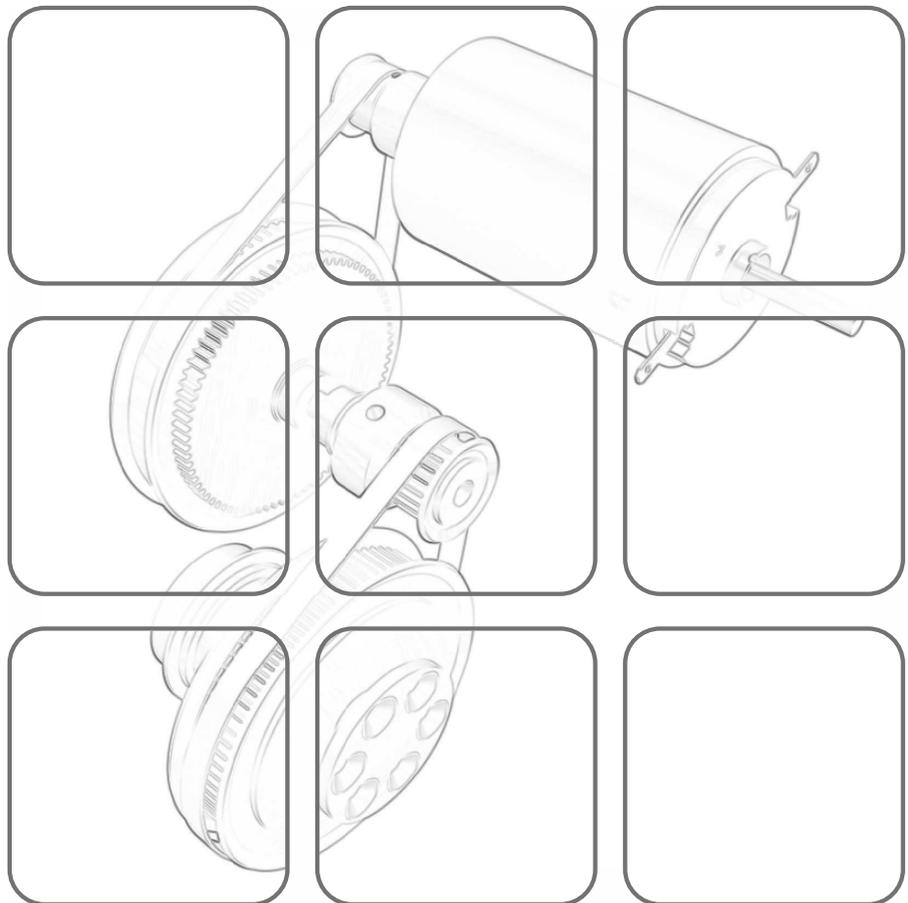
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology



Vorlesung und Übung
SS 2015

Univ.-Prof. Dr. techn. Andreas KUGL
Dr. techn. Tobias Glück
Dr.-Ing. Wolfgang Kemmetmüller
Dr. techn. Andreas Steinböck

MODELLBILDUNG



Modellbildung

Vorlesung und Übung
SS 2015

Univ.-Prof. Dr. techn. Andreas KUGI
Dr. techn. Tobias Glück
Dr.-Ing. Wolfgang Kemmetmüller
Dr. techn. Andreas Steinböck

TU Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
Gruppe für komplexe dynamische Systeme

Gusshausstrasse 27-29
1040 Wien
Telefon: +43 1 58801 – 37615
Internet: <http://www.acin.tuwien.ac.at>

© Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Literatur	6
2	Mechanische Systeme	7
2.1	Punkt-Kinematik	7
2.2	Newtonsche Gesetze	12
2.2.1	Kräftesysteme	12
2.2.2	Schwerpunkt	20
2.2.3	Impulserhaltung	24
2.2.4	Translatorische kinetische Energie und potentielle Energie	28
2.2.5	Dissipative Kräfte	33
2.2.6	Feder-Masse-Dämpfer System	41
2.2.7	Körper mit veränderlicher Masse	43
2.2.8	Drehimpulserhaltung	44
2.3	Euler-Lagrange Gleichungen	55
2.4	Literatur	66
3	Wärmeübertragung	68
3.1	Wärmeleitung	70
3.2	Randbedingungen	72
3.2.1	Erzwungene Konvektion	73
3.2.2	Freie Konvektion	78
3.2.3	Wärmeleitung	78
3.2.4	Wärmestrahlung	79
3.3	Wärmequellen	92
3.4	Stationäre Wärmeübertragung	95
3.4.1	Ebene Wand	95
3.4.2	Zylinderförmige Wand	98
3.4.3	Vorspringende Teile und Rippen	100
3.5	Transiente Wärmeübertragung	101
3.6	Numerische Lösung von Wärmeübertragungsproblemen	103
3.6.1	Finite Differenzen Methode	104
3.6.2	Konzentriert-parametrische Formulierung als RC-Netzwerk	107
3.7	Literatur	116
A	Ergänzungen zu Kapitel 3	118
A.1	Gaußscher Divergenzsatz	118
A.2	Skizze der Herleitung der Beziehung (3.24)	118

A.3 Wärmeleitung eines vorspringenden Bauteils 118

1 Einleitung

Im Rahmen dieser Vorlesung wollen wir uns mit der Modellbildung technischer Systeme beschäftigen. In einem ersten Schritt soll daher geklärt werden, was man unter einem *System* versteht. Einfach formuliert ist *ein System die Verbindung unterschiedlicher Komponenten, die miteinander in Interaktion stehen, zu einem Ganzen zum Zwecke der Durchführung bestimmter Aufgaben*. Die Wechselwirkung eines Systems mit der Systemumgebung erfolgt über die so genannten *Eingangs-* bzw. *Ausgangsgrößen*, siehe Abbildung 1.1.

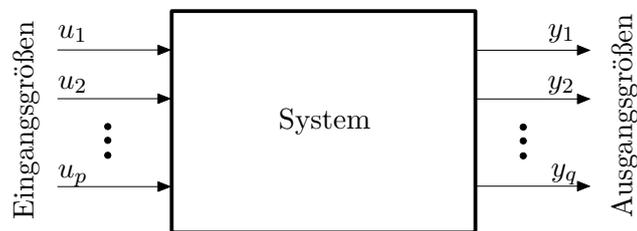


Abbildung 1.1: Zum Systembegriff.

Die Eingangsgrößen u_1, u_2, \dots, u_p sind dabei Größen, die von der Systemumgebung auf das System einwirken und nicht vom Verhalten des Systems selbst beeinflusst werden. Man unterscheidet dabei zwischen Eingangsgrößen, mit denen man das System gezielt (regelungstechnisch) beeinflussen kann (*Stellgrößen*) und Eingangsgrößen, die nicht unserer Kontrolle unterliegen (*Störgrößen*). Die Ausgangsgrößen y_1, y_2, \dots, y_q sind Größen, die vom System generiert werden und ihrerseits die Systemumgebung beeinflussen. Ausgangsgrößen, die messtechnisch erfassbar sind, nennt man auch *Messgrößen*.

Ein *Modell* ist im Wesentlichen ein *beschränktes Abbild der Wirklichkeit*, in dem die für die jeweilige Aufgabe wesentlichen Eigenschaften des Systems berücksichtigt werden. Bei einem *mathematischen Modell* wird das Verhalten des realen Systems in abstrahierter Form beispielsweise durch algebraische Gleichungen, gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen abgebildet. An dieser Stelle ist es wichtig zu betonen, dass *kein mathematisches Modell ein System exakt abbildet*. Vielmehr stellt ein mathematisches Modell immer einen *Kompromiss* zwischen *Modellkomplexität* und *Modellgenauigkeit* bezüglich der gewünschten Eigenschaften dar. Um ein für die jeweilige Fragestellung geeignetes mathematisches Modell zu entwickeln, müssen teilweise in wiederkehrenden Schleifen verschiedene Schritte der Dekomposition (Zerlegung des Systems in einzelne Subsysteme und Komponenten), der Reduktion und Abstraktion (Weglassen von für die Aufgabenstellung unwesentlichen Details und Überführen auf ein einfacheres Ersatzsystem) und der Aggregation (Zusammenfassung von Komponenten und Subsystemen zu einem Ganzen) durchgeführt werden. Diese Schritte lassen sich nur beschränkt systematisieren, weshalb die Erstellung eines geeigneten mathematischen Modells zumindest zum Teil eine

Ingenieurskunst ist und immer bleiben wird. Das mathematische Modell bildet nicht nur die Grundlage für die *Systemanalyse*, bei der das statische und dynamische Verhalten des Systems in Abhängigkeit der Eingangsgrößen und Systemparameter untersucht wird, sondern auch für die *Systemsynthese*, also den Entwurf des Gesamtsystems. Zum letzteren Punkt zählt insbesondere auch die Auslegung von geeigneten Sensoren und Aktoren bis hin zum Steuerungs- und Regelungsentwurf, der ausführlich in der Vorlesung Automatisierung im kommenden Semester behandelt wird.

Grundsätzlich unterscheidet man zwischen der theoretischen und experimentellen Modellbildung. Bei der *experimentellen Modellbildung* wird das mathematische Modell auf Basis der gemessenen Ein- und Ausgangsgrößen so erstellt, dass das Eingangs-Ausgangsverhalten möglichst gut wiedergegeben wird. Diese Art der Modellbildung wird auch als *Systemidentifikation* bezeichnet und man spricht bei Modellen, die ausschließlich auf experimenteller Information beruhen, von *Black-Box Modellen*. Da Black-Box Modelle sich lediglich auf experimentelle Ergebnisse stützen und kein (oder sehr wenig) a priori Wissen des Systems nutzen, hat das so gewonnene Modell nur in dem durch die Identifikation abgedeckten Datensatz Gültigkeit. Der Hauptvorteil besteht wohl darin, dass man relativ wenig Wissen über das System benötigt. Im Gegensatz dazu werden die mathematischen Modelle bei der *theoretischen Modellbildung* auf Basis physikalischer Grundgesetze hergeleitet. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *White-Box Modellen* oder *first-principles models*. Zwischen den Black-Box und White-Box Modellen gibt es je nach Verhältnis von experimenteller zu physikalisch basierter Modellinformation verschiedene Grade von *Grey-Box Modellen*. An dieser Stelle sei erwähnt, dass es im Allgemeinen nicht möglich ist, ein mathematisches Modell ausschließlich über physikalische Gesetze herzuleiten und vollständig zu parametrieren, denn einige sogenannte konstitutive Parameter (Reibungsparameter, Streuinduktivitäten, Leckölstromkoeffizienten) müssen aus Experimenten ermittelt werden, auch wenn der Modellansatz physikalisch motiviert ist. Die Vorteile dieser letzteren Modelle (White-Box Modelle mit wenigen experimentell ermittelten Konstitutivparametern) besteht in der sehr guten Extrapolierbarkeit des Modells über die durch Experimente gewonnenen Daten hinaus, einer hohen Zuverlässigkeit, einer guten Einsicht in das Modell, sowie in der Tatsache, dass das Modell skalierbar und auch für noch nicht realisierte Systeme (Prototyping) anwendbar ist. Als Nachteil kann angegeben werden, dass diese Art der Modellbildung im Allgemeinen relativ zeitintensiv ist und man das System genau verstehen muss. Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir uns ausschließlich auf letztgenannte mathematische Modelle konzentrieren.

Im Folgenden betrachte man die zwei einfachen elektrischen Systeme von Abbildung 1.2, nämlich einen Widerstand und einen idealen Kondensator, mit der Eingangsgröße $i(t)$ (Strom), der Ausgangsgröße $u(t)$ (Spannung) und der Zeit t . Beim Widerstand R ist die Ausgangsgröße zu jedem Zeitpunkt t eindeutig durch die Eingangsgröße zum Zeitpunkt t bestimmt, es gilt nämlich

$$u(t) = Ri(t) . \quad (1.1)$$

Systeme dieser Art, deren Ausgangsgrößen lediglich vom Augenblickswert der Eingangsgrößen abhängen, werden als *statische Systeme* bezeichnet. Im Gegensatz dazu muss zur Berechnung der Spannung $u(t)$ des Kondensators C zum Zeitpunkt t der Eingangsstrom

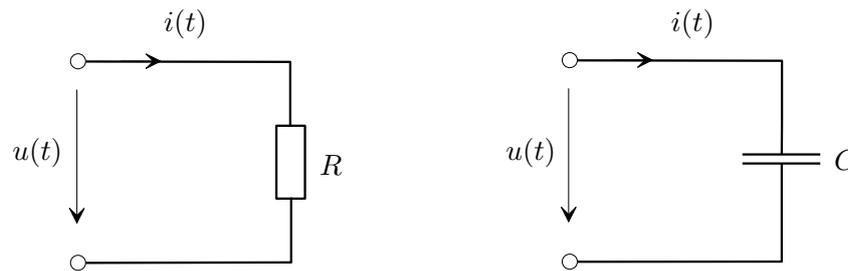


Abbildung 1.2: Zu statischen und dynamischen Systemen.

$i(\tau)$ für die gesamte Vergangenheit $\tau \leq t$ bekannt sein, da gilt

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau}_{u(t_0)=u_0} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau . \quad (1.2)$$

Kennt man die Eingangsgröße $i(\tau)$ lediglich für das Zeitintervall $t_0 \leq \tau \leq t$, dann muss zusätzlich die Spannung des Kondensators zum Zeitpunkt t_0 als Anfangsbedingung $u(t_0) = u_0$ bekannt sein. Wie man aus (1.2) erkennt, beinhaltet die Anfangsbedingung die gesamte Information über die Vergangenheit $\tau < t_0$. Man sagt auch, $u(t_0)$ beschreibt den internen *Zustand* des Systems Kondensator zum Zeitpunkt t_0 . Systeme dieser Art, deren Ausgangsgrößen nicht nur vom Augenblickswert der Eingangsgrößen sondern auch von deren Vergangenheit abhängen, werden als *dynamische Systeme* bezeichnet.

Wenn für ein System nach Abbildung 1.1, wie im Falle des Widerstandes und des Kondensators, die Werte der Ausgangsgrößen y_1, y_2, \dots, y_q zum Zeitpunkt t ausschließlich vom Verlauf der Eingangsgrößen $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_p(\tau)$ für $\tau \leq t$ abhängen, dann nennt man das System *kausal*. Da alle technisch realisierbaren Systeme kausal sind, werden wir uns im Folgenden auf diesen Fall beschränken.

Die bisherigen Überlegungen erlauben uns nun die allgemeine Definition der Zustandsgrößen eines dynamischen Systems anzugeben:

Definition 1.1 (Zustand). Existieren für ein dynamisches System Größen x_1, \dots, x_n mit der Eigenschaft, dass die Ausgangsgrößen y_1, y_2, \dots, y_q zu einem beliebigen Zeitpunkt t eindeutig durch den Verlauf der Eingangsgrößen $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_p(\tau)$ auf dem Intervall $t_0 \leq \tau \leq t$ und den Werten von $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ für ein beliebiges t_0 festgelegt sind, dann heißen die Größen x_1, \dots, x_n *Zustandsgrößen* des Systems.

Aufgabe 1.1. Welche Größe wählen Sie als Zustandsgröße bei einer Induktivität? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 1.1. Strom durch die Induktivität.

Dynamische Systeme, die sich durch eine endliche Anzahl n von Zustandsgrößen charakterisieren lassen, werden auch als *Systeme mit finitem Zustand* der *Ordnung n* bezeichnet. Diese Systeme mit finitem Zustand, oft auch *konzentriert-parametrische Systeme* genannt,

werden durch mathematische Modelle in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen beschrieben. Im Rahmen dieser Vorlesung schränken wir uns auf jene Systemklasse mit finitem Zustand ein, die eine Beschreibung durch ein *explizites mathematisches Modell* folgender Form erlaubt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t), & x_1(t_0) &= x_{1,0} \\ \frac{d}{dt}x_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t), & x_2(t_0) &= x_{2,0} \\ &\vdots & & \\ \frac{d}{dt}x_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t), & x_n(t_0) &= x_{n,0} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Zustandsdifferen-} \\ \text{tialgleichungen} \\ \text{mit Anfangs-} \\ \text{bedingungen} \end{array} \quad (1.3a)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \\ y_2 &= h_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \\ &\vdots \\ y_q &= h_q(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \end{aligned} \right\} \text{Ausgangsgleichungen} \quad (1.3b)$$

Fasst man die Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsgrößen zu Spaltenvektoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_p \end{bmatrix}^T \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_q \end{bmatrix}^T \quad (1.4b)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \quad (1.4c)$$

zusammen und schreibt zur Vereinfachung der Notation an Stelle von $\frac{d}{dt}$ einen Punkt über die abzuleitende Größe, dann lässt sich (1.3) in kompakter Vektorschreibweise in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.5b)$$

angeben. Die Größen \mathbf{u} , \mathbf{y} und \mathbf{x} werden einfach als *Eingang*, *Ausgang* und *Zustand* des dynamischen mathematischen Modells bezeichnet.

Wird der Zustand \mathbf{x} als Element eines n -dimensionalen Vektorraumes betrachtet, dann nennt man diesen Vektorraum auch *Zustandsraum*. Der Zustand eines Systems zum Zeitpunkt t kann dann als Punkt im n -dimensionalen Zustandsraum dargestellt werden. Die Kurve all dieser Punkte im Zustandsraum für veränderliche Zeit t in einem Zeitintervall wird auch als *Trajektorie* bezeichnet, siehe Abbildung 1.3 zur Veranschaulichung einer Trajektorie im 3-dimensionalen Zustandsraum.

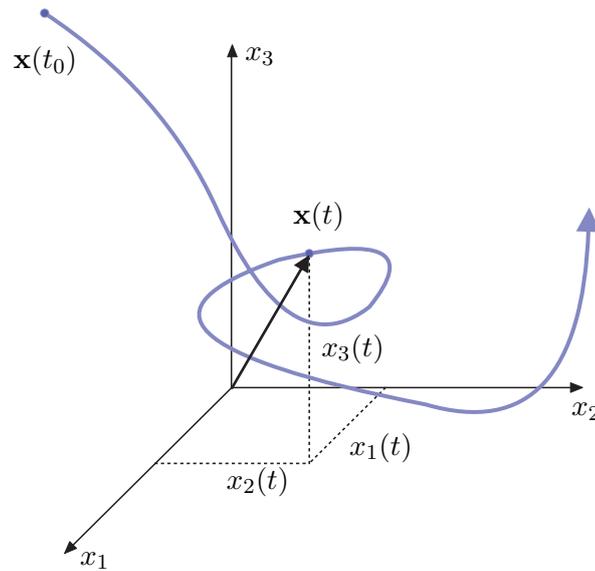


Abbildung 1.3: Zum Begriff der Trajektorie.

Vollständigkeitshalber sei noch erwähnt, dass *Systeme mit infinit-dimensionalem Zustand*, auch *verteilt-parametrische Systeme* genannt, durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Beispiele dazu wären Balken, Platten, Membranen und elektromagnetische Felder.

1.1 Literatur

- [1.1] R. Cannon, *Dynamics of Physical Systems*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [1.2] F. E. Cellier, *Continuous System Modeling*. New York: Springer, 1991.
- [1.3] S. W. Director und R. A. Rohrer, *Introduction to Systems Theory*. New York: McGraw-Hill, 1972.
- [1.4] O. Föllinger und D. Franke, *Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme*. München, Wien: Oldenbourg, 1982.
- [1.5] R. Isermann, *Mechatronische Systeme: Grundlagen*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [1.6] D. Karnopp, D. Margolis und R. Rosenberg, *System Dynamics*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- [1.7] G. Ludyk, *Theoretische Regelungstechnik 1*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995.
- [1.8] D. G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems*. New York: John Wiley & Sons, 1979.
- [1.9] L. Padulo und M. A. Arbib, *System Theory*. Philadelphia: W.B. Saunders Company, 1974.
- [1.10] J. L. Shearer und B. T. Kulakowski, *Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems*. New York: Macmillan Publishing Company, 1990.

2 Mechanische Systeme

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen zur Modellierung einfacher mechanischer Systeme diskutiert. Im Speziellen liegt der Fokus auf der Beschreibung der Bewegung von Punktmassen sowie einfacher Starrkörpersysteme in der Ebene.

2.1 Punkt-Kinematik

Die Kinematik beschreibt die Bewegung von Körpern oder einzelnen materiellen Punkten im Raum bezüglich eines Bezugssystems. Betrachtet man als Bezugssystem das raumfeste kartesische Koordinatensystem $(0xyz)$ mit dem Ursprung 0 und den orthonormalen Basisvektoren \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z , d. h.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_z^T \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_z^T \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z^T \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

dann kann der Ortsvektor vom Ursprung 0 zu einem materiellen Punkt P in der Form

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z \quad (2.2)$$

mit den in der Zeit t parametrisierten Komponenten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ beschrieben werden, siehe Abbildung 2.1. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ des materiellen

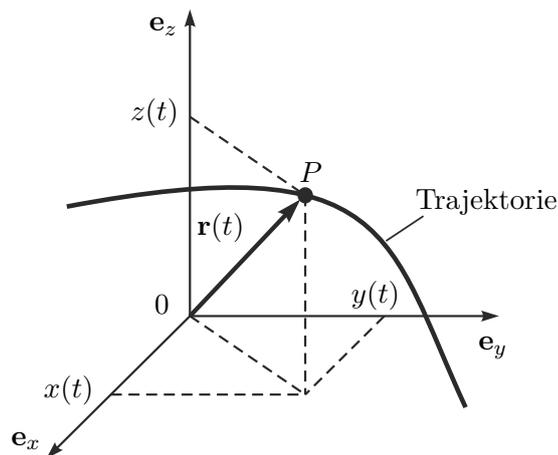


Abbildung 2.1: Trajektorie im kartesischen Koordinatensystem.

Punktes P erhält man durch zeitliche Differentiation in der Form

$$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z \quad (2.3)$$

bzw.

$$\mathbf{a}(t) = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z = \ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y + \ddot{z} \mathbf{e}_z, \quad (2.4)$$

wobei v_x, v_y, v_z und a_x, a_y, a_z die jeweiligen Komponenten bezüglich der Basisvektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ und \mathbf{e}_z beschreiben. Es sei angemerkt, dass in weiterer Folge die totale zeitliche Ableitung einer Funktion $x(t)$ mit $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ bzw. $\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$ bezeichnet wird. Im einfachsten Fall wenn das Koordinatensystem immer so gewählt werden kann, dass der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ für alle Zeiten t mit einer Koordinatenachse zusammenfällt, spricht man von einer *geradlinigen Bewegung*.

Beispiel 2.1. Eine Masse wird von einem Motor geradlinig gemäß dem in Abbildung 2.2 dargestellten Beschleunigungsverlauf beschleunigt.

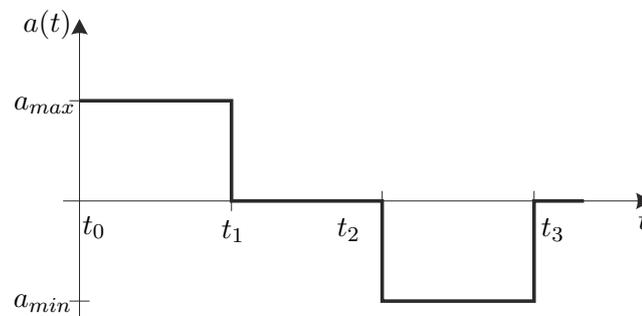


Abbildung 2.2: Zeitverlauf der Beschleunigung $a(t)$.

Wie groß muss die Zeit t_3 und die minimale Beschleunigung a_{min} gewählt werden, dass zum Zeitpunkt $t = t_3$ die Geschwindigkeit Null ist und die Position einen vorgegebenen Wert x_{soll} annimmt? Es wird dabei vorausgesetzt, dass zum Zeitpunkt $t = t_0$ gilt $v(t_0) = v_0 = 0$, $x(t_0) = x_0 = 0$. Für das Zeitintervall $t_0 \leq t \leq t_1$ errechnet sich der Geschwindigkeits- und Positionsverlauf zu

$$v_1(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a_{max} d\tau = \underbrace{v_0}_{=0} + a_{max}(t - t_0) \quad (2.5a)$$

$$x_1(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t a_{max}(\tau - t_0) d\tau = \underbrace{x_0}_{=0} + \frac{1}{2} a_{max}(t - t_0)^2, \quad (2.5b)$$

für $t_1 \leq t \leq t_2$ folgt

$$v_2(t) = v_1(t_1) + \int_{t_1}^t 0 d\tau = a_{max}(t_1 - t_0) \quad (2.6a)$$

$$x_2(t) = x_1(t_1) + \int_{t_1}^t a_{max}(t_1 - t_0) d\tau = \frac{1}{2} a_{max}(t_1 - t_0)^2 + a_{max}(t_1 - t_0)(t - t_1) \quad (2.6b)$$

und für $t_2 \leq t \leq t_3$ ergibt sich

$$v_3(t) = v_2(t_2) + \int_{t_2}^t a_{min} d\tau = a_{max}(t_1 - t_0) + a_{min}(t - t_2) \quad (2.7a)$$

$$x_3(t) = x_2(t_2) + \int_{t_2}^t v_3(\tau) d\tau = \frac{1}{2}a_{max}(t_0^2 - t_1^2) + a_{max}(t_1 - t_0)t + \frac{1}{2}a_{min}(t - t_2)^2. \quad (2.7b)$$

Mit der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = t_3$

$$v_3(t_3) = a_{max}(t_1 - t_0) + a_{min}(t_3 - t_2) \quad (2.8)$$

errechnet sich die gewünschte Zeit t_3 aus der Bedingung $v_3(t_3) = 0$ zu

$$t_3 = t_2 - \frac{a_{max}}{a_{min}}(t_1 - t_0) \quad (2.9)$$

und die gewünschte Position $x_3(t_3) = x_{soll}$ mit

$$x_3(t_3) = \frac{1}{2a_{min}}a_{max}(t_1 - t_0)(a_{min}(2t_2 - t_0 - t_1) + a_{max}(t_0 - t_1)) \quad (2.10)$$

wird durch die Beschleunigung

$$a_{min} = \frac{-a_{max}^2(t_1 - t_0)^2}{a_{max}(t_1 - t_0)(t_1 + t_0 - 2t_2) + 2x_{soll}} \quad (2.11)$$

erreicht. Der Positions- und Geschwindigkeitsverlauf ist in Abbildung 2.3 dargestellt.

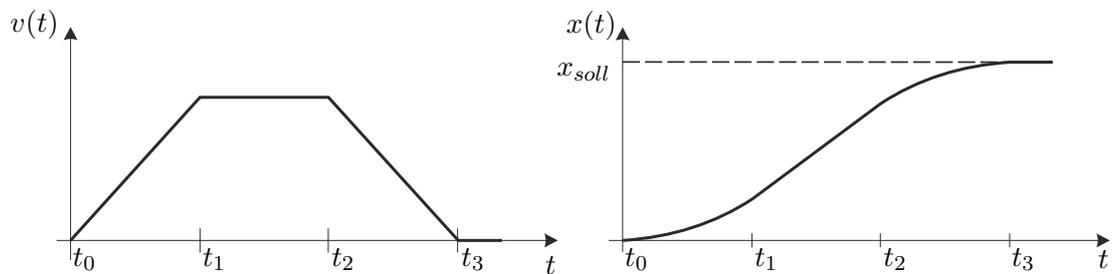


Abbildung 2.3: Zeitverlauf der Geschwindigkeit $v(t)$ und der Position $x(t)$.

Im Weiteren soll die Bewegung eines materiellen Punktes P in der Ebene bezüglich des raumfesten Koordinatensystems $(0xy)$ betrachtet und mit Hilfe von *Polarkoordinaten*

$$x(t) = r(t) \cos(\varphi(t)) \quad \text{und} \quad y(t) = r(t) \sin(\varphi(t)) \quad (2.12)$$

beschrieben werden, siehe Abbildung 2.4. Damit lautet der Ortsvektor vom Ursprung 0 zu einem materiellen Punkt P

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \cos(\varphi(t)) \mathbf{e}_x + r(t) \sin(\varphi(t)) \mathbf{e}_y. \quad (2.13)$$

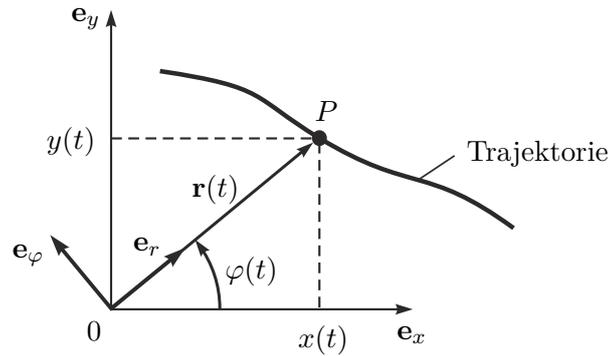


Abbildung 2.4: Trajektorie im Polarkoordinatensystem.

Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ gemäß (2.3) erhält man durch Anwendung der Kettenregel der Differentiation in der Form

$$\mathbf{v}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} \right) \dot{r} + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{r} \right) \dot{\varphi}, \quad (2.14)$$

wobei nun die Basisvektoren der Polarkoordinaten sich zu

$$\tilde{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} = \cos(\varphi) \mathbf{e}_x + \sin(\varphi) \mathbf{e}_y \quad (2.15a)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{r} = -r \sin(\varphi) \mathbf{e}_x + r \cos(\varphi) \mathbf{e}_y \quad (2.15b)$$

ergeben. Die Vektoren $\tilde{\mathbf{e}}_r$ und $\tilde{\mathbf{e}}_\varphi$ bilden genau dann eine zulässige Basis, wenn die Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

regulär ist, also $\det(\mathbf{J}) = r \neq 0$ ist. Dies ist abgesehen vom Punkt $r = 0$ überall der Fall. Normiert man nun die Basisvektoren auf die Länge 1

$$\mathbf{e}_r = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_r}{\|\tilde{\mathbf{e}}_r\|_2} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_\varphi}{\|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\|_2} \quad (2.17)$$

mit

$$\|\tilde{\mathbf{e}}_r\|_2 = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1 \quad \text{und} \quad \|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\|_2 = r, \quad (2.18)$$

dann lässt sich (2.14) in der Form

$$\mathbf{v}(t) = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (2.19)$$

mit den Komponenten $v_r = \dot{r}$ (*radiale Komponente*) und $v_\varphi = r \dot{\varphi}$ (*zirkuläre Komponente*) der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ bezüglich der Basisvektoren \mathbf{e}_r und \mathbf{e}_φ schreiben. In der Zeit dt überstreicht der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ einen Winkel $d\varphi$ und die auf die Zeit bezogene Winkeländerung $\omega = \dot{\varphi}$ wird als *Winkelgeschwindigkeit* bezeichnet. Bei einer reinen Kreisbewegung (siehe Abbildung 2.5) ist die radiale Geschwindigkeitskomponente $v_r = 0$ und für die zirkuläre Geschwindigkeitskomponente gilt $v_\varphi = r\omega$.

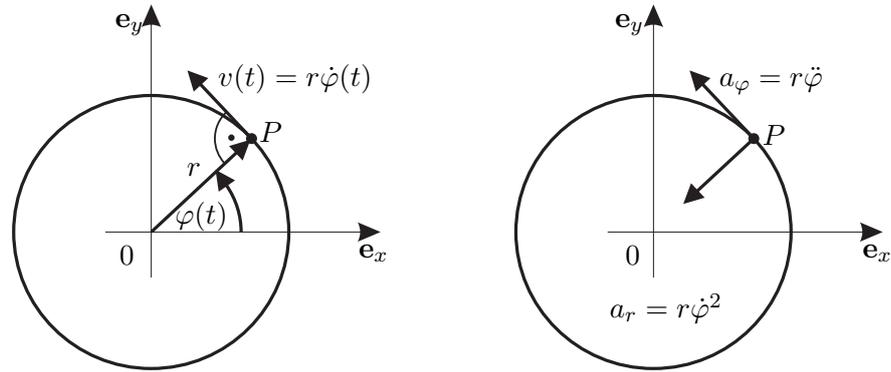


Abbildung 2.5: Kreisbahn im Polarkoordinatensystem.

Aufgabe 2.1. Zeigen Sie, dass sich die Geschwindigkeitskomponenten eines materiellen Punktes P im Raum bezüglich der normierten Basisvektoren \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ und \mathbf{e}_φ in Kugelkoordinaten

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad z = r \cos(\theta) \quad (2.20)$$

zu

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r \sin(\theta)\dot{\varphi} \quad (2.21)$$

errechnen.

Die Komponenten der Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ in Polarkoordinaten bezüglich der Basisvektoren \mathbf{e}_r und \mathbf{e}_φ erhält man durch totale zeitliche Differentiation von $\mathbf{v}(t)$ nach (2.19)

$$\mathbf{a}(t) = a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \dot{v}_r \mathbf{e}_r + v_r \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{v}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_\varphi \dot{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (2.22)$$

wobei darauf geachtet werden muss, dass sich die Basisvektoren (siehe (2.15) und (2.17))

$$\mathbf{e}_r = \cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\varphi)\mathbf{e}_y \quad (2.23a)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\mathbf{e}_x + \cos(\varphi)\mathbf{e}_y \quad (2.23b)$$

ebenfalls zeitlich ändern. Man ist nun bestrebt, $\dot{\mathbf{e}}_r$ und $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$ durch \mathbf{e}_r und \mathbf{e}_φ auszudrücken. Dazu wird (2.23) invertiert

$$\mathbf{e}_x = \cos(\varphi)\mathbf{e}_r - \sin(\varphi)\mathbf{e}_\varphi \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin(\varphi)\mathbf{e}_r + \cos(\varphi)\mathbf{e}_\varphi \quad (2.24b)$$

und in $\dot{\mathbf{e}}_r$ und $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$ substituiert, d. h.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= -\sin(\varphi)\dot{\varphi}\mathbf{e}_x + \cos(\varphi)\dot{\varphi}\mathbf{e}_y \\ &= -\sin(\varphi)\dot{\varphi}(\cos(\varphi)\mathbf{e}_r - \sin(\varphi)\mathbf{e}_\varphi) + \cos(\varphi)\dot{\varphi}(\sin(\varphi)\mathbf{e}_r + \cos(\varphi)\mathbf{e}_\varphi) \\ &= \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (2.25)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\cos(\varphi)\dot{\varphi}\mathbf{e}_x - \sin(\varphi)\dot{\varphi}\mathbf{e}_y \\
 &= -\cos(\varphi)\dot{\varphi}(\cos(\varphi)\mathbf{e}_r - \sin(\varphi)\mathbf{e}_\varphi) - \sin(\varphi)\dot{\varphi}(\sin(\varphi)\mathbf{e}_r + \cos(\varphi)\mathbf{e}_\varphi) \\
 &= -\dot{\varphi}\mathbf{e}_r .
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Setzt man (2.25) und (2.26) in (2.22) ein

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}(t) &= \dot{v}_r\mathbf{e}_r + v_r\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{v}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + v_\varphi\dot{\mathbf{e}}_\varphi \\
 &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + (\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\mathbf{e}_r) \\
 &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi ,
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

dann folgt die *radiale Beschleunigung* zu $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ und die zirkulare Beschleunigung zu $a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$. Bei einer reinen Kreisbewegung vereinfacht sich die Tangentialkomponente zu $a_\varphi = r\ddot{\varphi}$ und die Radialkomponente $a_r = -r\dot{\varphi}^2$ wird auch als *Zentripetalbeschleunigung* bezeichnet, siehe Abbildung 2.5.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass im allgemeinen Fall eines Koordinatenwechsels die zeitlichen Ableitungen der Basisvektoren sehr elegant über die so genannten *Christoffel Symbole* mit Hilfe der Basisvektoren selbst ausgedrückt werden können. Effiziente Möglichkeiten zur Berechnung dieser Christoffel Symbole findet man beispielsweise in [2.1].

Aufgabe 2.2. Zeigen Sie, dass sich die Beschleunigungskomponenten eines materiellen Punktes P im Raum bezüglich der normierten Basisvektoren \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ und \mathbf{e}_φ in Kugelkoordinaten

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad z = r \cos(\theta)$$

zu

$$\begin{aligned}
 a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2 \\
 a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2 \\
 a_\varphi &= (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin(\theta) + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta)
 \end{aligned}$$

errechnen.

Hinweis: Verwenden Sie zur Lösung ein Computeralgebraprogramm!

2.2 Newtonsche Gesetze

2.2.1 Kräftesysteme

Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir nur Einzelkräfte betrachten, die an diskreten Punkten (*Angriffspunkten*) eines *Starrkörpers* wirken. Ein Starrkörper hat die Eigenschaft, dass unter der Wirkung von Kräften der Abstand beliebiger Körperpunkte immer gleich

bleibt. Die Richtung der Kraft wird durch ihre *Wirkungslinie* und durch den Richtungssinn beschrieben. Die SI Einheit der Kraft ist Newton ($N = \text{kgms}^{-2}$).

Bei einem sogenannten *zentralen Kräftesystem* wirken alle Einzelkräfte \mathbf{f}_i , $i = 1, \dots, n$ am gleichen Angriffspunkt und die resultierende Kraft \mathbf{f}_R ergibt sich zu (siehe Abbildung 2.6)

$$\mathbf{f}_R = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i . \quad (2.28)$$

Drückt man nun die Kräfte \mathbf{f}_i mit ihren Komponenten im Koordinatensystem ($0xyz$)

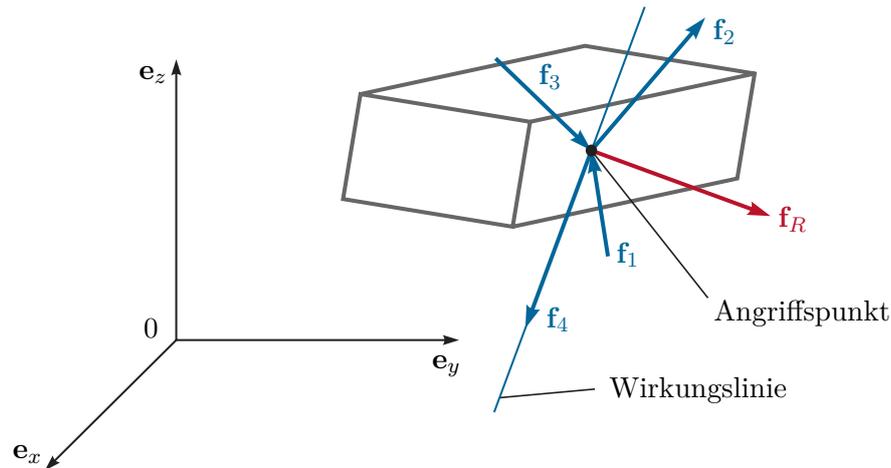


Abbildung 2.6: Zentrales Kräftesystem.

mit den orthonormalen Basisvektoren \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z aus, d. h. $\mathbf{f}_i = f_{i,x}\mathbf{e}_x + f_{i,y}\mathbf{e}_y + f_{i,z}\mathbf{e}_z$, $i = 1, \dots, n$, dann ergibt sich (2.28) zu

$$\mathbf{f}_R = \sum_{i=1}^n (f_{i,x}\mathbf{e}_x + f_{i,y}\mathbf{e}_y + f_{i,z}\mathbf{e}_z) = \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{i,x}\mathbf{e}_x}_{f_{R,x}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{i,y}\mathbf{e}_y}_{f_{R,y}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{i,z}\mathbf{e}_z}_{f_{R,z}} . \quad (2.29)$$

Ein zentrales Kräftesystem ist nun im *Gleichgewicht*, wenn die resultierende Kraft verschwindet

$$\mathbf{f}_R = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad f_{R,x} = 0, f_{R,y} = 0 \text{ und } f_{R,z} = 0. \quad (2.30)$$

Das *dritte Newtonsche Gesetz (Wechselwirkungsgesetz)* besagt, dass zu jeder Kraft immer eine gleich große entgegengesetzt wirkende Gegenkraft existiert (*actio gleich reactio*). Wenn man beispielsweise mit der Hand eine Kraft auf die Tischplatte ausübt, dann wirkt eine gleich große entgegengesetzte Kraft von der Tischplatte auf unsere Hand. Dies kann man dadurch darstellen, dass man an der Kontaktstelle Hand/Tischplatte die beiden Körper auseinanderschneidet und die zugehörigen Kräfte einzeichnet (*Schnittprinzip*), siehe Abbildung 2.7. Ein anderes Beispiel ist in Abbildung 2.8 zu sehen. Nimmt man an, dass das Gewicht des Seils vernachlässigbar ist und die Rolle reibungsfrei gelagert ist, dann wirkt auf die Masse m die Seilkraft f_S und auch der Mensch muss die Kraft f_S aufbringen, um die Last zu halten.

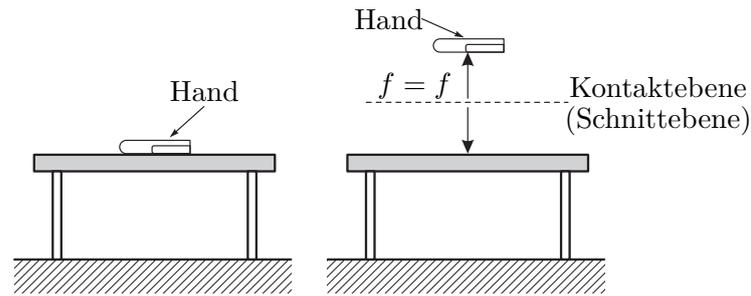


Abbildung 2.7: Kräfte zwischen der Tischplatte und der darauf drückenden Hand.

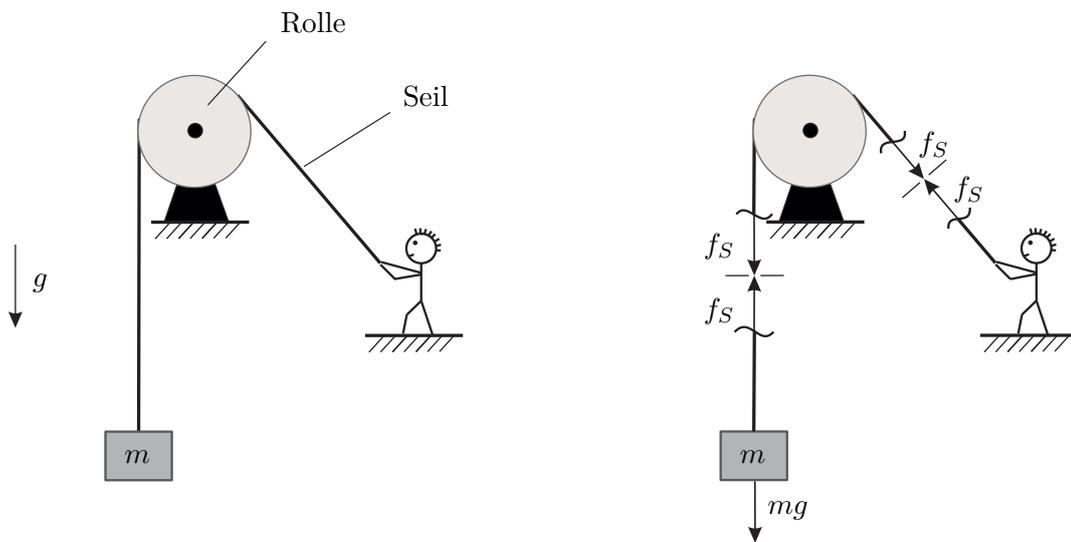


Abbildung 2.8: Kraft in einem Seil.

Beispiel 2.2. Ein Zylinder der Masse m mit dem Radius r wird durch ein im Mittelpunkt befestigtes Seil mit der Länge l auf einer glatten Ebene gehalten, siehe Abbildung 2.9(a). Die Kräfte, die auf den freigeschnittenen Zylinder wirken, sind in Abbildung 2.9(b) dargestellt.

Da das zentrale Kräftesystem im Gleichgewicht ist, muss nach (2.29) gelten

$$\mathbf{e}_x : f_N - f_S \sin(\alpha) = 0 \quad (2.31)$$

$$\mathbf{e}_z : f_S \cos(\alpha) - mg = 0 \quad (2.32)$$

mit der Erdbeschleunigung $g \approx 9,81 \text{ ms}^{-2}$ und dem Winkel $\alpha = \arcsin(r/l)$. Aus (2.32) lassen sich nun die Kräfte f_S und f_N in der Form

$$f_S = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \quad \text{und} \quad f_N = mg \tan(\alpha) \quad (2.33)$$

berechnen.

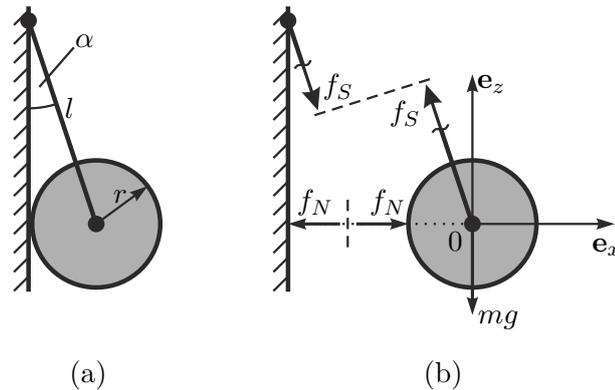


Abbildung 2.9: Zylinder am Seil.

Aufgabe 2.3. Ein vertikaler Mast M wird gemäß Abbildung 2.10 durch Seile abgesehen.

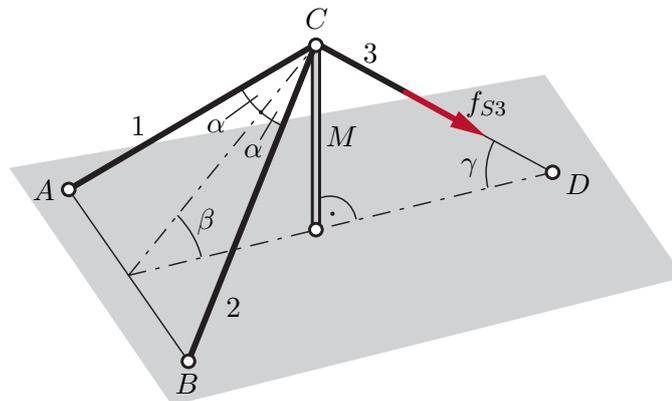


Abbildung 2.10: Vertikaler Mast mit drei Seilen.

Wie groß sind die Kräfte f_{S1} und f_{S2} in den Seilen 1 und 2 und die Kraft f_M im Mast, wenn am Seil 3 die Zugkraft f_{S3} aufgebracht wird?

Lösung von Aufgabe 2.3.

$$f_{S1} = f_{S2} = f_{S3} \frac{\cos(\gamma)}{2 \cos(\alpha) \cos(\beta)} \quad \text{und} \quad f_M = -f_{S3} \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\cos(\beta)}$$

Bei einem *allgemeinen Kräftesystem* wirken die einzelnen Kräfte nicht an einem einzigen Angriffspunkt und können daher auch nicht mehr zu einer einzigen resultierenden Kraft zusammengefasst werden, siehe Abbildung 2.11. In diesem Fall bedingen die Kräfte – falls sie nicht im Gleichgewicht sind – nicht nur eine translatorische Verschiebung des Starrkörpers sondern sie werden diesen auch verdrehen. Im einfachsten Fall betrachte man den Starrkörper von Abbildung 2.12, bei dem die beiden Kräfte $f_{z,1}\mathbf{e}_z$ und $f_{z,2}\mathbf{e}_z$ ein resultierendes *Moment* um die Drehachse \mathbf{e}_y erzeugen und damit den Starrkörper um

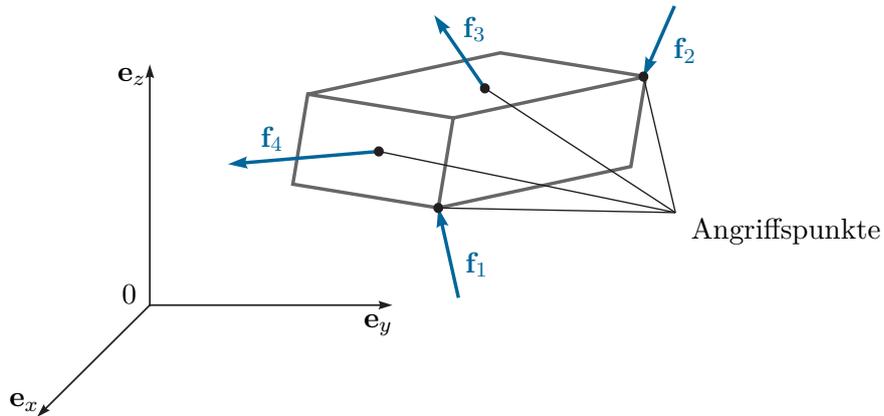


Abbildung 2.11: Allgemeines Kräftesystem.

diese Achse rotieren, falls nicht das *Hebelgesetz* $f_{z,1}l_1 = f_{z,2}l_2$ (Kraft mal Kraftarm ist gleich Last mal Lastarm) erfüllt ist. Das Moment bezüglich der Drehachse wird positiv

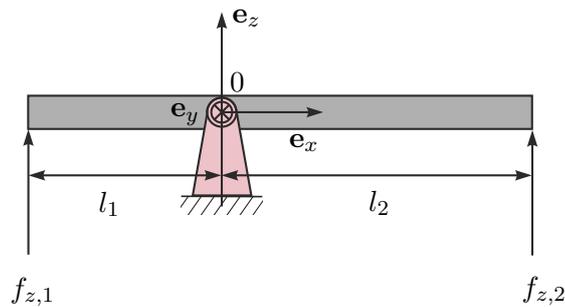


Abbildung 2.12: Drehbar gelagerter Balken.

gezählt, wenn die Wirkung des Moments im Sinne einer Rechtsschraube in Richtung des zur Achse gehörigen Richtungsvektors liegt. Für positive Kraftkomponenten $f_{z,1}$ und $f_{z,2}$ ist für Abbildung 2.12 das Moment $\tau_{y,1}^{(0)} = f_{z,1}l_1$ bezüglich der Drehachse \mathbf{e}_y positiv und das Moment $\tau_{y,2}^{(0)} = -f_{z,2}l_2$ negativ. Die SI Einheit des Moments ist Newton-Meter (Nm = $\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$).

Das Moment

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \tau_x^{(0)}\mathbf{e}_x + \tau_y^{(0)}\mathbf{e}_y + \tau_z^{(0)}\mathbf{e}_z \tag{2.34}$$

der Kraft

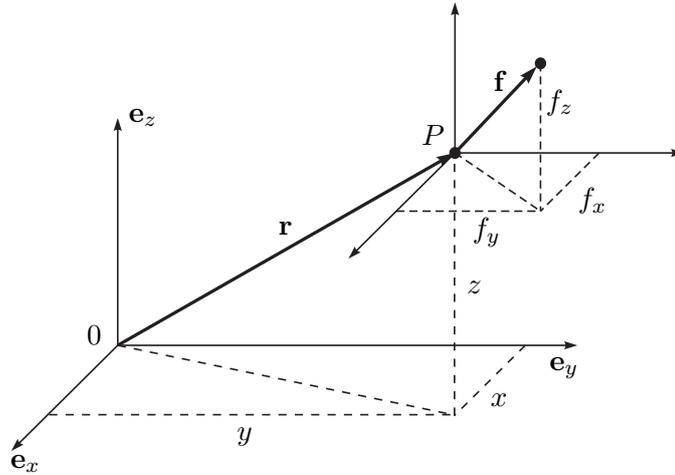
$$\mathbf{f} = f_x\mathbf{e}_x + f_y\mathbf{e}_y + f_z\mathbf{e}_z \tag{2.35}$$

bezüglich des Punktes 0 im kartesischen Koordinatensystem (0xyz) mit dem Ortsvektor vom Punkt 0 zum Kraftangriffspunkt P , siehe Abbildung 2.13,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \tag{2.36}$$

lautet

$$\tau_x^{(0)} = (yf_z - zf_y), \quad \tau_y^{(0)} = (zf_x - xf_z), \quad \tau_z^{(0)} = (xf_y - yf_x). \tag{2.37}$$

Abbildung 2.13: Zum Moment der Kraft \mathbf{f} bezüglich des Punktes 0.

Man erkennt damit unmittelbar, dass das Moment in der Form

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yf_z - zf_y \\ zf_x - xf_z \\ xf_y - yf_x \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

geschrieben werden kann¹. Wirken nun auf einen Starrkörper mehrere Momente $\boldsymbol{\tau}_i^{(A)}$, $i = 1, \dots, n$ bezüglich des selben Punktes A , dann errechnet sich das resultierende Moment $\boldsymbol{\tau}_R^{(A)}$ zu

$$\boldsymbol{\tau}_R^{(A)} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\tau}_i^{(A)} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \tau_{i,x}^{(A)}}_{\boldsymbol{\tau}_{R,x}^{(A)}} \mathbf{e}_x + \underbrace{\sum_{i=1}^n \tau_{i,y}^{(A)}}_{\boldsymbol{\tau}_{R,y}^{(A)}} \mathbf{e}_y + \underbrace{\sum_{i=1}^n \tau_{i,z}^{(A)}}_{\boldsymbol{\tau}_{R,z}^{(A)}} \mathbf{e}_z. \quad (2.39)$$

Ein allgemeines Kräftesystem gemäß Abbildung 2.11 lässt sich stets bezüglich eines *beliebig gewählten* Bezugspunktes A durch eine resultierende Kraft \mathbf{f}_R am Angriffspunkt A und ein resultierendes Moment $\boldsymbol{\tau}_R^{(A)}$ bezüglich dieses Punktes A reduzieren. Ein allgemeines Kräftesystem ist nun im *Gleichgewicht*, wenn sowohl die resultierende Kraft \mathbf{f}_R als auch das resultierende Moment $\boldsymbol{\tau}_R^{(A)}$ verschwinden, d. h.

$$\text{Kräftebilanz: } \mathbf{f}_R = \mathbf{0} \quad \text{bzw. } f_{R,x} = 0, f_{R,y} = 0 \text{ und } f_{R,z} = 0 \quad (2.40)$$

$$\text{Momentenbilanz: } \boldsymbol{\tau}_R^{(A)} = \mathbf{0} \quad \text{bzw. } \tau_{R,x}^{(A)} = 0, \tau_{R,y}^{(A)} = 0 \text{ und } \tau_{R,z}^{(A)} = 0. \quad (2.41)$$

¹Zur vereinfachten und kompakteren Schreibweise werden hier und im Folgenden häufig die Komponenten der vektoriellen Größen einfach in einem Vektor zusammengefasst, d. h. mit $\mathbf{f}^T = [f_x, f_y, f_z]$ bzw. $\mathbf{r}^T = [x, y, z]$ ist gemeint $\mathbf{f} = f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z$ bzw. $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$.

Beispiel 2.3. Man betrachte den Starrkörper von Abbildung 2.14 mit den Kräften

$$\mathbf{f}_A = \begin{bmatrix} f_{A,x} \\ f_{A,y} \\ f_{A,z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} f_{B,x} \\ f_{B,y} \\ f_{B,z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_C = \begin{bmatrix} f_{C,x} \\ f_{C,y} \\ f_{C,z} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

an den Angriffspunkten A , B und C sowie den Bezugspunkt D mit den zugehörigen Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_{0A} = \begin{bmatrix} a_x/2 \\ 0 \\ a_z/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{0B} = \begin{bmatrix} a_x/2 \\ a_y/2 \\ a_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{0C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{0D} = \begin{bmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

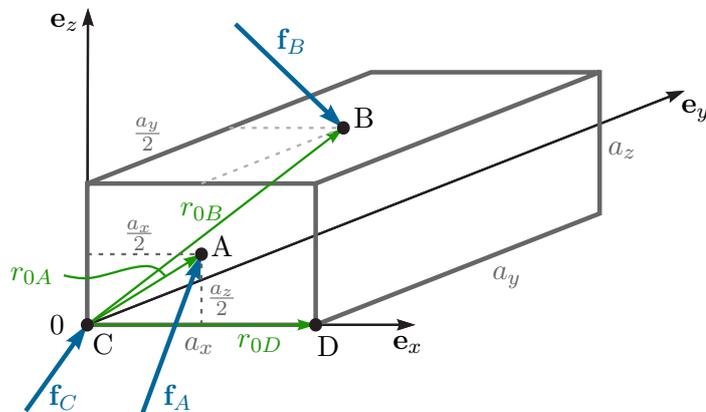


Abbildung 2.14: Zur Reduktion eines allgemeinen Kräftesystems.

Für den Bezugspunkt D folgen die Momente zu

$$\boldsymbol{\tau}_A^{(D)} = \underbrace{(\mathbf{r}_{0A} - \mathbf{r}_{0D})}_{\mathbf{r}_{DA}} \times \mathbf{f}_A = \begin{bmatrix} -a_x/2 \\ 0 \\ a_z/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{A,x} \\ f_{A,y} \\ f_{A,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{A,y}a_z/2 \\ f_{A,z}a_x/2 + f_{A,x}a_z/2 \\ -f_{A,y}a_x/2 \end{bmatrix} \quad (2.44a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_B^{(D)} = \underbrace{(\mathbf{r}_{0B} - \mathbf{r}_{0D})}_{\mathbf{r}_{DB}} \times \mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} -a_x/2 \\ a_y/2 \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{B,x} \\ f_{B,y} \\ f_{B,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{B,z}a_y/2 - f_{B,y}a_z \\ f_{B,z}a_x/2 + f_{B,x}a_z \\ -f_{B,y}a_x/2 - f_{B,x}a_y/2 \end{bmatrix} \quad (2.44b)$$

$$\boldsymbol{\tau}_C^{(D)} = \underbrace{(\mathbf{r}_{0C} - \mathbf{r}_{0D})}_{\mathbf{r}_{DC}} \times \mathbf{f}_C = \begin{bmatrix} -a_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{C,x} \\ f_{C,y} \\ f_{C,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_x f_{C,z} \\ -a_x f_{C,y} \end{bmatrix} \quad (2.44c)$$

und das allgemeine Kräftesystem \mathbf{f}_A , \mathbf{f}_B und \mathbf{f}_C kann durch die resultierende Kraft $\mathbf{f}_R = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B + \mathbf{f}_C$ und durch das resultierende Moment $\boldsymbol{\tau}_R^{(D)} = \boldsymbol{\tau}_A^{(D)} + \boldsymbol{\tau}_B^{(D)} + \boldsymbol{\tau}_C^{(D)}$ ersetzt

werden. Damit ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen aus der Kräftebilanz ($\mathbf{f}_R = \mathbf{0}$)

$$\mathbf{e}_x : f_{A,x} + f_{B,x} + f_{C,x} = 0 \quad (2.45a)$$

$$\mathbf{e}_y : f_{A,y} + f_{B,y} + f_{C,y} = 0 \quad (2.45b)$$

$$\mathbf{e}_z : f_{A,z} + f_{B,z} + f_{C,z} = 0 \quad (2.45c)$$

und der Momentenbilanz ($\tau_R^{(D)} = \mathbf{0}$)

$$\mathbf{e}_x : -f_{A,y}a_z/2 + f_{B,z}a_y/2 - f_{B,y}a_z = 0 \quad (2.46a)$$

$$\mathbf{e}_y : f_{A,z}a_x/2 + f_{A,x}a_z/2 + f_{B,z}a_x/2 + f_{B,x}a_z + f_{C,z}a_x = 0 \quad (2.46b)$$

$$\mathbf{e}_z : -f_{A,y}a_x/2 - f_{B,y}a_x/2 - f_{B,x}a_y/2 - f_{C,y}a_x = 0 . \quad (2.46c)$$

Aufgabe 2.4. Geben Sie die Momentenbilanz für das Beispiel von Abbildung 2.14 um den Bezugspunkt C an.

Lösung von Aufgabe 2.4.

$$\tau_A^{(C)} = \begin{bmatrix} -f_{A,y}a_z/2 \\ -f_{A,z}a_x/2 + f_{A,x}a_z/2 \\ f_{A,y}a_x/2 \end{bmatrix}, \quad \tau_B^{(C)} = \begin{bmatrix} f_{B,z}a_y/2 - f_{B,y}a_z \\ -f_{B,z}a_x/2 + f_{B,x}a_z \\ f_{B,y}a_x/2 - f_{B,x}a_y/2 \end{bmatrix}, \quad \tau_C^{(C)} = \mathbf{0}$$

Beispiel 2.4. Der Mechanismus gemäß Abbildung 2.15(a) ist im Punkt A drehbar gelagert und wird an den Punkten B und C über ein Seil gehalten. Es wird angenommen, dass die Seilrollen reibungsfrei gelagert sind und die Seilmasse sowie die Dicke der einzelnen Balken vernachlässigt werden können. Schneidet man den Mechanismus frei, so erhält man die in Abbildung 2.15(b) gezeigten Kräfte.

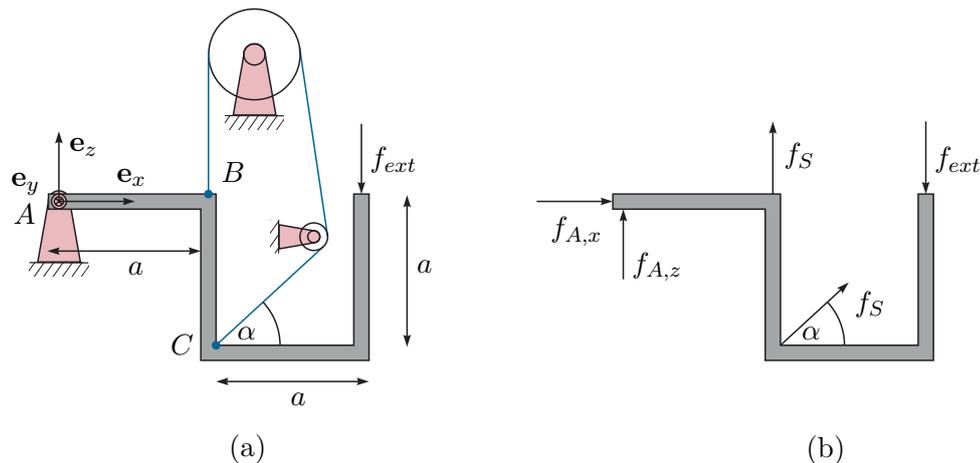


Abbildung 2.15: Einfacher Mechanismus.

Im Gleichgewicht müssen nun die Kräftebilanz

$$\mathbf{e}_x : f_{A,x} + f_S \cos(\alpha) = 0 \quad (2.47a)$$

$$\mathbf{e}_z : f_{A,z} + f_S + f_S \sin(\alpha) - f_{ext} = 0 \quad (2.47b)$$

und die Momentenbilanz (gewählter Bezugspunkt A)

$$\mathbf{e}_y : -af_S + 2af_{ext} - af_S(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) = 0 \quad (2.48)$$

erfüllt sein.

2.2.2 Schwerpunkt

Die bisherigen Überlegungen erlauben nun die Definition des sogenannten *Schwerpunktes* eines Starrkörpers. Dazu betrachte man in einem ersten Schritt eine masselose starre Stange, die die Punktmassen $m_i, i = 1, \dots, n$ gemäß Abbildung 2.16 miteinander verbindet. Zuzufolge der Erdbeschleunigung g in negativer \mathbf{e}_z -Richtung wirken auf die Stange die

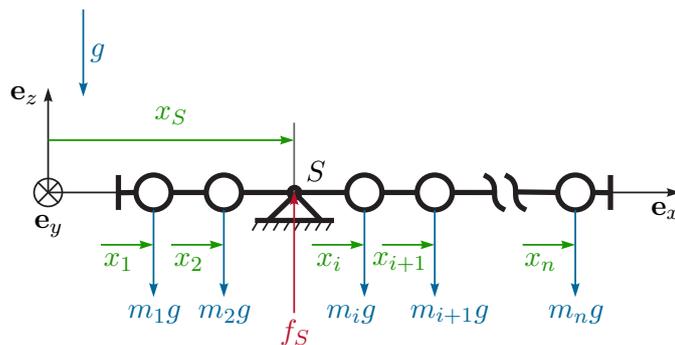


Abbildung 2.16: Zur Definition des Schwerpunktes: Masselose Stange mit Punktmassen.

Gravitationskräfte $\mathbf{f}_i = -m_i g \mathbf{e}_z, i = 1, \dots, n$. Man weiß nun, dass die Kräfte $\mathbf{f}_i, i = 1, \dots, n$ bezüglich eines *beliebig gewählten* Bezugspunktes A durch eine resultierende Kraft \mathbf{f}_R am Angriffspunkt A und ein resultierendes Moment $\tau_R^{(A)}$ bezüglich dieses Punktes A ersetzt werden können. Der Schwerpunkt beschreibt nun jenen Angriffspunkt S , bei dem das resultierende Moment $\tau_R^{(S)}$ verschwindet und damit die Stange allein durch Aufhängen im Punkt S mit der Haltekraft f_S im Gleichgewicht gehalten werden kann. Aus der Momentenbilanz

$$\mathbf{e}_y : \sum_{i=1}^n m_i g x_i - f_S x_S = 0 \quad (2.49)$$

und der Kräftebilanz

$$\mathbf{e}_z : -\sum_{i=1}^n m_i g + f_S = 0 \quad (2.50)$$

lässt sich x_S in der Form

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.51)$$

berechnen.

Aufgabe 2.5. Zeigen Sie, dass sich für ein allgemeines System, bestehend aus n starr gekoppelten Massepunkten mit den Massen m_i und den Ortsvektoren \mathbf{r}_i vom Ursprung 0 des Koordinatensystems ($0xyz$) zu den Massepunkten, der Ortsvektor \mathbf{r}_S zum Schwerpunkt wie folgt

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.52)$$

errechnet.

Dies lässt sich nun direkt auf einen allgemeinen Starrkörper übertragen. Dazu nehme man an, dass der Starrkörper das Volumen \mathcal{V} und die (ortsabhängige) Dichte $\rho(x, y, z)$ besitze, weshalb sich die Masse m des Starrkörpers zu

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho(x, y, z) d\mathcal{V} \quad (2.53)$$

ergibt. Der Schwerpunkt S mit dem Ortsvektor \mathbf{r}_S gemessen im Koordinatensystem ($0xyz$) ist nun jener Punkt, an dem der Körper aufgehängt werden müsste (Haltekraft f_S), damit sich der Körper im Gleichgewicht befindet unabhängig von der Richtung der Erdbeschleunigung g . Angenommen, die Erdbeschleunigung wirke in Richtung \mathbf{e}_g , dann wirkt auf das Volumenelement $d\mathcal{V}$ die Gravitationskraft $g\rho(x, y, z) d\mathcal{V}\mathbf{e}_g$ und bezüglich des Koordinatenursprungs 0 das Moment $\mathbf{r} \times g\rho(x, y, z) d\mathcal{V}\mathbf{e}_g = \mathbf{r}g\rho(x, y, z) d\mathcal{V} \times \mathbf{e}_g$, siehe Abbildung 2.17. Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich durch Integration über das

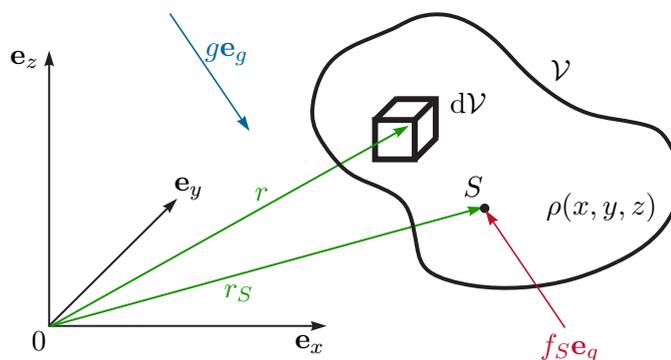


Abbildung 2.17: Zur Definition des Schwerpunktes eines Starrkörpers.

Starrkörpervolumen \mathcal{V} wiederum aus der Kräftebilanz

$$-f_S \mathbf{e}_g + g \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho(x, y, z) d\mathcal{V}}_m \mathbf{e}_g = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

und der Momentenbilanz

$$-(\mathbf{r}_S \times f_S \mathbf{e}_g) + g \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \rho(x, y, z) d\mathcal{V} \times \mathbf{e}_g = \mathbf{0} . \quad (2.55)$$

Setzt man $f_S = mg$ aus (2.54) in (2.55) ein, so folgt

$$\left\{ -mg \mathbf{r}_S + g \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \rho(x, y, z) d\mathcal{V} \right\} \times \mathbf{e}_g = \mathbf{0} \quad (2.56)$$

und da \mathbf{e}_g beliebig ist, muss der Ausdruck in der geschwungenen Klammer identisch verschwinden, d. h.

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \rho(x, y, z) d\mathcal{V}}{m} \quad (2.57)$$

bzw. in Komponentenschreibweise $\mathbf{r}_S = r_{S,x} \mathbf{e}_x + r_{S,y} \mathbf{e}_y + r_{S,z} \mathbf{e}_z$

$$r_{S,x} = \frac{\int_{\mathcal{V}} x \rho(x, y, z) d\mathcal{V}}{m}, \quad r_{S,y} = \frac{\int_{\mathcal{V}} y \rho(x, y, z) d\mathcal{V}}{m}, \quad r_{S,z} = \frac{\int_{\mathcal{V}} z \rho(x, y, z) d\mathcal{V}}{m} . \quad (2.58)$$

Wenn ein Körper sich aus mehreren Teilkörpern $j = 1, \dots, N$ mit den Volumina \mathcal{V}_j und der Dichte $\rho_j(x, y, z)$ zusammensetzt, dann errechnen sich die Ortsvektoren \mathbf{r}_{Sj} zu den Schwerpunkten der Teilkörper gemessen im gleichen Koordinatensystem $(0xyz)$ zu

$$\mathbf{r}_{Sj} = \frac{\int_{\mathcal{V}_j} \mathbf{r} \rho_j(x, y, z) d\mathcal{V}_j}{m_j} \quad \text{mit} \quad m_j = \int_{\mathcal{V}_j} \rho_j(x, y, z) d\mathcal{V}_j . \quad (2.59)$$

Daraus erkennt man unmittelbar, dass sich der Schwerpunkt des gesamten Körpers gemäß (2.57) in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_S &= \frac{\int_{\mathcal{V}_1} \mathbf{r} \rho_1(x, y, z) d\mathcal{V}_1 + \dots + \int_{\mathcal{V}_j} \mathbf{r} \rho_j(x, y, z) d\mathcal{V}_j + \dots + \int_{\mathcal{V}_N} \mathbf{r} \rho_N(x, y, z) d\mathcal{V}_N}{m} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{r}_{Sj} m_j}{\sum_{j=1}^N m_j} \end{aligned} \quad (2.60)$$

berechnen lässt.

Beispiel 2.5. Gesucht ist für den homogenen Starrkörper (Dichte ρ ist konstant) von Abbildung 2.18 der Ortsvektor zum Schwerpunkt.

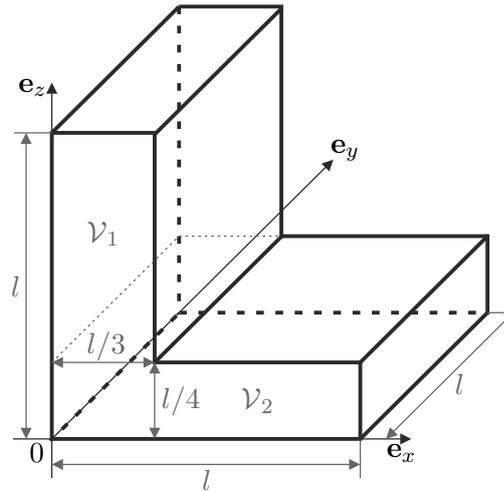


Abbildung 2.18: Zur Schwerpunktberechnung zusammengesetzter Teilkörper.

Dazu werden vorerst gemäß (2.59) die Schwerpunkte getrennt für die beiden Volumina \mathcal{V}_1 und \mathcal{V}_2 berechnet. Für den ersten Teilkörper mit dem Volumen \mathcal{V}_1 folgt damit

$$\begin{aligned} r_{S1,x} &= \frac{\rho}{m_1} \int_{l/4}^l \int_0^l \int_0^{l/3} x \, dx \, dy \, dz = \frac{\rho}{\rho \frac{l}{3} l} \frac{l^4}{24} = \frac{l}{6} \\ r_{S1,y} &= \frac{\rho}{m_1} \int_{l/4}^l \int_0^l \int_0^{l/3} y \, dx \, dy \, dz = \frac{4}{l^3} \frac{l^4}{8} = \frac{l}{2} \\ r_{S1,z} &= \frac{\rho}{m_1} \int_{l/4}^l \int_0^l \int_0^{l/3} z \, dx \, dy \, dz = \frac{4}{l^3} \frac{5l^4}{32} = \frac{5l}{8} \end{aligned}$$

und für den zweiten Teilkörper \mathcal{V}_2 ergibt sich

$$\begin{aligned} r_{S2,x} &= \frac{\rho}{m_2} \int_0^{l/4} \int_0^l \int_0^l x \, dx \, dy \, dz = \frac{\rho}{\rho \frac{l}{4} l^2} \frac{l^4}{8} = \frac{l}{2} \\ r_{S2,y} &= \frac{\rho}{m_2} \int_0^{l/4} \int_0^l \int_0^l y \, dx \, dy \, dz = \frac{4}{l^3} \frac{l^4}{8} = \frac{l}{2} \\ r_{S2,z} &= \frac{\rho}{m_2} \int_0^{l/4} \int_0^l \int_0^l z \, dx \, dy \, dz = \frac{4}{l^3} \frac{l^4}{32} = \frac{l}{8} . \end{aligned}$$

Damit lautet nach (2.60) der Ortsvektor des Schwerpunktes des gesamten Körpers

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \mathbf{r}_{S1} + m_2 \mathbf{r}_{S2}) = \frac{1}{\frac{\rho}{4} l^3 + \frac{\rho}{4} l^3} \left(\frac{\rho}{4} l^3 \begin{bmatrix} \frac{l}{6} \\ \frac{l}{2} \\ \frac{5l}{8} \end{bmatrix} + \frac{\rho}{4} l^3 \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \\ \frac{l}{8} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{l}{3} \\ \frac{l}{2} \\ \frac{3l}{8} \end{bmatrix} . \quad (2.61)$$

Aufgabe 2.6. Berechnen Sie den Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel gemäß Abbildung 2.19.

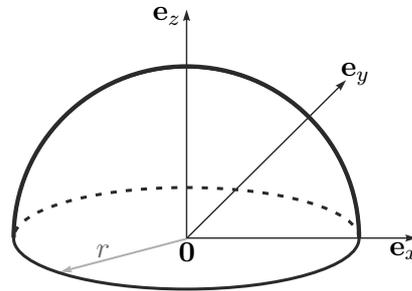


Abbildung 2.19: Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel.

Lösung von Aufgabe 2.6.

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{8}r \end{bmatrix}$$

2.2.3 Impulserhaltung

Das *zweite Newtonsche Gesetz (Impulserhaltungssatz)* formuliert für eine Punktmasse besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses \mathbf{p} gleich der auf die Punktmasse wirkenden Kraft \mathbf{f} ist, d. h.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{f} \quad (2.62)$$

mit der Masse m und der Geschwindigkeit \mathbf{v} . Man beachte, dass die Formulierung (2.62) nur bezüglich eines ruhenden Bezugskoordinatensystems (*Inertialsystem*) gültig ist. Für die in dieser Vorlesung betrachteten Systeme kann die Erde als Inertialsystem angesehen werden.

Beispiel 2.6. Ein Ball der Masse m wird aus der Höhe h gegenüber dem Erdboden mit der Geschwindigkeit $v(0) = v_0 > 0$ abgeschossen, siehe Abbildung 2.20.

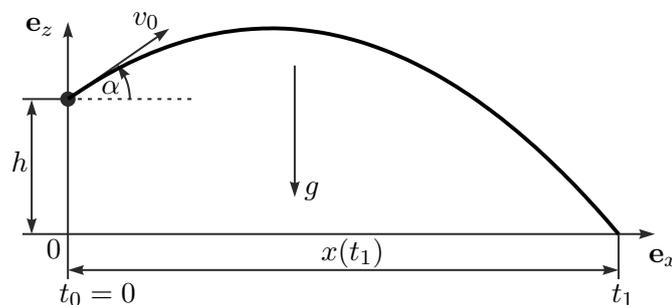


Abbildung 2.20: Wurfpabel.

Im Weiteren soll berechnet werden, unter welchem Winkel α der Ball abgeschossen werden muss, damit die Wurfweite unter der Annahme verschwindender Luftreibung maximiert wird. Da die Masse m konstant ist, lautet der Impulserhaltungssatz im Inertialsystem $(0xyz)$

$$m\ddot{x} = 0 \quad \text{und} \quad m\ddot{z} = -mg \quad (2.63)$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha)$, $z(0) = h$, $\dot{z}(0) = v_0 \sin(\alpha)$. Aus (2.63) erhält man mit $\dot{x}(t) = v_x(t)$ und $\dot{z}(t) = v_z(t)$

$$v_x(t) = \dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha) \quad (2.64a)$$

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \quad (2.64b)$$

$$v_z(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha) \quad (2.64c)$$

$$z(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha)t + h . \quad (2.64d)$$

Die Zeit t kann nun in der zweiten Gleichung eliminiert und in die letzte Gleichung eingesetzt werden, woraus die bekannte Wurfparabel

$$z = -g\frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x + h \quad (2.65)$$

resultiert. Der Zeitpunkt t_1 , zu dem der Ball auf dem Boden trifft, ergibt sich aus der Bedingung $z(t_1) = 0$ zu

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gh}}{g} \quad (2.66)$$

und damit lautet die Wurfweite

$$x(t_1) = v_0 \cos(\alpha) \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gh}}{g} . \quad (2.67)$$

Um die Wurfweite zu maximieren, leitet man $x(t_1)$ nach α ab und setzt den Ausdruck gleich Null. Als Ergebnis erhält man

$$\alpha_{max} = \arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right). \quad (2.68)$$

Man kann sich einfach überzeugen, dass für $h = 0$ der Winkel $\alpha_{max} = 45^\circ$ und die maximale Weite $x_{max}(t_1) = v_0^2/g$ beträgt.

Aufgabe 2.7. Zeigen Sie die Gültigkeit von (2.68).

Abbildung 2.21 zeigt zwei Punktmassen m_i und m_j , die über eine masselose Stange starr miteinander verbunden sind. Wenn man die Stange aufschneidet, so folgt nach dem Schnittprinzip $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$. Der Impulserhaltungssatz für jede Punktmasse getrennt

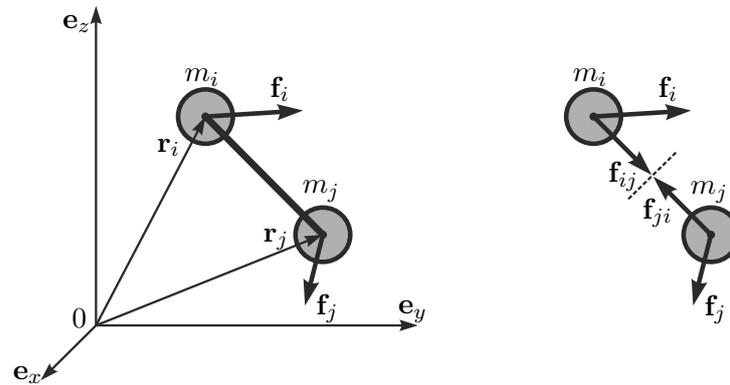


Abbildung 2.21: Zwei Punktmassen verbunden mit einer masselosen Stange.

angeschrieben lautet

$$m_i \frac{d}{dt} \mathbf{v}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{ij} \quad \text{und} \quad m_j \frac{d}{dt} \mathbf{v}_j = \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_{ji} \quad (2.69)$$

bzw. durch Summation erhält man

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_i + m_j \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_j = \underbrace{\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j}_{\mathbf{f}_R} + \underbrace{\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji}}_{=0} . \quad (2.70)$$

Setzt man die Beziehung für den Schwerpunkt gemäß (2.52)

$$\mathbf{r}_S = \frac{m_i \mathbf{r}_i + m_j \mathbf{r}_j}{m_i + m_j}$$

in (2.70) ein, vereinfacht sich (2.70) zu

$$\underbrace{(m_i + m_j)}_m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_S = \underbrace{\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j}_{\mathbf{f}_R} . \quad (2.71)$$

Man kann sich unmittelbar überzeugen, dass dies auch für einen Starrkörper mit dem Volumen \mathcal{V} , der Masse m nach (2.53) und dem Ortsvektor zum Schwerpunkt \mathbf{r}_S gemäß (2.57) gilt, siehe dazu Abbildung 2.17. Schreibt man nämlich den Impulserhaltungssatz (2.62) für ein Masselement $dm = \rho(x, y, z) d\mathcal{V}$ mit dem zugehörigen Ortsvektor \mathbf{r} an und integriert über das Volumen \mathcal{V} , so folgt

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} \rho(x, y, z) d\mathcal{V} = \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \rho(x, y, z) d\mathcal{V}}_{m \mathbf{r}_S} = m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_S = \mathbf{f}_R . \quad (2.72)$$

Gleichung (2.72) ist in der Literatur unter dem Namen *Schwerpunktsatz* bekannt und besagt, dass der Schwerpunkt mit dem Ortsvektor \mathbf{r}_S eines Systems von Körpern sich wie eine Punktmasse verhält, deren Masse m die Summe der Massen aller einzelnen Körper ist, und auf den die vektorielle Summe \mathbf{f}_R aller von außen an den einzelnen Körpern angreifenden Kräfte wirkt.

Beispiel 2.7. Abbildung 2.22 zeigt einen einfachen Flaschenzug mit zwei Massen m_1 und m_2 , die über reibungsfreie masselose Rollen durch ein masseloses Seil miteinander verbunden sind.

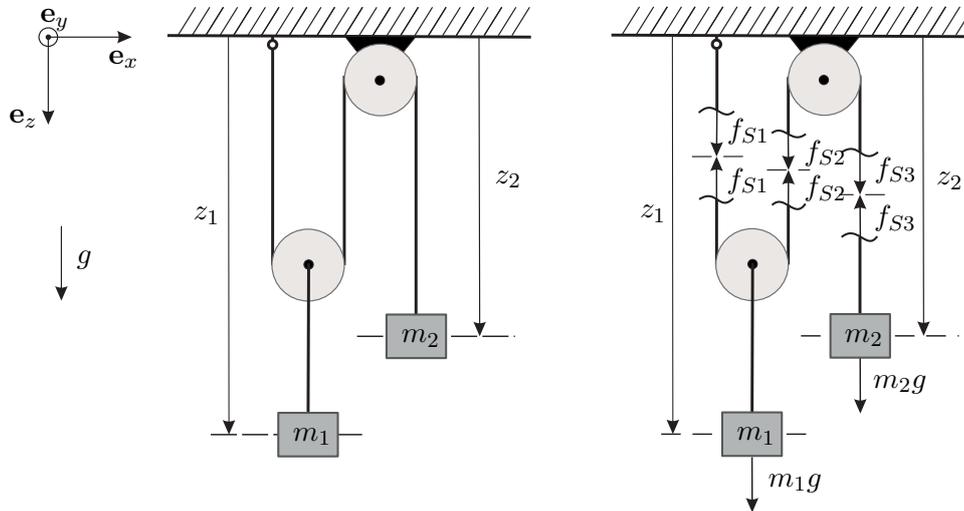


Abbildung 2.22: Flaschenzug mit zwei Massen.

Die zugehörigen Bewegungsgleichungen lauten

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g - f_{S1} - f_{S2} \quad (2.73a)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - f_{S3} . \quad (2.73b)$$

Aufgrund der obigen Annahmen ist die Kraft im gesamten Seil gleich groß, d. h.

$$f_{S1} = f_{S2} = f_{S3} = f_S . \quad (2.74)$$

Bezeichnet man mit z_{10} und z_{20} die Position der Masse m_1 und m_2 zum Zeitpunkt $t = 0$, dann bedingt eine Änderung von z_2 um Δz_2 eine Verschiebung der Masse m_1 um $-\Delta z_2/2$ (Flaschenzug), d. h.

$$z_2(t) = z_{20} + \Delta z_2(t), \quad z_1(t) = z_{10} - \frac{\Delta z_2(t)}{2} . \quad (2.75)$$

Setzt man (2.74) und (2.75) in (2.73b) ein, erhält man

$$-\frac{m_1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \Delta z_2 = m_1 g - 2f_S \quad (2.76a)$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} \Delta z_2 = m_2 g - f_S , \quad (2.76b)$$

woraus sich unmittelbar die Bewegungsgleichung des gekoppelten Systems und die Seilkraft f_S in der Form

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta z_2 = 2g \frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2} \quad (2.77a)$$

$$f_S = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_2 + m_1} \quad (2.77b)$$

berechnen lassen.

2.2.4 Translatorische kinetische Energie und potentielle Energie

Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen ist eine Punktmasse mit der Masse m , dem Ortsvektor $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ vom Ursprung 0 des Inertialsystems $(0xyz)$, der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z$ und der Summe der auf die Punktmasse wirkenden Kräfte $\mathbf{f}_R = f_{R,x}\mathbf{e}_x + f_{R,y}\mathbf{e}_y + f_{R,z}\mathbf{e}_z$. Damit gilt nach (2.62) der Impulserhaltungssatz

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{f}_R . \quad (2.78)$$

Die durch die Kraft \mathbf{f}_R zum Zeitpunkt t verrichtete Arbeit wird auch als *Leistung* (SI Einheit Watt ($W = Nms^{-1}$))

$$P = \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} \quad (2.79)$$

bezeichnet². Die zugehörige im Zeitintervall $[t_0, t]$ transferierte *Energie* E lautet (SI Einheit Joule ($J = Nm$))

$$E(t) - E(t_0) = \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} d\tau . \quad (2.80)$$

Setzt man nun die linke Seite von (2.78) in (2.80) ein, so erhält man die zum Zeitpunkt t in der Masse m gespeicherte *kinetische Energie* zu

$$\begin{aligned} T(t) &= T(t_0) + \int_{t_0}^t \left(m \frac{d}{d\tau} \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v} d\tau = T(t_0) + m \int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} \cdot d\tilde{\mathbf{v}} \\ &= T(t_0) + m \left(\int_{v_{0x}}^{v_x} \tilde{v}_x d\tilde{v}_x + \int_{v_{0y}}^{v_y} \tilde{v}_y d\tilde{v}_y + \int_{v_{0z}}^{v_z} \tilde{v}_z d\tilde{v}_z \right) \\ &= T(t_0) - \underbrace{\frac{m}{2} (v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2)}_{=0} + \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} , \end{aligned} \quad (2.81)$$

wobei sämtliche Integrale entlang einer Lösungskurve des Systems im Zeitintervall $[t_0, t]$ mit der zugehörigen Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 = [v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}]^T$ und $\mathbf{v}(t) = [v_x, v_y, v_z]^T$ ausgewertet werden.

Der *translatorische Anteil der kinetischen Energie eines Starrkörpers* errechnet sich zu (Schwerpunktsatz)

²Hier und im Folgenden bezeichnet $\mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v}$ das innere Produkt $\mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f}_R^T \mathbf{v} = f_{R,x}v_x + f_{R,y}v_y + f_{R,z}v_z$.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_S^T \dot{\mathbf{r}}_S \quad (2.82)$$

mit der Gesamtmasse m und dem Ortsvektor \mathbf{r}_S zum Schwerpunkt gemessen im Inertialsystem $(0xyz)$.

Im nächsten Schritt soll für die Klasse der *Potentialkräfte* \mathbf{f}_R die zugehörige *potentielle Energie* V berechnet werden. Dazu formuliert man (2.80) mit $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}$ in der Form

$$\begin{aligned} V(t) &= V(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} \, d\tau = V(t_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}} \\ &= V(t_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} [f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \, d\tilde{x} + f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \, d\tilde{y} + f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \, d\tilde{z}] \end{aligned} \quad (2.83)$$

um, wobei die Integrale wiederum entlang einer Lösungskurve des Systems im Zeitintervall $[t_0, t]$ mit der zugehörigen Position $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$ und $\mathbf{r}(t) = [x, y, z]^T$ zu verstehen sind. Das Integral in (2.83) ist genau dann³ *wegunabhängig*, wenn die *Integrabilitätsbedingungen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) , \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) , \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \end{aligned} \quad (2.84)$$

erfüllt sind bzw. äquivalent dazu die Jacobimatrix von $\mathbf{f}_R = [f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})]^T$ bezüglich $\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}]^T$ *symmetrisch* ist, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{r}}} \mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,x} & \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,x} & \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,x} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,y} & \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,y} & \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,y} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,z} & \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,z} & \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,z} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{r}}} \mathbf{f}_R \right)^T . \quad (2.85)$$

In diesem Fall sagt man auch, die Kraft \mathbf{f}_R ist *konservativ* und besitzt ein *Potential* (potentielle Energie) gemäß (2.83). Nimmt man nun an, dass \mathbf{r}_I jene Position bezeichnet, an der $V(\mathbf{r}_I) = 0$ ist (Bezugspunkt), dann gilt

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_I) + \underbrace{\int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}}}_{=V(\mathbf{r}_0)} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}} = \int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}} . \quad (2.86)$$

Damit hängt die potentielle Energie V ausschließlich vom Endwert \mathbf{r} der Lösungskurve und vom Bezugspunkt \mathbf{r}_I ab und ist unabhängig davon, wie man zu diesem Endwert gelangt⁴. Wenn $\mathbf{f}_R = [f_{R,x}(x, y, z), f_{R,y}(x, y, z), f_{R,z}(x, y, z)]^T$ konservativ ist und damit

³Genau genommen gilt dies nur in einer sternförmigen Menge (Lemma von Poincaré für Differentialformen).

⁴Man beachte, dass eine Änderung des Bezugspunktes \mathbf{r}_I lediglich eine konstante Verschiebung in V bewirkt.

die Integrabilitätsbedingungen (2.84) erfüllt sind, ist der Integrationsweg frei wählbar und das zugehörige Potential lässt sich wie folgt

$$V(\mathbf{r}) = \int_{x_I}^x f_{r,x}(\tilde{x}, y_I, z_I) d\tilde{x} + \int_{y_I}^y f_{r,y}(x, \tilde{y}, z_I) d\tilde{y} + \int_{z_I}^z f_{r,z}(x, y, \tilde{z}) d\tilde{z} \quad (2.87)$$

mit $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ und $\mathbf{r}_I = [x_I, y_I, z_I]^T$ berechnen.

Beispiel 2.8. Ein anschauliches Beispiel bildet die potentielle Energie zufolge der Gravitationskraft. Wenn eine Person der Masse m einen Berg der Höhe h besteigt, dann hat diese Person am Berggipfel die potentielle Energie^a $V = mgh$, unabhängig davon, von welchem Ort sie die Bergtour gestartet und auf welchem Weg sie den Berggipfel erreicht hat.

^aHier wird angenommen, dass als Bezugspunkt das Niveau des Meeresspiegels gewählt wurde.

Wenn $V(x, y, z)$ die potentielle Energie bezeichnet, dann kann V auch in der Form

$$V = \int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}} \frac{dV}{d\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{x} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{z} \right] \quad (2.88)$$

geschrieben werden und durch Vergleich mit (2.86) folgen aus der Unabhängigkeit der Ortsvariablen x , y und z die Beziehungen

$$f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \quad (2.89)$$

bzw.

$$\mathbf{f}_R = \text{grad}(V) = \nabla V. \quad (2.90)$$

Aufgabe 2.8. Zeigen Sie, dass die Kraft, die aus einem Potential berechnet werden kann, immer *wirbelfrei* ist, d. h. $\text{rot}(\mathbf{f}_R) = \nabla \times \mathbf{f}_R = \mathbf{0}$.

Beispiel 2.9. Abbildung 2.23 zeigt eine mechanische Feder und deren nichtlineare Kraft-Weg Kennlinie. Im unbelasteten Fall (Federkraft $f_F = 0$) hat das Federelement die Länge s_0 , welche auch als *entspannte Länge der Feder* bezeichnet wird.

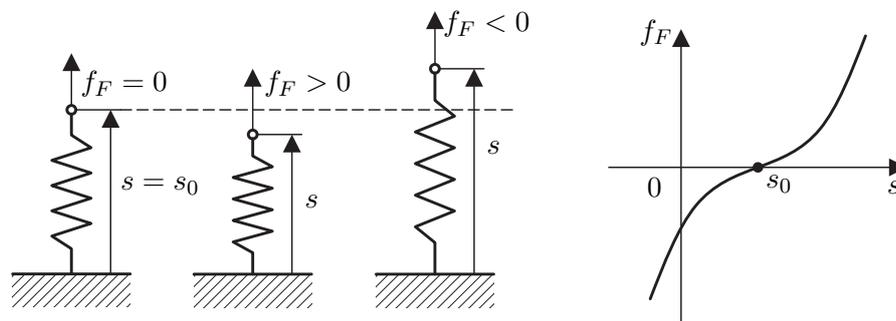


Abbildung 2.23: Das Federelement.

Die potentielle Energie der Feder mit der Federkraft $f_F(s)$, $f_F(s_0) = 0$, berechnet sich nach (2.86) zu

$$V(s) = \int_{s_0}^s f_F(\bar{s}) d\bar{s} . \quad (2.91)$$

Im linearen Fall, d. h. $f_F(s) = c(s - s_0)$ mit der *Federkonstanten* $c > 0$, vereinfacht sich die potentielle Energie zu

$$V(s) = \frac{1}{2}c(s - s_0)^2 . \quad (2.92)$$

Aufgabe 2.9. Abbildung 2.24 zeigt die Serien- und Parallelschaltung zweier linearer Federelemente mit den Federkonstanten c_1 und c_2 und den zugehörigen entspannten Längen s_{01} , s_{02} und $s_{01} = s_{02} = s_0$.

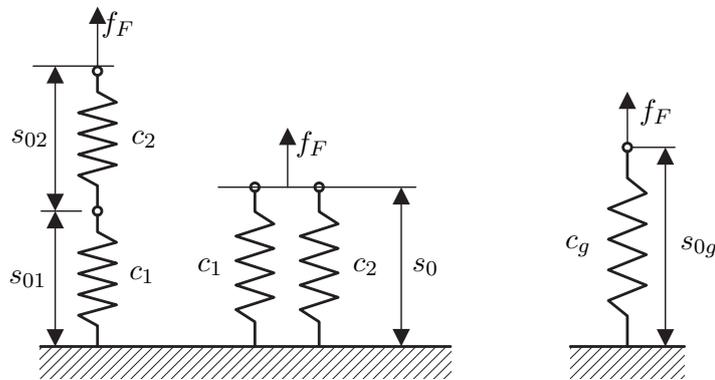


Abbildung 2.24: Zur Serien- und Parallelschaltung von linearen Federelementen.

Berechnen Sie jeweils die Gesamtsteifigkeit c_g sowie die zugehörige entspannte Länge s_{0g} der Ersatzschaltung gemäß Abbildung 2.24.

Lösung von Aufgabe 2.9.

$$\text{Serienschaltung: } s_{0g} = s_{01} + s_{02}, \quad c_g = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

$$\text{Parallelschaltung: } s_{0g} = s_{01} = s_{02}, \quad c_g = c_1 + c_2$$

Beispiel 2.10. Gegeben ist das System in Abbildung 2.25 bestehend aus den zwei Massen m_1 und m_2 sowie den beiden linearen Federelementen mit der Federsteifigkeit $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ und den zugehörigen entspannten Längen s_{01} und s_{02} . Im Weiteren bezeichne z_1 und z_2 die Auslenkung der Masse m_1 bzw. m_2 aus der Gleichgewichtslage, d. h. $z_1 = s_1 - s_{01}$ und $z_2 = s_2 - s_{02}$. Wie in Abbildung 2.25 dargestellt, sind die beiden Massen über eine Blattfeder miteinander verbunden, so dass auf die Masse m_1 zusätzlich die Kraft $f_{12} = -c_{12}(z_1 - z_2)$, $c_{12} > 0$ und auf die Masse m_2 die Kraft $f_{21} = -c_{21}(z_2 - z_1)$, $c_{21} > 0$ wirkt.

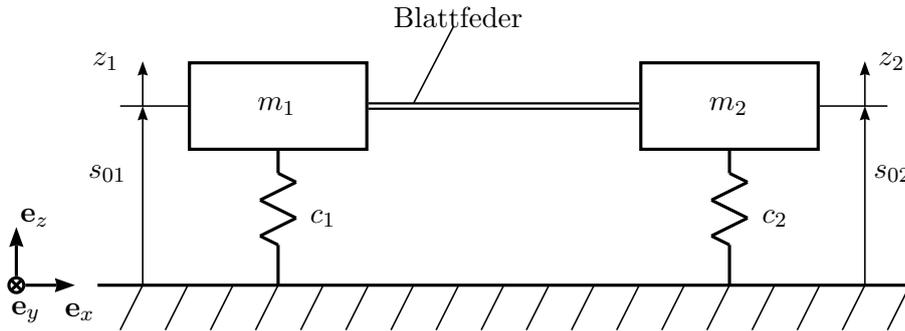


Abbildung 2.25: Massen mit Blattfeder.

Nimmt man an, dass für $z_1 = z_2 = 0$ die in den Federn gespeicherte potentielle Energie V gleich Null ist und fasst man die Kräfte auf die Massen in einen Vektor \mathbf{f}_F zusammen

$$\mathbf{f}_F = \begin{bmatrix} f_{F1}(z_1, z_2) \\ f_{F2}(z_1, z_2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_1 z_1 + c_{12}(z_1 - z_2) \\ c_2 z_2 + c_{21}(z_2 - z_1) \end{bmatrix}, \quad (2.93)$$

so errechnet sich V mit $\mathbf{z} = [z_1, z_2]^T$ in der Form

$$V = - \int_0^{\mathbf{z}} \mathbf{f}_F \cdot d\tilde{\mathbf{z}} = \int_0^{\tilde{z}_1} \underbrace{[c_1 \tilde{z}_1 + c_{12}(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2)]}_{-f_{F1}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)} d\tilde{z}_1 + \int_0^{\tilde{z}_2} \underbrace{[c_2 \tilde{z}_2 + c_{21}(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1)]}_{-f_{F2}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)} d\tilde{z}_2. \quad (2.94)$$

Das negative Vorzeichen in (2.94) kommt daher, dass wenn auf die Massen m_1 und m_2 die Kraft f_F wirkt, dann ist die Kraft auf die Federn gemäß dem Schnittprinzip $-f_F$. Analog zu (2.83) ist die Wegunabhängigkeit der Integration von (2.94) genau dann gegeben, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$-c_{12} = \frac{\partial f_{F1}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)}{\partial \tilde{z}_2} = \frac{\partial f_{F2}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)}{\partial \tilde{z}_1} = -c_{21} \quad (2.95)$$

erfüllt ist, womit die potentielle Energie V zu der Kraft $\mathbf{f}_F = -\mathbf{Cz}$ zu

$$\begin{aligned} V &= - \int_0^{z_1} f_{F1}(\tilde{z}_1, 0) d\tilde{z}_1 - \int_0^{z_2} f_{F2}(z_1, \tilde{z}_2) d\tilde{z}_2 \\ &= \int_0^{z_1} [c_1 \tilde{z}_1 + c_{12} \tilde{z}_1] d\tilde{z}_1 + \int_0^{z_2} [c_2 \tilde{z}_2 + c_{12} \tilde{z}_2 - c_{12} z_1] d\tilde{z}_2 \\ &= (c_1 + c_{12}) \frac{z_1^2}{2} + (c_2 + c_{12}) \frac{z_2^2}{2} - c_{12} z_1 z_2 \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_2 + c_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (2.96)$$

folgt. Die Matrix \mathbf{C} ist *symmetrisch* und *positiv definit* und wird auch als *Steifigkeitsmatrix* bezeichnet. Die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix ist somit eine Konsequenz

der Integrabilitätsbedingung und notwendig dafür, dass zu \mathbf{f}_F eine potentielle Energie existiert.

2.2.5 Dissipative Kräfte

Unter einer *dissipativen Kraft* \mathbf{f}_D versteht man eine Kraft, deren Arbeit irreversibel in Wärme umgewandelt (dissipiert) wird, d. h. $\mathbf{f}_D(t) \cdot \mathbf{v}(t) \leq 0$ für alle Zeiten t . Dies können volumenhaft verteilt wirkende Kräfte sein, wie beispielsweise bei der Wirbelstrombremse, oder flächenhaft verteilt wirkende Kräfte, wie dies bei der Bewegung eines starren Körpers durch ein (flüssiges) Medium zufolge der Reibung auftritt.

Bewegung eines starren Körpers durch ein fluides Medium

Betrachtet man einen Starrkörper, der sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} ohne Rotation durch ein (ruhesendes) fluides Medium bewegt, so können die vom Fluid auf den Körper ausgeübten flächenhaft verteilten Kräfte durch eine resultierende Kraft \mathbf{f}_R und ein resultierendes Moment $\boldsymbol{\tau}_R^{(Z)}$ bezüglich eines beliebig gewählten Punktes Z ausgedrückt werden (siehe dazu auch die bisherigen Ausführungen zum Thema *allgemeines Kräftesystem*). Die resultierende Kraft \mathbf{f}_R kann man in einen Anteil \mathbf{f}_A (*Ablenkungskraft*)

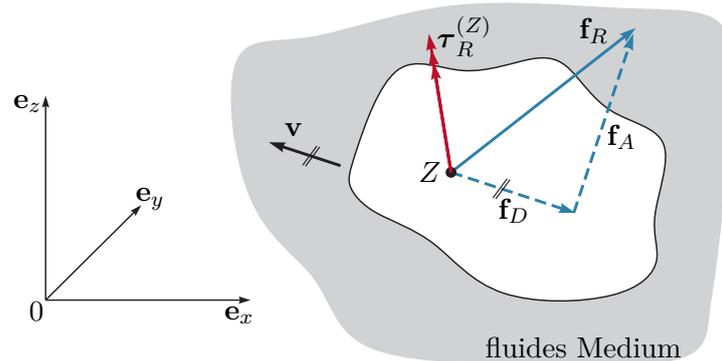


Abbildung 2.26: Bewegter Starrkörper in einem fluiden Medium.

senkrecht zu \mathbf{v} und einen Anteil \mathbf{f}_D (*Widerstandskraft*), der parallel in entgegengesetzter Richtung von \mathbf{v} wirkt, zerlegen, siehe Abbildung 2.26. Die Ablenkungskraft \mathbf{f}_A wird auch als dynamische Auftriebskraft bezeichnet und ist bedingt durch die Geometrie des Starrkörpers. Ein einfacher Zusammenhang für die Widerstandskraft \mathbf{f}_D in einem weiten Geschwindigkeitsbereich unter der Schallgeschwindigkeit ist durch

$$\mathbf{f}_D = f_D \mathbf{e}_v = -c_W A \frac{\rho_f}{2} v^2 \mathbf{e}_v \quad (2.97)$$

mit $v = \|\mathbf{v}\|_2$ und dem Richtungsvektor der Geschwindigkeit \mathbf{e}_v gegeben. Dabei bezeichnet $c_W > 0$ den (dimensionslosen) Widerstandsbeiwert, A eine geeignete Bezugsfläche und ρ_f die Dichte des fluiden Mediums.

Reibung zwischen festen Körpern

Wenn zwei feste Körper, die sich berühren, Relativbewegungen ausführen, dann entstehen *zufolge der Rauigkeit der Oberflächen* in der Berührungsfläche flächenhaft wirkende tangentielle Reibungskräfte. Im Folgenden betrachte man eine Masse m , die durch eine externe horizontale Kraft f_e auf einer rauen Oberfläche bewegt werden soll, siehe Abbildung 2.27. Schneidet man die Masse frei, so wirken auf die Masse neben f_e die Normalkraft f_N und

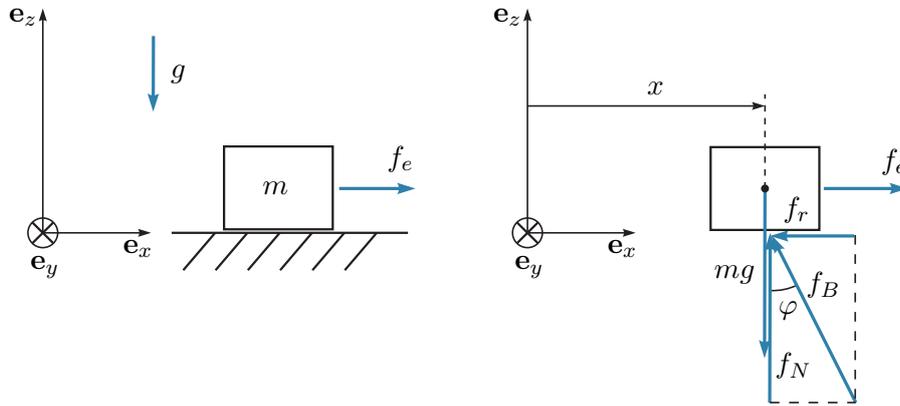


Abbildung 2.27: Zur Haftreibung.

die Reibkraft f_r . Aus Erfahrung weiß man, dass die Masse m sich erst bewegt, wenn die Kraft f_e einen bestimmten Wert f_H überschreitet, d. h. solange die Ungleichung⁵ $|f_e| \leq f_H$ erfüllt ist, gelten die statischen Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathbf{e}_x : f_e - f_r = 0 \quad (2.98a)$$

$$\mathbf{e}_z : f_N - mg = 0 \quad (2.98b)$$

und die Masse bleibt an der Stelle haften. In diesem Zusammenhang wird f_r deshalb als *Haftreibungskraft* bezeichnet und stellt eine Reaktionskraft dar, wie dies zufolge des Schnittprinzips bereits bekannt ist. In einer ersten Näherung lässt sich f_H in der Form

$$f_H = \mu_H f_N \quad (2.99)$$

ausdrücken, wobei der *Haftreibungskoeffizient* $\mu_H > 0$ lediglich von der Rauigkeit der sich berührenden Oberflächen abhängt. Wird die externe Kraft f_e so erhöht, dass die Haftreibung überwunden wird, dann beginnt sich die Masse zu bewegen und die Reibkraft $f_r = f_C$ zufolge der *trockenen Gleitreibung* lautet

$$f_C = \mu_C f_N \operatorname{sign}(\dot{x}) \quad (2.100)$$

mit dem *Gleitreibungskoeffizienten* $\mu_C > 0$. In diesem Fall gilt für die \mathbf{e}_z -Richtung nach wie vor die Gleichgewichtsbedingung $f_N = mg$ und in \mathbf{e}_x -Richtung folgt der Impulserhaltungssatz (2.62) zu

$$m\ddot{x} = f_e - \mu_C mg \operatorname{sign}(\dot{x}). \quad (2.101)$$

⁵Man beachte, dass im Allgemeinen f_H für unterschiedliche Vorzeichen von f_e auch unterschiedliche Werte annehmen kann, was hier nicht betrachtet wird.

Das mathematische Modell der Masse von Abbildung 2.27 ist demnach durch eine *Strukturumschaltung* charakterisiert, d. h.

$$\mathbf{Haften:} \text{ wenn } |f_e| \leq f_H \text{ und } \dot{x} = 0 \quad \begin{cases} \dot{x} &= 0 \\ \dot{v} &= 0 \end{cases} \quad (2.102)$$

$$\mathbf{Gleiten:} \text{ sonst } \begin{cases} \dot{x} &= v \\ m\dot{v} &= f_e - \mu_C mg \operatorname{sign}(v) . \end{cases} \quad (2.103)$$

Das Reibungsgesetz (2.99), (2.100) ist auch als *Coulombsches Reibungsgesetz* bekannt und gilt im Wesentlichen als elementare Näherungstheorie für trockene Reibung zwischen festen Körpern. Die Reibungskoeffizienten μ_H und μ_C müssen im Allgemeinen aus experimentellen Versuchen ermittelt werden. Typische Werte für einige Materialpaarungen findet man in einschlägigen Tabellenbüchern, siehe beispielsweise Tabelle 2.1.

Tabelle 2.1: Typische Reibungskoeffizienten.

Materialpaarung	Haftreibung μ_H	Gleitreibung μ_C
Bronze auf Bronze	0,18	0,2
Grauguß auf Bronze	0,28	0,2
Stahl auf Stahl	0,15	0,12
Luftreifen auf Asphalt	0,55	0,3
Eiche auf Eiche	0,54	0,34

Im Haftzustand kann man gemäß Abbildung 2.27 einen Winkel φ in der Form

$$\tan(\varphi) = \frac{f_r}{f_N} \quad (2.104)$$

einführen. Setzt man für f_r den Grenzwert $f_H = \mu_H f_N$ ein, so erhält man den Zusammenhang

$$\tan(\varphi_H) = \mu_H \quad (2.105)$$

mit dem Haftungswinkel φ_H . Dies erlaubt eine anschauliche geometrische Interpretation der Haftreibung: Wird ein Körper einer beliebig gerichteten Belastung unterworfen, so bleibt er in Ruhe, solange die Reaktionskraft \mathbf{f}_B an der Berührfläche innerhalb des so genannten *Haftungskegels* liegt. Der Haftungskegel beschreibt dabei den Rotationskegel um die Normale \mathbf{e}_n der Berührflächen mit dem Öffnungswinkel $2\varphi_H$, siehe Abbildung 2.28.

Aufgabe 2.10. Eine Masse m liegt auf einer schiefen Ebene und wird von einer Person mit der Kraft f_S nach oben gezogen (siehe Abbildung 2.29).

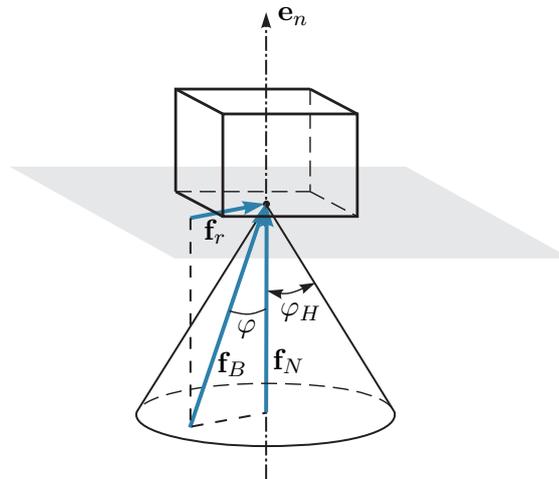


Abbildung 2.28: Haftungskegel.

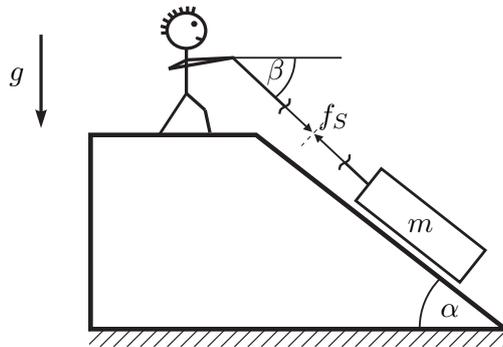


Abbildung 2.29: Masse auf schiefer Ebene.

Berechnen Sie die notwendige Zugkraft f_S als Funktion der Winkel α und β sowie der Masse m und des Haftreibungskoeffizienten μ_H , damit die Masse bewegt werden kann.

Lösung von Aufgabe 2.10.

$$f_S > \frac{mg(\mu_H \cos(\alpha) + \sin(\alpha))}{\cos(\beta - \alpha) + \mu_H \sin(\beta - \alpha)}$$

Aufgabe 2.11. Eine Person der Masse m steigt auf eine 21-stufige Leiter der Länge l , die an einer Wand angelehnt ist, siehe Abbildung 2.30. Wie viele Stufen darf die Person auf die Leiter steigen ohne dass die Leiter wegrutscht, wenn der Haftreibungskoeffizient zwischen Leiter und Wand Null und zwischen Leiter und Boden gleich $\mu_H = 1/10$ ist?

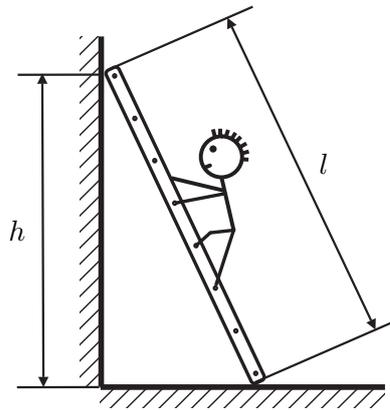


Abbildung 2.30: Person auf einer Leiter.

Lösung von Aufgabe 2.11. Die Anzahl der Stufen entspricht der auf die nächst kleinere ganze Zahl abgerundeten Zahl

$$\frac{20\mu_H}{\sqrt{\left(\frac{l}{h}\right)^2 - 1}} + 1 .$$

Befindet sich zwischen den beiden festen Körpern eine ununterbrochene Schmiermittelschicht, so hängen die zwischen den Körpern wirkenden Kräfte im Wesentlichen von der sich einstellenden Strömung im Spalt zwischen den beiden Körpern ab. Sehr häufig verwendet man in diesem Zusammenhang für die Reibkraft f_r ein einfaches Modell der Form

$$f_r = \mu_V \Delta v \quad (2.106)$$

mit dem *viskosen Reibungskoeffizienten* $\mu_V > 0$ und der Relativgeschwindigkeit Δv der beiden sich berührenden Oberflächen der Starrkörper. Im allgemeinen Fall einer Mischreibung werden die Coulombsche Reibung (2.99), (2.100) und die viskose Reibung (2.106) kombiniert.

Es gibt nun Bauelemente, sogenannte *Dämpfer*, die eine vorgegebene (nichtlineare) Kraft-Geschwindigkeit Kennlinie $f_D(\Delta v)$ mit $f_D(\Delta v)\Delta v > 0$ gemäß Abbildung 2.31 realisieren. Im linearen Fall gilt für die Dämpferkraft $f_D = d\Delta v$ mit dem *geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskoeffizienten* $d > 0$.

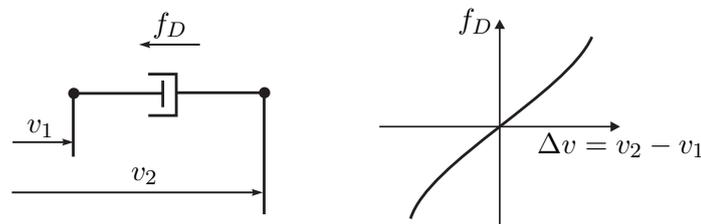


Abbildung 2.31: Nichtlinearer Dämpfer.

Beispiel 2.11. Ein masseloses Seil ist unter dem Umschlingungswinkel α gemäß Abbildung 2.32 um einen feststehenden Zylinder geführt, wobei gilt $f_{S2} > f_{S1}$.

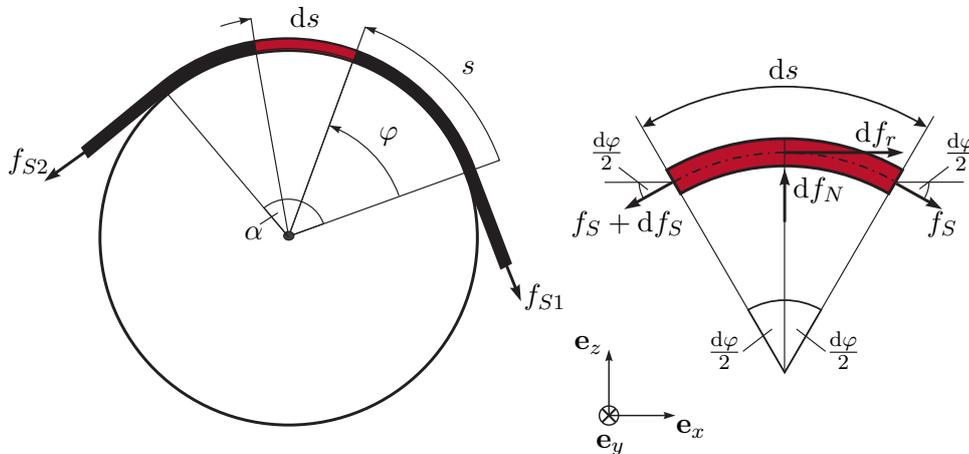


Abbildung 2.32: Zur Reibung eines Seils.

Nimmt man nun ein infinitesimales Seilelement heraus, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen unter der Annahme hinreichend kleiner Winkel $d\varphi/2$ (d. h. $\sin(d\varphi/2) \approx d\varphi/2$, $\cos(d\varphi/2) \approx 1$)

$$\mathbf{e}_x : f_S + df_r - (f_S + df_S) = 0 \quad (2.107a)$$

$$\mathbf{e}_z : df_N - f_S \frac{d\varphi}{2} - (f_S + df_S) \frac{d\varphi}{2} = 0 \quad (2.107b)$$

bzw. unter Vernachlässigung von $df_S d\varphi/2$ folgt

$$df_r = df_S \quad \text{und} \quad df_N = f_S d\varphi . \quad (2.108)$$

Mit dem Coulombschen Reibungsgesetz gemäß (2.99), (2.100), im Speziellen $df_r = \mu df_N$, erhält man

$$\frac{df_S}{d\varphi} = \mu f_S \quad (2.109)$$

bzw. durch Integration über den Umschlingungswinkel von $\varphi = 0$ nach $\varphi = \alpha$ ergibt sich die *Seilreibungsgleichung* zu

$$\int_{f_{S1}}^{f_{S2}} \frac{1}{f_S} df_S = \int_0^\alpha \mu d\varphi \quad \text{bzw.} \quad f_{S2} = f_{S1} \exp(\mu\alpha) . \quad (2.110)$$

Für den Fall $f_{S1} > f_{S2}$ kann auf analoge Art und Weise die Beziehung $f_{S1} = f_{S2} \exp(\mu\alpha)$ hergeleitet werden. Bezeichnet nun $\mu = \mu_H$ den Haftreibungskoeffizienten, dann ist das System im Gleichgewicht solange die Ungleichung

$$f_{S1} \exp(-\mu_H\alpha) \leq f_{S2} \leq f_{S1} \exp(\mu_H\alpha) \quad (2.111)$$

folgt die Rollwiderstandskraft f_R zu

$$f_R = \frac{l_\mu}{r} f_N = \mu_R f_V \quad (2.113)$$

mit dem *Rollreibungskoeffizienten* $\mu_R = l_\mu/r > 0$. Bei gleicher Materialpaarung ist der Rollreibungskoeffizient deutlich kleiner als der Gleitreibungskoeffizient.

Aufgabe 2.13. Zeigen Sie, dass beim Treibrad das Antriebsmoment $\tau_A = l_\mu f_V$ aufgebracht werden muss, um den Rollwiderstand zu überwinden und dass sich die Zugkraft zu $f_Z = \tau_A/r - \mu_R f_V$ errechnet.

Hinweis: Die Gleichgewichtsbedingungen für das Treibrad unter der Annahme sehr kleiner Winkel $\varphi = \arctan(f_Z/f_V)$ lauten

$$f_Z - f_R = 0, \quad f_N - f_V = 0 \quad \text{und} \quad \tau_A - r f_R - l_\mu f_N = 0 .$$

2.2.6 Feder-Masse-Dämpfer System

Auf Basis der bisherigen Ergebnisse lassen sich bereits die Bewegungsgleichungen von Feder-Masse-Dämpfer Systemen herleiten. Dazu betrachte man folgendes Beispiel.

Beispiel 2.12. Gegeben ist das Feder-Masse-Dämpfer System von Abbildung 2.34 mit den Massen m_1 , m_2 und m_3 , den linearen Dämpferelementen mit den positiven Dämpfungskonstanten d_{11} , d_{22} und d_{13} sowie den linearen Federelementen mit den positiven Federkonstanten c_{11} , c_{22} , c_{13} und c_{23} und den entspannten Längen s_{011} , s_{022} , s_{013} und s_{023} . Im Weiteren wirke auf die Masse m_3 die Kraft f_L und g bezeichne die Erdbeschleunigung.

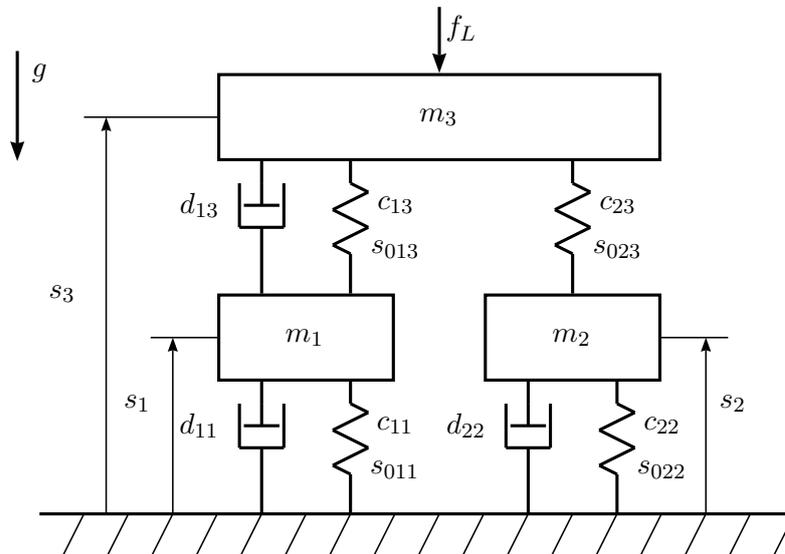


Abbildung 2.34: Feder-Masse-Dämpfer System mit drei Massen.

Wendet man für jede Masse den Impulserhaltungssatz (2.62) an, so erhält man drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$m_1 \ddot{s}_1 = -m_1 g - c_{11}(s_1 - s_{011}) - d_{11} \dot{s}_1 + c_{13}(s_3 - s_1 - s_{013}) - d_{13}(\dot{s}_1 - \dot{s}_3) \quad (2.114a)$$

$$m_2 \ddot{s}_2 = -m_2 g - c_{22}(s_2 - s_{022}) - d_{22} \dot{s}_2 + c_{23}(s_3 - s_2 - s_{023}) \quad (2.114b)$$

$$m_3 \ddot{s}_3 = -m_3 g - c_{13}(s_3 - s_1 - s_{013}) + d_{13}(\dot{s}_1 - \dot{s}_3) - c_{23}(s_3 - s_2 - s_{023}) - f_L. \quad (2.114c)$$

Das mathematische Modell (2.114c) lässt sich auch kompakter in *Matrixschreibweise* in der Form

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{k} + \mathbf{b} f_L \quad (2.115)$$

schreiben, mit $\mathbf{q} = [s_1, s_2, s_3]^T$, der *symmetrischen, positiv definiten Massenmatrix* $\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$, der *symmetrischen, positiv (semi-)definiten Dämpfungsmatrix*

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} + d_{13} & 0 & -d_{13} \\ 0 & d_{22} & 0 \\ -d_{13} & 0 & d_{13} \end{bmatrix}, \quad (2.116)$$

der *symmetrischen, positiv definiten Steifigkeitsmatrix*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} + c_{13} & 0 & -c_{13} \\ 0 & c_{22} + c_{23} & -c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & c_{13} + c_{23} \end{bmatrix}, \quad (2.117)$$

dem konstanten Vektor \mathbf{k} und dem konstanten Eingangsvektor \mathbf{b}

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -m_1 g + c_{11} s_{011} - c_{13} s_{013} \\ -m_2 g + c_{22} s_{022} - c_{23} s_{023} \\ -m_3 g + c_{13} s_{013} + c_{23} s_{023} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (2.118)$$

Aufgabe 2.14. Zeigen Sie die Definitheitseigenschaften der Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{D} .

Um nun die Gleichgewichtslage \mathbf{q}_R für $f_L = 0$ zu berechnen, setzt man in (2.115) $\dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ und löst das resultierende lineare Gleichungssystem $\mathbf{C} \mathbf{q}_R = \mathbf{k}$ nach \mathbf{q}_R auf. Wegen der positiven Definitheit ist \mathbf{C} invertierbar und es folgt

$$\mathbf{q}_R = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{k}. \quad (2.119)$$

Führt man nun die Abweichung $\Delta \mathbf{q}$ von \mathbf{q} aus der Gleichgewichtslage (Ruhelage) \mathbf{q}_R ein, also $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_R$, dann folgt die Bewegungsgleichung (2.115) in der Form

$$\mathbf{M} \frac{d^2}{dt^2} \Delta \mathbf{q} + \mathbf{D} \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{q} + \mathbf{C} \Delta \mathbf{q} + \underbrace{\mathbf{C} \mathbf{q}_R}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + \mathbf{b} f_L . \quad (2.120)$$

Das Ergebnis des vorigen Beispiels lässt sich insofern verallgemeinern, als jedes lineare Feder-Masse-Dämpfer System in der Form

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{f}_e \quad (2.121)$$

mit dem Vektor der Lagekoordinaten \mathbf{q} (relativ bezogen auf die Gleichgewichtslage), der *symmetrischen, positiv definiten Massenmatrix* \mathbf{M} , der *symmetrischen, positiv semi-definiten Dämpfungsmatrix* \mathbf{D} , der *symmetrischen, positiv definiten Steifigkeitsmatrix* \mathbf{C} , der Eingangsmatrix \mathbf{B} sowie dem Vektor der externen Kräfte \mathbf{f}_e geschrieben werden kann.

Die im System gespeicherte Energie setzt sich aus der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.122)$$

und der in den Federn gespeicherten potentiellen Energie

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (2.123)$$

zusammen. Berechnet man nun die zeitliche Änderung der Gesamtenergie $E = T + V$ entlang einer Lösungskurve von (2.121), dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E &= \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T (-\mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C} \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{f}_e) + \mathbf{q}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \mathbf{f}_e . \end{aligned} \quad (2.124)$$

Dabei gibt der erste Term $-\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \leq 0$ die in den Dämpferelementen dissipierte Leistung an und der zweite Term $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \mathbf{f}_e$ beschreibt die Energieflüsse zum oder vom System zufolge der externen Kräfte \mathbf{f}_e .

2.2.7 Körper mit veränderlicher Masse

Der Impulserhaltungssatz (2.62) gilt auch für Körper mit veränderlicher Masse $m(t)$. Angenommen der Körper habe zum Zeitpunkt t die Masse $m(t)$, die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und es wirke auf ihn die Kraft \mathbf{f} . Stößt nun der Körper während des Zeitintervalls dt die Masse $d\bar{m}$ mit der Ausstoßgeschwindigkeit \mathbf{w} aus, so hat der Körper zum Zeitpunkt $t + dt$ die Masse $m(t + dt) = m(t) - d\bar{m}$ und die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t + dt)$. Der Impuls zum Zeitpunkt t lautet $\mathbf{p}(t) = m(t)\mathbf{v}(t)$ und der Gesamtimpuls zum Zeitpunkt $t + dt$ errechnet sich zu

$$\mathbf{p}(t + dt) = \underbrace{(m(t) - d\bar{m})}_{m(t+dt)} \underbrace{(\mathbf{v}(t) + d\mathbf{v})}_{\mathbf{v}(t+dt)} + d\bar{m}(\mathbf{v}(t) + d\mathbf{v} + \mathbf{w}(t)) = \mathbf{p}(t) + d\mathbf{p} \quad (2.125)$$

bzw.

$$d\mathbf{p} = m(t) d\mathbf{v} + d\bar{m} \mathbf{w}(t) . \quad (2.126)$$

Der Impulserhaltungssatz (2.62) lautet also

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = m(t)\frac{d}{dt}\mathbf{v} + \mathbf{w}(t)\frac{d}{dt}\bar{m} = \mathbf{f} . \quad (2.127)$$

Dabei beschreibt $\frac{d}{dt}\bar{m} = \mu > 0$ die *Ausstoßrate* bzw. mit $m(t + dt) = m(t) + dm$ und damit

$$\frac{d}{dt}m = -\frac{d}{dt}\bar{m} = -\mu \quad (2.128)$$

die Masseabnahme des Körpers durch die ausgestoßene Masse und der Ausdruck

$$\mathbf{f}_{\text{Schub}} = -\mu\mathbf{w}(t) \quad (2.129)$$

wird als *Schubkraft* bezeichnet. Die Differentialgleichungen eines Körpers mit der veränderlichen Masse $m(t)$ und der Ausstoßrate $\mu > 0$ können demnach wie folgt zusammengefasst werden

$$m(t)\frac{d}{dt}\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mu\mathbf{w}(t) \quad (2.130a)$$

$$\frac{d}{dt}m = -\mu . \quad (2.130b)$$

Aufgabe 2.15. Berechnen Sie das mathematische Modell einer einstufigen Rakete mit der zeitlich veränderlichen Masse $m(t) = m_0 - m_f(t)$, wobei m_0 das Gewicht der Rakete vor dem Start (Eigenmasse + Traglast + Treibstoffmenge) und $m_f(t)$ die zeitlich abnehmende Treibstoffmasse bezeichnen. Nehmen Sie an, dass die Treibstoffmasse $m_f(t)$ mit der Treibstoffausstoßrate $\dot{m}_f(t) = u(t)$ mit der Relativgeschwindigkeit $w > 0$ von der Rakete ausgestoßen wird und die Rakete sich exakt gegen das Schwerfeld der Erde mit der Gravitationskonstanten g bewegt.

Lösung von Aufgabe 2.15. Das mathematische Modell lautet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h &= v \\ \frac{d}{dt}v &= -g + \frac{w}{m(t)}u(t) \\ \frac{d}{dt}m &= -u(t) \end{aligned}$$

mit der Höhe $h(t)$ der Rakete gemessen von der Erdoberfläche, der Raketengeschwindigkeit $v(t)$ und der Raketenmasse $m(t)$.

2.2.8 Drehimpulserhaltung

In (2.38) wurde gezeigt, dass sich das Moment $\boldsymbol{\tau}^{(0)}$ einer Kraft \mathbf{f} mit dem Ortsvektor \mathbf{r} in der Form $\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$ berechnet. Betrachtet man nun eine Punktmasse mit der Masse m , dem Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ vom Ursprung des Inertialsystems ($0xyz$) und der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$, dann ist der *Drehimpuls* in der Form

$$\mathbf{l}^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (2.131)$$

definiert. Bildet man für beide Seiten des Impulserhaltungssatzes (2.62) das Kreuzprodukt mit dem Ortsvektor \mathbf{r} , so erhält man

$$\mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \boldsymbol{\tau}^{(0)}. \quad (2.132)$$

Mit

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \underbrace{\frac{d}{dt}\mathbf{r} \times \underbrace{\mathbf{p}}_{m\mathbf{v}}}_{=0} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{p} \quad (2.133)$$

folgt aus (2.132) der *Drehimpulserhaltungssatz (Drallsatz)* zu

$$\frac{d}{dt}\mathbf{l}^{(0)} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}^{(0)}, \quad (2.134)$$

d. h., die zeitliche Änderung des Drehimpulses $\mathbf{l}^{(0)}$ bezüglich eines *beliebigen raumfesten* Punktes 0 ist gleich dem Drehmoment $\boldsymbol{\tau}^{(0)}$ der an der Punktmasse angreifenden Summenkraft \mathbf{f} bezüglich desselben Punktes 0. Wie man in Abbildung 2.35 erkennen kann, überstreicht der Ortsvektor \mathbf{r} in der Zeit dt eine Fläche mit dem Flächenvektor $d\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{n}_A dA = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$, wobei \mathbf{n}_A den Normalvektor und $dA = \frac{1}{2}\|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}\|_2$ die zugehörige Größe des Flächenelements beschreibt. Führt man nun die so genannte *vektorielle*

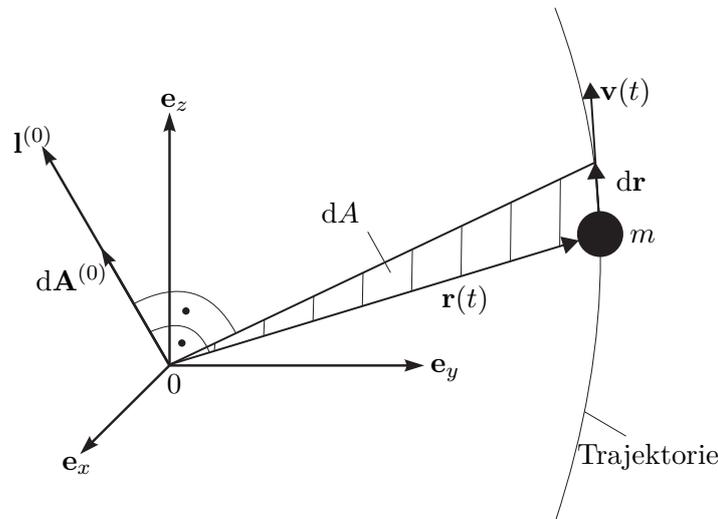


Abbildung 2.35: Zum Drehimpuls.

Flächengeschwindigkeit

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}^{(0)} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (2.135)$$

ein, so lässt sich der Drehimpuls (2.131) auch in der Form

$$\mathbf{l}^{(0)} = 2m \frac{d}{dt}\mathbf{A}^{(0)} \quad (2.136)$$

schreiben.

Beispiel 2.13. Zeigt bei einer Bewegung der Kraftvektor stets auf einen Punkt 0 (das Zentrum) hin, dann spricht man von einer *Zentralbewegung*. Dies ist beispielsweise bei der Planetenbewegung der Fall, wobei die Sonne das Zentrum bildet. Da bei einer Zentralbewegung das Moment $\tau^{(0)}$ bezüglich des Zentrums verschwindet, müssen nach (2.134) der Drehimpuls $\mathbf{l}^{(0)}$ und nach (2.136) die Flächengeschwindigkeit $\frac{d}{dt} \mathbf{A}^{(0)}$ konstant sein. Diese Aussage entspricht dem *zweiten Keplerschen Gesetz*, dass nämlich ein von der Sonne zum Planeten gezogener „Fahrstrahl“ in gleichen Zeiten gleich große Flächen überstreicht, siehe Abbildung 2.36.

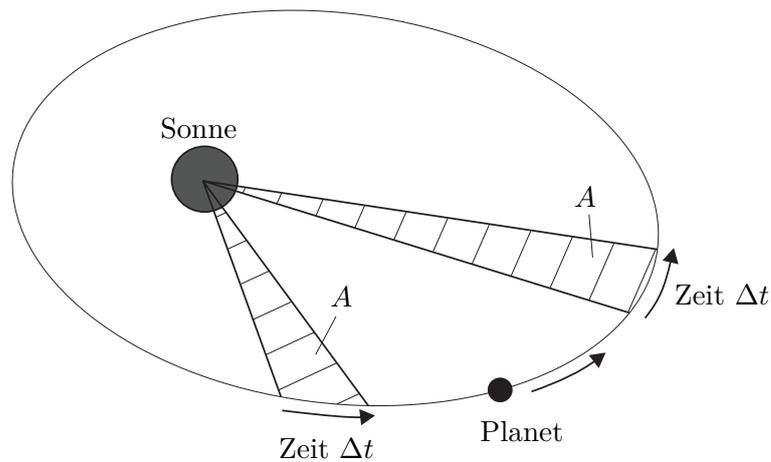


Abbildung 2.36: Zum zweiten Keplerschen Gesetz.

Beispiel 2.14. Man betrachte das mathematische Pendel von Abbildung 2.37 mit der Punktmasse m und dem masselosen starren Pendel der Länge l unter dem Einfluss der Gravitation mit der Erdbeschleunigung g in negativer \mathbf{e}_z -Richtung.

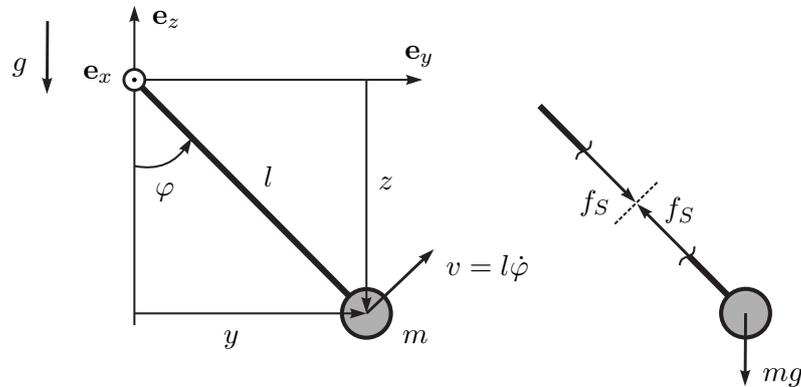


Abbildung 2.37: Mathematisches Pendel.

Schneidet man das Pendel auf und führt die Schnittkraft f_S ein, so lautet der Impulserhaltungssatz für die Masse m

$$\mathbf{e}_y : m\ddot{y} = -f_S \sin(\varphi) \quad (2.137a)$$

$$\mathbf{e}_z : m\ddot{z} = -mg + f_S \cos(\varphi) . \quad (2.137b)$$

Setzt man nun die Beziehungen

$$y = l \sin(\varphi), \quad \dot{y} = l \cos(\varphi) \dot{\varphi}, \quad \ddot{y} = -l \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \cos(\varphi) \ddot{\varphi} \quad (2.138a)$$

$$z = -l \cos(\varphi), \quad \dot{z} = l \sin(\varphi) \dot{\varphi}, \quad \ddot{z} = l \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \sin(\varphi) \ddot{\varphi} \quad (2.138b)$$

in (2.137) ein, so erhält man

$$m(-l \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \cos(\varphi) \ddot{\varphi}) = -f_S \sin(\varphi) \quad (2.139a)$$

$$m(l \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \sin(\varphi) \ddot{\varphi}) = -mg + f_S \cos(\varphi). \quad (2.139b)$$

Aus den beiden Gleichungen (2.139) lassen sich nun eine Differentialgleichung für φ

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin(\varphi) \quad (2.140)$$

und die Schnittkraft f_S in der Form

$$f_S = mg \cos(\varphi) + ml \dot{\varphi}^2 \quad (2.141)$$

berechnen. Die Differentialgleichung (2.140) kann man auch direkt über den Drehimpulserhaltungssatz (2.134) bezüglich des Ursprungs 0 des Koordinatensystems ($0xyz$) erhalten. Der zugehörige Drehimpuls $\mathbf{I}^{(0)}$ gemäß (2.131) lautet (siehe auch

Abbildung 2.37)

$$\mathbf{l}^{(0)} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ l \sin(\varphi) \\ -l \cos(\varphi) \end{bmatrix} \times m \begin{bmatrix} 0 \\ l\dot{\varphi} \cos(\varphi) \\ l\dot{\varphi} \sin(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml^2\dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

und damit folgt der Drehimpulserhaltungssatz bezüglich der \mathbf{e}_x -Achse zu

$$\frac{d}{dt} l_x^{(0)} = ml^2\ddot{\varphi} = \tau_x^{(0)} = -mgl \sin(\varphi) . \quad (2.143)$$

Die Größe

$$\theta^{(0)} = ml^2 \quad (2.144)$$

wird auch als *Massenträgheitsmoment* bezeichnet.

Das vorige Beispiel lässt sich nun sehr einfach auf die Rotation eines Starrkörpers mit der Drehwinkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ um eine feste Drehachse (im vorliegenden Fall die \mathbf{e}_z -Achse) erweitern, siehe Abbildung 2.38. Schreibt man für ein Massenelement

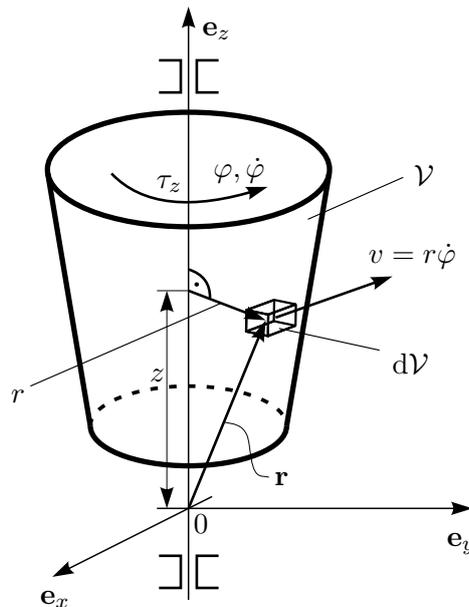


Abbildung 2.38: Zum Massenträgheitsmoment.

$dm = \rho(x, y, z) dV$ mit dem Volumenelement dV und der Dichte $\rho(x, y, z)$, welches sich im Abstand $r(x, y, z)$ von der Drehachse befindet, die zeitliche Änderung des Drehimpulses um die Drehachse mit

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -r \sin(\varphi)\omega \\ r \cos(\varphi)\omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

an, so erhält man

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times d\mathbf{m}\mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -z \, dmr \cos(\varphi)\omega \\ -z \, dmr \sin(\varphi)\omega \\ r^2 \, dm\omega \end{bmatrix}. \quad (2.146)$$

Durch Integration über das gesamte Starrkörpervolumen \mathcal{V} folgt der *Momentensatz* zu

$$\theta_{zz}\dot{\omega} = \theta_{zz}\ddot{\varphi} = \tau_z \quad (2.147)$$

mit dem um die \mathbf{e}_z -Achse wirkenden äußeren Gesamtdrehmoment τ_z und dem Massenträgheitsmoment

$$\theta_{zz} = \int_{\mathcal{V}} r^2 \, dm = \int_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2) \, dm. \quad (2.148)$$

Man beachte, dass durch Integration über das Volumen \mathcal{V} die ersten beiden Einträge von (2.146) identisch verschwinden. Die in der rotierenden Masse gespeicherte *rotatorische kinetische Energie* lautet

$$T_r = \frac{1}{2}\theta_{zz}\dot{\varphi}^2. \quad (2.149)$$

Beispiel 2.15. Das Massenträgheitsmoment eines Zylinders mit dem Radius R , der konstanten Dichte ρ und der Länge l lautet (siehe Abbildung 2.39)

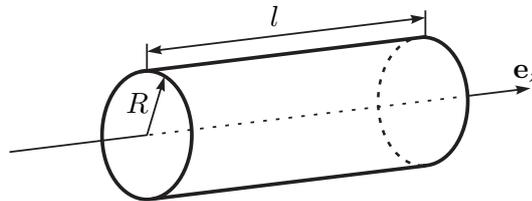


Abbildung 2.39: Zum Massenträgheitsmoment eines Zylinders.

$$\theta_{zz} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \rho r \, dr \, d\varphi \, dz = \rho \frac{R^4 \pi}{2} l = \frac{1}{2} m R^2. \quad (2.150)$$

Aufgabe 2.16. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment θ einer homogenen Kugel mit dem Radius R und der Dichte ρ bezüglich einer Achse durch den Kugelmittelpunkt.

Lösung von Aufgabe 2.16.

$$\theta = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 = \frac{2}{5} m R^2 \quad (2.151)$$

Im Weiteren betrachte man den Starrkörper von Abbildung 2.40. Der Ursprung S des Koordinatensystems $(Sx^{(S)}y^{(S)}z^{(S)})$ beschreibt dabei den Schwerpunkt des Körpers (siehe auch (2.57)) und über die Beziehung

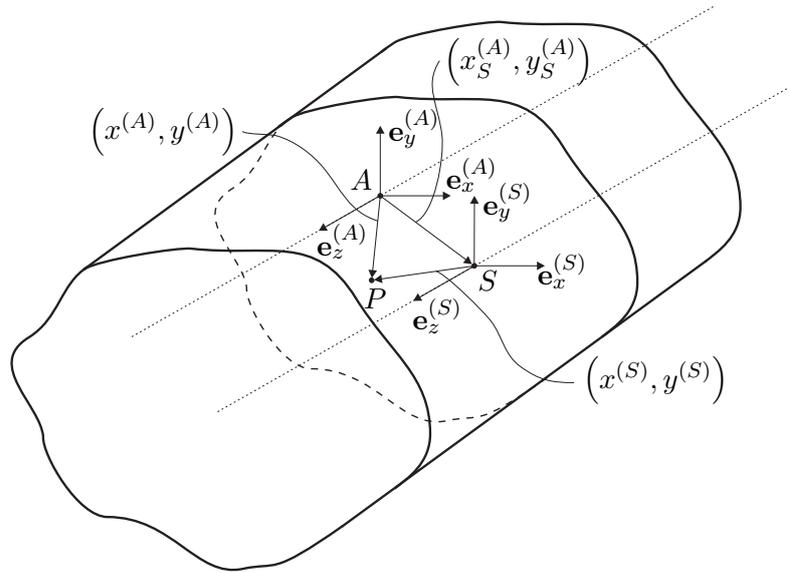


Abbildung 2.40: Zum Satz von Steiner.

$$\theta_{zz}^{(S)} = \int_{\mathcal{V}} (r^{(S)})^2 dm = \int_{\mathcal{V}} \left((x^{(S)})^2 + (y^{(S)})^2 \right) dm \quad (2.152)$$

kann das Massenträgheitsmoment um die $\mathbf{e}_z^{(S)}$ -Achse errechnet werden. Möchte man nun das Massenträgheitsmoment $\theta_{zz}^{(A)}$ desselben Körpers bezüglich der parallelen $\mathbf{e}_z^{(A)}$ -Achse des Koordinatensystems $(Ax^{(A)}y^{(A)}z^{(A)})$ berechnen (siehe Abbildung 2.40), dann folgt

$$\theta_{zz}^{(A)} = \int_{\mathcal{V}} (r^{(A)})^2 dm = \int_{\mathcal{V}} \left((x^{(A)})^2 + (y^{(A)})^2 \right) dm \quad (2.153)$$

bzw. mit $x^{(A)} = x_S^{(A)} + x^{(S)}$ und $y^{(A)} = y_S^{(A)} + y^{(S)}$ erhält man

$$\begin{aligned} \theta_{zz}^{(A)} &= \int_{\mathcal{V}} \left((x_S^{(A)})^2 + (y_S^{(A)})^2 \right) dm + 2 \int_{\mathcal{V}} (x_S^{(A)} x^{(S)} + y_S^{(A)} y^{(S)}) dm \\ &\quad + \int_{\mathcal{V}} \left((x^{(S)})^2 + (y^{(S)})^2 \right) dm \\ &= \left((x_S^{(A)})^2 + (y_S^{(A)})^2 \right) m + 2x_S^{(A)} \underbrace{\int_{\mathcal{V}} x^{(S)} dm}_{=0} + 2y_S^{(A)} \underbrace{\int_{\mathcal{V}} y^{(S)} dm}_{=0} + \theta_{zz}^{(S)}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Gleichung (2.154) zeigt, dass sich das Massenträgheitsmoment $\theta_{zz}^{(A)}$ bezüglich der $\mathbf{e}_z^{(A)}$ -Achse aus der Summe des Massenträgheitsmoments $\theta_{zz}^{(S)}$ um die $\mathbf{e}_z^{(S)}$ -Achse durch den Schwerpunkt S und der Multiplikation aus der Gesamtmasse m mit dem quadratischen Abstand $(x_S^{(A)})^2 + (y_S^{(A)})^2$ von der Achse $\mathbf{e}_z^{(A)}$ zur Achse $\mathbf{e}_z^{(S)}$ ergibt. Dieser Zusammenhang ist in der Literatur auch unter dem Namen *Satz von Steiner* zu finden.

Beispiel 2.16. Abbildung 2.41 zeigt einen Starrkörper bestehend aus vier symmetrisch angeordneten Vollzylindern jeweils mit der Masse m und dem Radius R , deren Mittelpunkte sich im Abstand H von der Drehachse \mathbf{e}_z befinden.

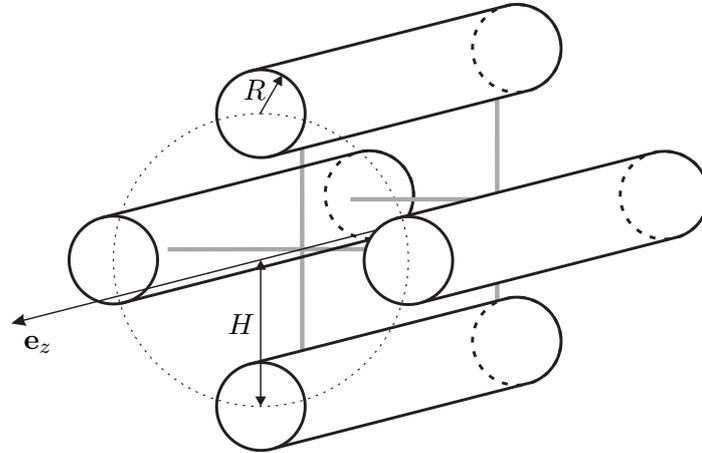


Abbildung 2.41: Starrkörper aus vier symmetrischen Zylindern.

Es sei angenommen, dass die Verbindungsstege zwischen den Zylindern masselos sind. Das Massenträgheitsmoment eines Vollzylinders bezüglich der \mathbf{e}_z -Achse durch den Schwerpunkt lautet gemäß (2.150) $\theta_{zz}^{(S)} = \frac{1}{2}mR^2$. Nach dem Satz von Steiner erhält man somit für das Massenträgheitsmoment des Gesamtkörpers

$$\theta_{zz} = 4 \frac{1}{2} m R^2 + 4 H^2 m = 2m(R^2 + 2H^2). \quad (2.155)$$

Beispiel 2.17. Abbildung 2.42 zeigt einen reibungsfrei gelagerten, quaderförmigen Pendelstab mit der homogenen Dichte ρ_S und den geometrischen Abmessungen Länge l_S , Breite b_S und Höhe h_S .

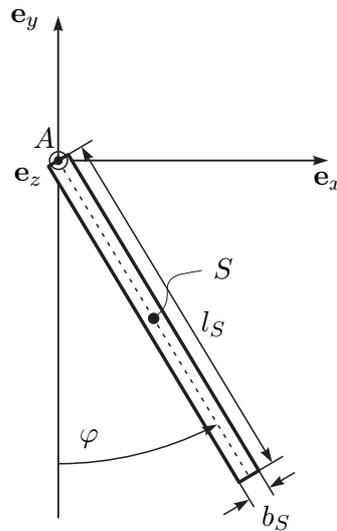


Abbildung 2.42: Pendelstab.

Zur Berechnung der kinetischen Energie sollen in weiterer Folge zwei Varianten vorgestellt werden. In der ersten Variante berechne man das Massenträgheitsmoment des Pendelstabes $\theta_{S,zz}^{(A)}$ um die Drehachse (\mathbf{e}_z -Achse)

$$\theta_{S,zz}^{(A)} = \rho_S \int_{-h_S/2}^{h_S/2} \int_{-l_S}^0 \int_{-b_S/2}^{b_S/2} (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho_S \left(\frac{1}{3} l_S^3 b_S h_S + \frac{1}{12} b_S^3 l_S h_S \right) \quad (2.156)$$

und damit errechnet sich die kinetische Energie gemäß (2.149) zu

$$T = \frac{1}{2} \theta_{S,zz}^{(A)} \dot{\varphi}^2. \quad (2.157)$$

Bei der zweiten Variante stellt man vorerst den Ortsvektor \mathbf{r}_S vom Ursprung 0 des Inertialsystems ($0xyz$) zum Schwerpunkt S des Pendelstabes auf

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} l_S/2 \sin(\varphi) \\ -l_S/2 \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

und berechnet den translatorischen Anteil der kinetischen Energie gemäß (2.82) zu

$$T_t = \frac{1}{2} m_S \dot{\mathbf{r}}_S^T \dot{\mathbf{r}}_S = \frac{1}{2} m_S \frac{l_S^2}{4} \dot{\varphi}^2 \quad (2.159)$$

mit der Pendelmasse $m_S = \rho_S l_S b_S h_S$. Wenn man nun den translatorischen Anteil der kinetischen Energie T_t um den rotatorischen Anteil der kinetischen Energie gemäß (2.149) ergänzt, muss man beachten, dass nun das Massenträgheitsmoment $\theta_{S,zz}^{(S)}$ bezüglich des Schwerpunktes S (also bezüglich einer Drehachse parallel zur \mathbf{e}_z -Achse

durch den Schwerpunkt S) berechnet werden muss

$$\theta_{S,zz}^{(S)} = \rho_S \int_{-h_S/2}^{h_S/2} \int_{-l_S/2}^{l_S/2} \int_{-b_S/2}^{b_S/2} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \rho_S \left(\frac{1}{12} l_S^3 b_S h_S + \frac{1}{12} b_S^3 l_S h_S \right) \quad (2.160)$$

und damit der rotatorische Anteil der kinetischen Energie zu

$$T_r = \frac{1}{2} \theta_{S,zz}^{(S)} \dot{\varphi}^2 \quad (2.161)$$

folgt. Die kinetische Energie des Pendelstabes lautet demnach

$$\begin{aligned} T &= T_t + T_r \\ &= \frac{1}{8} \rho_S b_S h_S l_S^3 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \rho_S \left(\frac{1}{12} l_S^3 b_S h_S + \frac{1}{12} b_S^3 l_S h_S \right) \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{3} \rho_S b_S h_S l_S^3 + \frac{1}{12} \rho_S b_S^3 l_S h_S \right)}_{=\theta_{S,zz}^{(A)}} \dot{\varphi}^2 . \end{aligned} \quad (2.162)$$

Es sei angemerkt, dass der Zusammenhang

$$\theta_{S,zz}^{(A)} = \theta_{S,zz}^{(S)} + m_S \frac{l_S^2}{4} \quad (2.163)$$

gerade dem Satz von Steiner entspricht, siehe (2.154).

Generell ist zu beachten, dass bei der Berechnung der kinetischen Energie als Summe aus einem translatorischen und einem rotatorischen Anteil das Massenträgheitsmoment immer bezüglich der in den Schwerpunkt parallel verschobenen Drehachse zu verwenden ist. Dies ist insbesondere in weiterer Folge bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichungen von essentieller Bedeutung!

Beispiel 2.18. Als Beispiel betrachte man den Antriebsstrang von Abbildung 2.43.

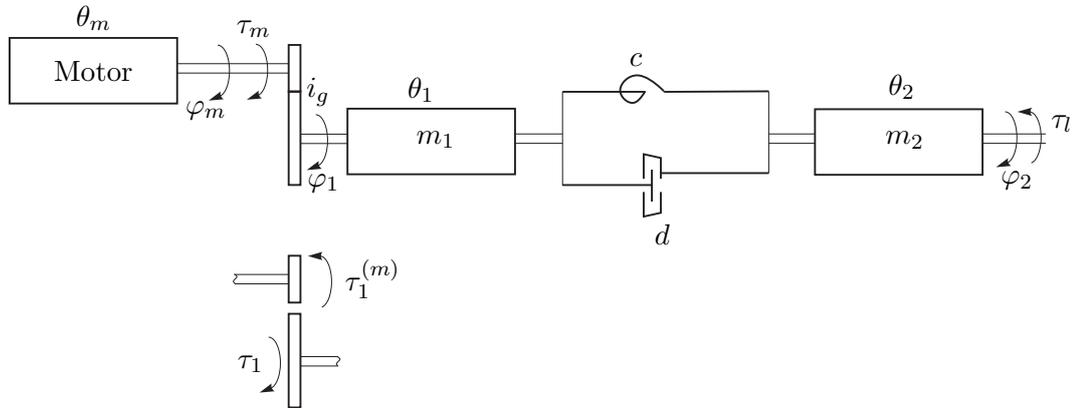


Abbildung 2.43: Antriebsstrang.

Ein Motor mit dem Massenträgheitsmoment θ_m erzeugt ein Drehmoment τ_m und treibt über ein verlustloses Getriebe mit der Getriebeübersetzung i_g (Verhältnis von Antriebsdrehzahl zu Abtriebsdrehzahl) eine Masse mit dem Massenträgheitsmoment θ_1 an.

Diese Masse ist über eine lineare Drehfeder mit der Federkonstanten $c > 0$ und einem drehwinkelgeschwindigkeitsproportionalen Drehdämpfer mit der Dämpferkonstanten $d > 0$ mit einer weiteren Masse mit dem Massenträgheitsmoment θ_2 verbunden, auf die das Lastmoment τ_l wirkt. Schneidet man das Getriebe auf (siehe Abbildung 2.43), so wirkt auf der Primärseite das Drehmoment $\tau_1^{(m)}$. Da das Getriebe als verlustlos angenommen wurde, wirkt zufolge der Getriebeübersetzung

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{i_g} \dot{\varphi}_m \quad (2.164)$$

auf der Abtriebsseite das Drehmoment

$$\tau_1 \dot{\varphi}_1 = \tau_1^{(m)} \dot{\varphi}_m \quad \text{bzw.} \quad \tau_1 = \tau_1^{(m)} i_g . \quad (2.165)$$

Wendet man nun für die beiden Massen und den Motor getrennt den Drehimpulserhaltungssatz (2.134) an, so folgt

$$\theta_m \ddot{\varphi}_m = \tau_m - \tau_1^{(m)} \quad (2.166a)$$

$$\theta_1 \ddot{\varphi}_1 = \tau_1 - c(\varphi_1 - \varphi_2) - d(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \quad (2.166b)$$

$$\theta_2 \ddot{\varphi}_2 = c(\varphi_1 - \varphi_2) + d(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \tau_l \quad (2.166c)$$

bzw. durch Elimination von $\tau_1^{(m)}$, τ_1 und φ_m folgt

$$\tau_1 = \tau_1^{(m)} i_g = \tau_m i_g - \theta_m i_g^2 \ddot{\varphi}_1 \quad (2.167)$$

und

$$(\theta_1 + i_g^2 \theta_m) \ddot{\varphi}_1 = \tau_m i_g - c(\varphi_1 - \varphi_2) - d(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \quad (2.168a)$$

$$\theta_2 \ddot{\varphi}_2 = c(\varphi_1 - \varphi_2) + d(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \tau_l. \quad (2.168b)$$

In Matrixschreibweise lässt sich (2.168) gemäß (2.121) kompakt in der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{b}_e \tau_l + \mathbf{b}_u \tau_m \quad (2.169)$$

mit $\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2]^T$, $\mathbf{M} = \text{diag}(\theta_1 + i_g^2 \theta_m, \theta_2)$ und

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d & -d \\ -d & d \end{bmatrix}, \mathbf{b}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_u = \begin{bmatrix} i_g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

angeben.

Aufgabe 2.17. Eine Kugel der Masse m mit dem Radius R rollt eine schiefe Ebene hinab, siehe Abbildung 2.44. Geben Sie die Bewegungsgleichung für φ unter Vernachlässigung der Rollreibung an und bestimmen Sie den Haftreibungskoeffizienten μ_H , für den ein Rollen möglich ist.

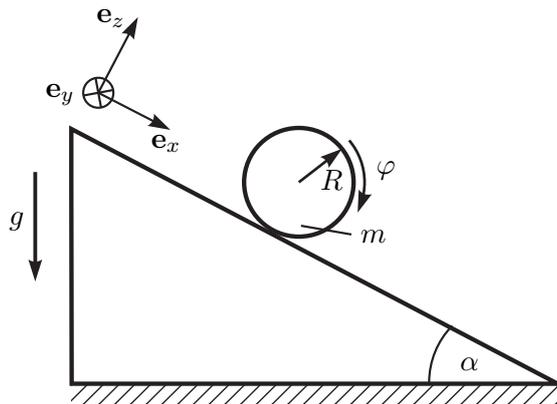


Abbildung 2.44: Rollende Kugel.

Lösung von Aufgabe 2.17.

$$\ddot{\varphi} = \frac{5}{7R} g \sin(\alpha) \quad \text{für} \quad \mu_H \geq \frac{2}{7} \tan(\alpha)$$

Hinweis: Schneiden Sie die Kugel frei und stellen Sie den Impulserhaltungssatz in \mathbf{e}_x - und \mathbf{e}_z -Richtung des eingezeichneten Koordinatensystems sowie den Drehimpulserhaltungssatz um den Kugelmittelpunkt auf.

2.3 Euler-Lagrange Gleichungen

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das zweite Newtonsche Gesetz (2.62) angewandt auf ein Teilchen der Masse (Punktmasse) m in dem kartesischen Inertialkoordinatensystem $(0xyz)$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}, \quad (2.171)$$

wobei $\mathbf{f} = [f_x, f_y, f_z]^T$ die Summe aller auf die Punktmasse wirkenden Kräfte und $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ den Positionsvektor vom Koordinatenursprung 0 zum Teilchen bezeichnet. Die Lage einer Punktmasse, deren Bewegung keinen Zwängen unterliegt, ist durch die Angabe der drei translatorischen Verschiebungen bezüglich des Inertialkoordinatensystems eindeutig bestimmt. Man sagt dann auch, die *Punktmasse* besitzt *3 Freiheitsgrade*. Im Gegensatz dazu wird die Konfiguration eines frei beweglichen *Starrkörpers* durch *6 Freiheitsgrade* beschrieben, nämlich 3 Freiheitsgrade für die translatorische Verschiebung und 3 Freiheitsgrade der Rotation zur Beschreibung der Orientierung des Starrkörpers zum Inertialsystem. Nun unterliegt die Bewegung eines Starrkörpersystems im Allgemeinen *Zwangsbedingungen*, die mit in Betracht gezogen werden müssen. Man betrachte dazu beispielsweise die Bewegung einer Masse auf einer schiefen Ebene gemäß Abbildung 2.45(a) mit der Zwangsbedingung $y = a(1 - x/b)$ oder das sphärische Pendel gemäß Abbildung 2.45(b) mit der Zwangsbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \quad (2.172)$$

Zwei Masseteilchen i und j eines Starrkörpers, die durch eine Linie der festen Länge

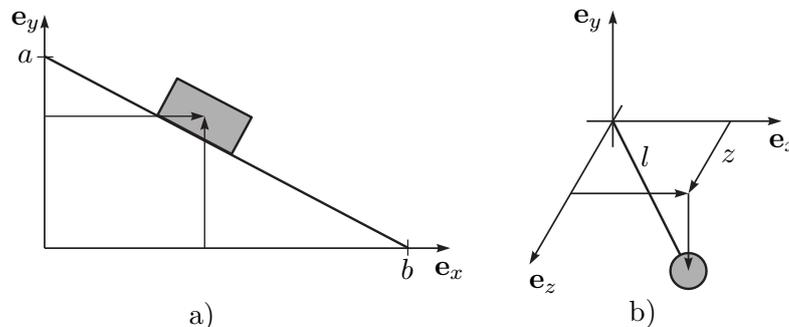


Abbildung 2.45: Zu den Zwangsbedingungen.

l_{ij} miteinander verbunden werden können, erfüllen die Zwangsbedingung $\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|_2^2 = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = l_{ij}^2$. Lässt sich eine Zwangsbedingung in der Form

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0 \quad (2.173)$$

ausdrücken, dann spricht man von einer *holonomen* Zwangsbedingung. Zwangsbedingungen, die nicht in dieser Art darstellbar sind, werden als *nichtholonom* bezeichnet. Dazu

zählen unter anderem Ungleichungsbedingungen

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) \geq 0, \quad (2.174)$$

wie sie beispielsweise bei der Bewegung eines Partikels in einer Hohlkugel mit dem Radius a in der Form $a^2 - \|\mathbf{r}\|_2^2 \geq 0$ auftreten. Auch Zwangsbedingungen, die explizit von der Geschwindigkeit abhängen und nicht integrierbar sind, d. h.,

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, t) = 0, \quad (2.175)$$

sind nichtholonome. In manchen Literaturstellen werden Zwangsbedingungen gemäß (2.173) und (2.175) auch als *geometrische* und *kinematische Zwangsbedingungen* klassifiziert. Ein typischer Fall für eine nichtholonome (kinematische) Zwangsbedingung ist das Rollen einer Scheibe auf einer Ebene.

Man überzeugt sich nun leicht, dass ein System von N Punktmassen, das frei von Zwang ist, $3N$ unabhängige Koordinaten oder Freiheitsgrade besitzt. Existieren nun beispielsweise $(3N - n)$ holonome Zwangsbedingungen der Form

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad j = 1, \dots, (3N - n), \quad (2.176)$$

dann ist unmittelbar einsichtig, dass

- (A) die Koordinaten nicht mehr linear unabhängig voneinander sind und
- (B) zur Einhaltung der Zwangsbedingungen entsprechende Zwangskräfte auftreten müssen, die a priori nicht bekannt sind.

Mit Hilfe der $(3N - n)$ holonomen Zwangsbedingungen ist es nun möglich, $(3N - n)$ der $3N$ Koordinaten zu eliminieren bzw. n neue unabhängige Koordinaten q_i , $i = 1, \dots, n$ einzuführen, durch die sämtliche (alte) Koordinaten in der Form

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = \mathbf{r}_j(\mathbf{q}, t), \quad j = 1, \dots, N \quad (2.177)$$

ausgedrückt werden können. Man sagt dann auch, das System besitzt n *Freiheitsgrade* und die n neuen unabhängigen Koordinaten q_i , $i = 1, \dots, n$ bzw. $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ werden als *generalisierte Koordinaten* bezeichnet.

Zerlegt man gemäß (B) die auf die Masseteilchen wirkenden Kräfte \mathbf{f}_i in *eingeprägte Kräfte* $\mathbf{f}_i^{(e)}$ und *Zwangskräfte* $\mathbf{f}_i^{(z)}$, dann lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen (2.171) für das System von N Punktmassen

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i^{(e)} + \mathbf{f}_i^{(z)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.178)$$

Man beachte, dass durch (2.176) und (2.178) lediglich $(6N - n)$ Gleichungen zur Bestimmung der $6N$ Unbekannten \mathbf{r}_i und $\mathbf{f}_i^{(z)}$, $i = 1, \dots, N$ zur Verfügung stehen. Betrachtet man beispielsweise die reibungsfrei gleitende Masse auf der schiefen Ebene gemäß Abbildung 2.46(a), dann hat man für die unbekanntenen Größen x , y sowie $f_x^{(z)}$, $f_y^{(z)}$ zwei Bewegungsgleichungen und eine Zwangsbedingung. Die fehlende Gleichung ist durch die Tatsache gegeben, dass die Zwangskraft $\mathbf{f}^{(z)}$ senkrecht zur schiefen Ebene steht. Generell erhält man

die fehlenden Gleichungen aus dem *Prinzip der virtuellen Arbeit*, welches besagt, dass die *Summe der durch die Zwangskräfte verrichteten Arbeit gleich Null ist*. Man beachte aber, dass diese Aussage nicht gültig ist, wenn die Zwangsbedingungen zeitabhängig sind, also z. B. die schiefe Ebene sich mit der Zeit verändert. Aus diesem Grund führt man den Begriff der *virtuellen Verrückung* eines Systems ein. Dabei wird das System zu einem Zeitpunkt t festgehalten und in diesem festgehaltenen Zustand wird anschließend eine willkürliche infinitesimale Verschiebung $\delta \mathbf{r}_i$, die mit den Zwangsbedingungen (2.173) konsistent ist, durchgeführt. Beispielsweise für das sphärische Pendel von Abbildung 2.46(b) bedeutet dies, dass folgende Beziehung

$$(x + \delta x)^2 + (y + \delta y)^2 + (z + \delta z)^2 = l^2 \quad (2.179)$$

erfüllt sein muss. Unter Berücksichtigung von (2.172) und unter Vernachlässigung von Termen zweiter Ordnung, d. h. $(\delta x)^2 = (\delta y)^2 = (\delta z)^2 = 0$, folgt (2.179) zu

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0. \quad (2.180)$$

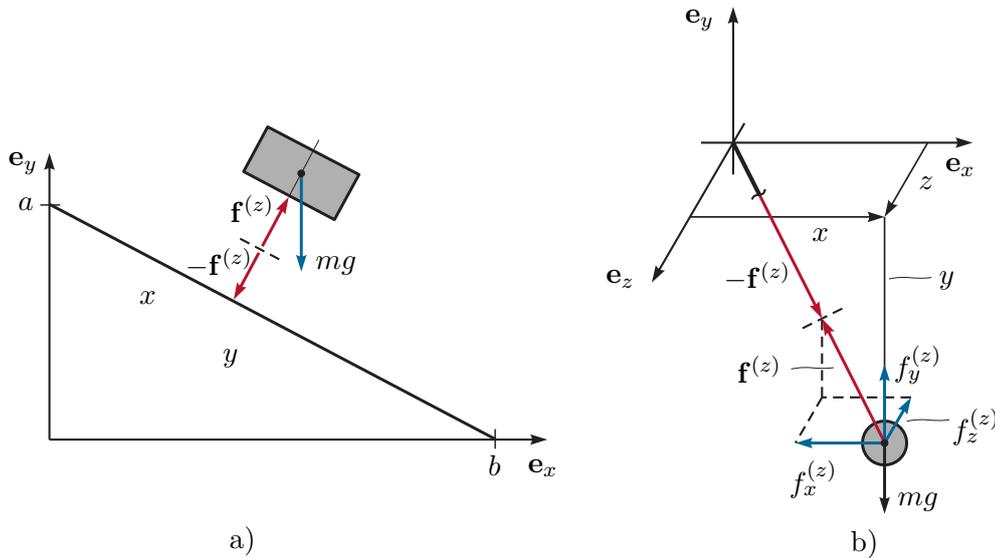


Abbildung 2.46: Zu den Zwangskräften.

Das *Prinzip der virtuellen Arbeit* besagt nun, dass die Summe der durch die Zwangskräfte $\mathbf{f}_i^{(z)}$ verrichteten Arbeit $\delta W^{(z)}$ bei einer virtuellen Verrückung gleich Null ist, d. h. für das System von N Punktmassen gilt

$$\delta W^{(z)} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i^{(z)})^T \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (2.181)$$

Betrachtet man wiederum das sphärische Pendel von Abbildung 2.46(b), so muss gemäß (2.181) offensichtlich die Bedingung

$$f_x^{(z)} \delta x + f_y^{(z)} \delta y + f_z^{(z)} \delta z = 0 \quad (2.182)$$

erfüllt sein. Löst man nun unter der Annahme $z \neq 0$ (2.180) nach δz auf und setzt dies in (2.182) ein, so folgt

$$\left(f_x^{(z)} - \frac{x}{z}f_z^{(z)}\right)\delta x + \left(f_y^{(z)} - \frac{y}{z}f_z^{(z)}\right)\delta y = 0 \quad (2.183)$$

bzw. wegen der linearen Unabhängigkeit von δx und δy müssen die Bedingungen

$$f_x^{(z)} = \frac{x}{z}f_z^{(z)} \quad \text{und} \quad f_y^{(z)} = \frac{y}{z}f_z^{(z)} \quad (2.184)$$

gelten. Dies bedeutet aber, dass die Zwangskraft $\mathbf{f}^{(z)} = [f_x^{(z)}, f_y^{(z)}, f_z^{(z)}]^\top$ in Richtung des masselosen Stabes der Länge l zeigen muss, vergleiche dazu Abbildung 2.46(b). Auf analoge Art und Weise kann man zeigen, dass die Zwangskraft bei der reibungsfrei gleitenden Masse auf der schiefen Ebene senkrecht auf die Ebene steht (Abbildung 2.46(a)).

Häufig ist man an den Zwangskräften nicht interessiert, weshalb man diese aus (2.178) berechnet und in (2.181) einsetzt. Man erhält dann das sogenannte *D'Alembertsche Prinzip* in der Form

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{f}_i^{(e)})^\top \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (2.185)$$

Nimmt man nun an, dass das System n Freiheitsgrade besitzt und gemäß (2.177) durch die generalisierten Koordinaten q_j , $j = 1, \dots, n$ beschrieben werden kann, dann gilt für die virtuelle Verrückung (man beachte, dass bei der virtuellen Verrückung die Zeit t konstant gehalten wird)

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.186)$$

und (2.185) folgt zu

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^\top \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n f_{q,j} \delta q_j \quad \text{mit} \quad f_{q,j} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i^{(e)})^\top \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.187)$$

Dabei bezeichnet $f_{q,j}$, $j = 1, \dots, n$ eine Komponente der *generalisierten Kraft* $\mathbf{f}_q = [f_{q,1}, f_{q,2}, \dots, f_{q,n}]^\top$, die nicht notwendigerweise die Dimension einer Kraft aufweisen muss, da auch die zugehörige generalisierte Koordinate q_j nicht unbedingt die Dimension einer Länge hat (deshalb auch der Name generalisiert). Das Produkt $\dot{q}_j f_{q,j}$ muss aber auf jeden Fall eine Leistung ergeben.

Wendet man die Produktregel der Differentiation auf die linke Seite von (2.187) an, so erhält man

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^\top \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} \left[m_i \dot{\mathbf{r}}_i^\top \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] - m_i \dot{\mathbf{r}}_i^\top \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right). \quad (2.188)$$

Unter Verwendung der Geschwindigkeiten \mathbf{v}_i

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (2.189)$$

bzw.

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \quad (2.190)$$

folgt (2.188) zu

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} \left[m_i \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] - m_i \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (2.191)$$

mit der *kinetischen Energie* T gemäß (2.81)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i . \quad (2.192)$$

Setzt man (2.191) in (2.187) ein, dann ergibt sich

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - f_{q,j} \right) \delta q_j = 0 \quad (2.193)$$

und da die virtuellen Verrückungen δq_j , $j = 1, \dots, n$ unabhängig voneinander sind, erhält man unmittelbar n gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung (*Euler-Lagrange Gleichungen*), die die Bewegung des Systems beschreiben

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = f_{q,j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.194)$$

mit den *generalisierten Koordinaten* q_j und den *generalisierten Geschwindigkeiten* \dot{q}_j . Schreibt man die generalisierten Kräfte \mathbf{f}_q als Summe von generalisierten Kräften, die aus einer *skalaren Potentialfunktion* $V(\mathbf{q})$ hergeleitet werden können (siehe (2.89) und (2.90)), und aus extern eingepprägten generalisierten Kräften sowie dissipativen generalisierten Kräften (siehe Abschnitt 2.2.5), zusammengefasst im Vektor \mathbf{f}_{np} , d. h.

$$f_{q,j} = f_{np,j} - \frac{\partial}{\partial q_j} V , \quad (2.195)$$

dann können die Euler-Lagrange Gleichungen (2.194) in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = f_{np,j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.196)$$

mit der *Lagrange-Funktion* $L = T - V$ (Lagrange-Funktion = kinetische Energie minus potentielle Energie) formuliert werden.

Für $f_{np,j} = 0$, $j = 1, \dots, n$ in (2.196) spricht man auch von einem *konservativen System*, ein System, bei dem sich die Gesamtenergie $E = T + V$ zufolge der Bewegung nicht ändert bzw. keine Dissipation im System auftritt.

Bemerkung 2.1. Die Euler-Lagrange Gleichungen (2.196) führen auch dann noch zu den richtigen Bewegungsgleichungen, wenn die generalisierten Kräfte nicht aus einem Potential der Form $V(\mathbf{q})$ herrühren, sondern aus einem generalisierten Potential $\bar{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, das folgende Bedingung

$$f_{q,j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} \bar{V} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \bar{V} \right) \quad (2.197)$$

erfüllt. Dies ist beispielsweise der Fall bei der Beschreibung elektromagnetischer Kräfte auf bewegte Ladungen.

Bemerkung 2.2. Die Euler-Lagrange Gleichungen (2.194) lassen sich auch über ein Variationsprinzip, nämlich dem *Hamiltonschen Prinzip*, herleiten. Dieses besagt in seiner integralen Formulierung für konservative Systeme, dass die Bewegung eines Systems zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 so erfolgt, dass das Linienintegral $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ mit $L = T - V$ für die durchlaufene Bahn ein Extremum ist. Es soll an dieser Stelle nicht näher darauf eingegangen werden, doch kann diese Formulierung formal sehr elegant auf den Fall verteilt-parametrischer Systeme (beschrieben durch partielle Differentialgleichungen) erweitert werden.

Beispiel 2.19. Als einfaches Beispiel betrachte man das sphärische Pendel von Abbildung 2.47 mit der Punktmasse m und der Länge l sowie einer äußeren Kraft \mathbf{f}_e , die immer in Richtung der negativen \mathbf{e}_x -Achse wirke. Die Punktmasse hat drei Freiheitsgrade und über den starren Stab der Länge l ergibt sich eine holonome Zwangsbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$. Damit hat das sphärische Pendel zwei Freiheitsgrade ($n = 2$) und als generalisierte Koordinaten werden die beiden Winkel θ und φ gewählt.

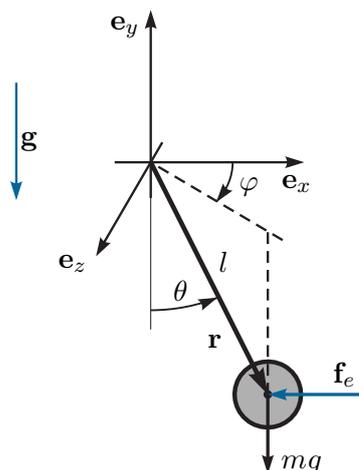


Abbildung 2.47: Sphärisches Pendel mit äußerer Kraft.

Die Berechnung der kinetischen Energie T kann sehr einfach dadurch erfolgen, dass

man den Positionsvektor \mathbf{r} vom Ursprung 0 des Inertialkoordinatensystems ($0xyz$) zur Punktmasse in der Form

$$\mathbf{r} = [l \sin(\theta) \cos(\varphi), -l \cos(\theta), l \sin(\theta) \sin(\varphi)]^T \quad (2.198)$$

aufstellt. Die kinetische Energie errechnet sich dann nach (2.192) zu

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)) . \quad (2.199)$$

Nimmt man an, dass für $\theta = 0$ die potentielle Energie gleich Null ist, dann folgt mit der Erdbeschleunigung g die potentielle Energie zu

$$V = mgl(1 - \cos(\theta)) . \quad (2.200)$$

Die äußere Kraft lautet $\mathbf{f}_e = [-f_{e,x}, 0, 0]^T$ und demnach folgt für die generalisierten Kräfte nach (2.187)

$$f_\theta = \mathbf{f}_e^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -f_{e,x} l \cos(\theta) \cos(\varphi) \quad , \quad f_\varphi = \mathbf{f}_e^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = f_{e,x} l \sin(\theta) \sin(\varphi) . \quad (2.201)$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen (2.196) lassen sich nun mit Hilfe der Lagrange-Funktion $L = T - V$ in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} L - \frac{\partial}{\partial \theta} L = f_\theta \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L - \frac{\partial}{\partial \varphi} L = f_\varphi \quad (2.202)$$

bzw.

$$ml^2 \ddot{\theta} - ml^2 \dot{\varphi}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + mgl \sin(\theta) = -f_{e,x} l \cos(\theta) \cos(\varphi) \quad (2.203a)$$

$$ml^2 (\ddot{\varphi} \sin^2(\theta) + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\theta)) = f_{e,x} l \sin(\theta) \sin(\varphi) \quad (2.203b)$$

berechnen. Dabei ergeben sich immer gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die im Allgemeinen die zweiten Zeitableitungen der generalisierten Koordinaten implizit beinhalten. Für eine *Zustandsdarstellung* der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ mit dem Zustand \mathbf{x} und dem Eingang \mathbf{u} gemäß (1.5) wählt man typischerweise die generalisierten Koordinaten q_j , $j = 1, \dots, n$ und die generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j , $j = 1, \dots, n$ als Zustandsgrößen. Für das Beispiel des sphärischen Pendels sind die Zustandsgrößen durch $\mathbf{x} = [\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}]^T$ und die Eingangsgröße durch $u = f_{e,x}$ gegeben. Das zu (2.203b) äquivalente System expliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen

erster Ordnung lautet dann

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.204a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{ml^2} \left(-ul \cos(x_1) \cos(x_3) + ml^2 x_4^2 \cos(x_1) \sin(x_1) - mgl \sin(x_1) \right) \quad (2.204b)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (2.204c)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{ml^2 \sin^2(x_1)} \left(ul \sin(x_1) \sin(x_3) - 2ml^2 x_4 x_2 \cos(x_1) \sin(x_1) \right) . \quad (2.204d)$$

Beispiel 2.20. Abbildung 2.48 zeigt eine Kugel mit der Masse m_K und dem Radius r_K , die auf einem drehbar gelagerten Balken rollt. Das Massenträgheitsmoment des Balkens bezüglich der Drehachse (\mathbf{e}_z -Achse) sei $\theta_{B,zz}$ und die Eingangsgröße ist durch das externe Drehmoment $\tau_e^{(0)}$ um die Drehachse gegeben. Das System besitzt zwei mechanische Freiheitsgrade und als generalisierte Koordinaten wird der Balkenwinkel φ_1 sowie der Abstand r des Kugelmittelpunktes von der $\bar{\mathbf{e}}_y$ -Achse des balkenfesten Koordinatensystems ($0\bar{x}\bar{y}\bar{z}$) gewählt.

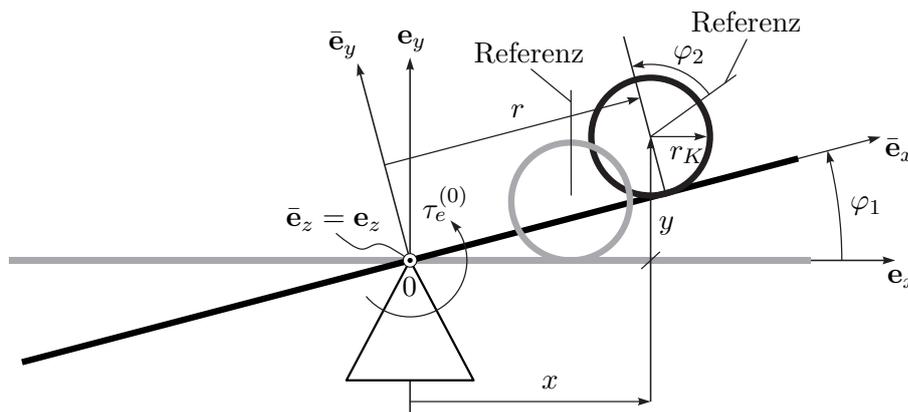


Abbildung 2.48: Kugel auf Balken.

Die kinetische Energie setzt sich aus dem translatorischen Anteil $T_{t,K}$ und dem rotatorischen Anteil $T_{r,K}$ der Kugel sowie dem rotatorischen Anteil $T_{r,B}$ des Balkens zusammen. Zur Berechnung von $T_{t,K}$ wird zuerst der Vektor vom Ursprung 0 des Inertialkoordinatensystems ($0xyz$) zum Kugelmittelpunkt (Schwerpunkt) in der Form

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi_1) - r_K \sin(\varphi_1) \\ r \sin(\varphi_1) + r_K \cos(\varphi_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.205)$$

aufgestellt. Der translatorische Anteil der kinetischen Energie der Kugel $T_{t,K}$ errechnet sich dann gemäß (2.192) zu

$$T_{t,K} = \frac{1}{2} m_K \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} m_K \left(r^2 \dot{\varphi}_1^2 + (\dot{r} - r_K \dot{\varphi}_1)^2 \right) . \quad (2.206)$$

Für den rotatorischen Anteil der kinetischen Energie der Kugel $T_{r,K}$ beachte man vorerst, dass das Massenträgheitsmoment der Kugel $\theta_{K,zz}$ bezüglich der Drehachse (parallel zur \mathbf{e}_z -Achse durch den Kugelmittelpunkt) gemäß (2.151) wie folgt lautet

$$\theta_{K,zz} = \frac{2}{5} m_K r_K^2. \quad (2.207)$$

Um nun (2.149) anwenden zu können, muss man die Drehwinkelgeschwindigkeit der Kugel bezüglich der Drehachse (\mathbf{e}_z -Achse) berechnen. Zuzufolge der Rollbewegung der Kugel gilt die Beziehung

$$\dot{r} = -r_K \dot{\varphi}_2, \quad (2.208)$$

d. h., bezüglich des balkenfesten Koordinatensystems ($0\bar{x}\bar{y}\bar{z}$) dreht sich die Kugel mit der Drehwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_2$ um die \mathbf{e}_z -Achse. Da sich aber auch der Balken mit der Drehwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_1$ um die \mathbf{e}_z -Achse dreht, ergibt sich die effektive Drehwinkelgeschwindigkeit der Kugel aus der Summe beider Drehungen zu $\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2$ und der rotatorische Anteil der kinetischen Energie lautet

$$T_{r,K} = \frac{1}{2} \theta_{K,zz} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 = \frac{1}{2} \theta_{K,zz} \left(\dot{\varphi}_1 - \frac{\dot{r}}{r_K} \right)^2. \quad (2.209)$$

Der rotatorische Anteil der kinetischen Energie des Balkens errechnet sich zu

$$T_{r,B} = \frac{1}{2} \theta_{B,zz} \dot{\varphi}_1^2. \quad (2.210)$$

Nimmt man an, dass für $\varphi_1 = 0$ die potentielle Energie gleich Null ist, dann folgt mit der Erdbeschleunigung g die potentielle Energie zu

$$V = m_K g (r \sin(\varphi_1) + r_K \cos(\varphi_1)) - m_K g r_K. \quad (2.211)$$

Mit der Lagrange-Funktion

$$L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) = T_{t,K} + T_{r,K} + T_{r,B} - V \quad (2.212)$$

ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu (siehe (2.196))

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) \right) - \frac{\partial}{\partial r} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) = 0 \quad (2.213a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_1} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) = \tau_e^{(0)} \quad (2.213b)$$

bzw.

$$\left(m_K + \frac{\theta_{K,zz}}{r_K^2}\right)\ddot{r} - \left(\frac{\theta_{K,zz}}{r_K} + m_K r_K\right)\ddot{\varphi}_1 - m_K r \dot{\varphi}_1^2 + m_K g \sin(\varphi_1) = 0 \quad (2.214a)$$

$$-\left(m_K r_K + \frac{\theta_{K,zz}}{r_K}\right)\ddot{r} + \left(\theta_{K,zz} + \theta_{B,zz} + m_K(r^2 + r_K^2)\right)\ddot{\varphi}_1 \quad (2.214b)$$

$$+ 2m_K r \dot{r} \dot{\varphi}_1 + m_K g(r \cos(\varphi_1) - r_K \sin(\varphi_1)) = \tau_e^{(0)}. \quad (2.214c)$$

Aufgabe 2.18. Bringen Sie das System (2.214c) in Zustandsdarstellung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ mit dem Zustand $\mathbf{x} = [\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}]^T$ und dem Eingang $u = \tau_e^{(0)}$. Berechnen Sie weiters die stationären Ruhelagen des Systems.

Lösung von Aufgabe 2.18. Die Ruhelagen des Systems lauten $\varphi_{1,R} = 0$, $\dot{\varphi}_{1,R} = 0$, r_R ist beliebig, $\dot{r}_R = 0$ und $\tau_{e,R}^{(0)} = gm_K r_R$.

Aufgabe 2.19. Gegeben ist das mechanische System von Abbildung 2.49. Der Wagen hat die Masse m_W , wird über eine Antriebskraft f_e angetrieben und ist mit einer linearen Feder mit der Federkonstanten $c_W > 0$ sowie der entspannten Länge s_{W0} gegenüber dem Inertialsystem befestigt. Im Weiteren sei angenommen, dass die Reibung näherungsweise durch eine geschwindigkeitsproportionale Kraft $f_R = -d_R \dot{s}$, $d_R > 0$ ausgedrückt werden kann. Der reibungsfrei gelagerte Pendelstab sei homogen mit der Dichte ρ_S und quaderförmig mit der Länge l_S , der Breite b_S und der Höhe h_S . Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichungen (2.196).

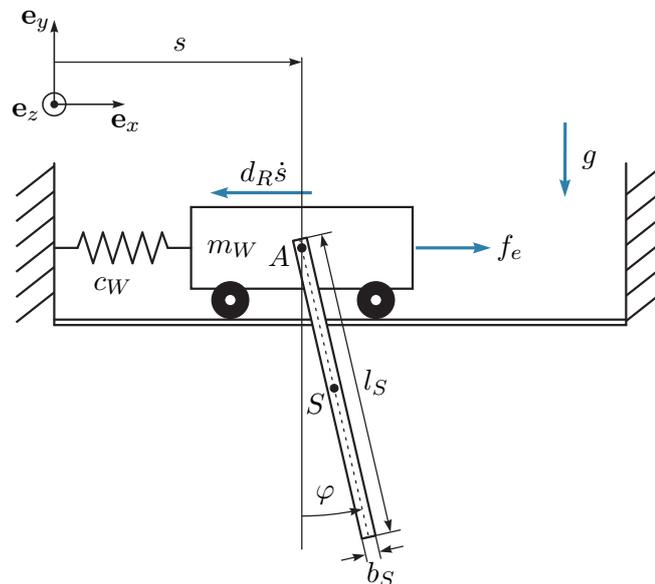


Abbildung 2.49: Wagen mit Pendel.

Lösung von Aufgabe 2.19. Die Masse des Pendels errechnet sich zu $m_S = \rho_S l_S b_S h_S$ und das Massenträgheitsmoment um den Schwerpunkt S (vergleiche Beispiel 2.17) lautet $\theta_{S,zz}^{(S)} = \frac{1}{12} m_S (l_S^2 + b_S^2)$. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich zu

$$(m_W + m_S)\ddot{s} + \frac{1}{2} m_S l_S \cos(\varphi) \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} m_S l_S \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + c_W (s - s_{W0}) = f_e - d_R \dot{s} \quad (2.215a)$$

$$\frac{1}{2} m_S l_S \cos(\varphi) \ddot{s} + \left(\theta_{S,zz}^{(S)} + \frac{1}{4} m_S l_S^2 \right) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} m_S g l_S \sin(\varphi) = 0 . \quad (2.215b)$$

2.4 Literatur

- [2.1] J. Simmonds, *A Brief on Tensor Analysis*, S. Axler, F. Gehring und K. Ribet, Hrsg. New York: Springer, 1994.
- [2.2] O. Bruhns und T. Lehmann, *Elemente der Mechanik I: Einführung, Statik*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1993.
- [2.3] ———, *Elemente der Mechanik II: Elastostatik*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1994.
- [2.4] ———, *Elemente der Mechanik III: Kinetik*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1994.
- [2.5] M. Calkin, *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*. Singapore: World Scientific, 1996.
- [2.6] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und W. A. Wall, *Technische Mechanik 1: Statik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
- [2.7] ———, *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.
- [2.8] ———, *Technische Mechanik 3: Kinetik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [2.9] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und E. A. Werner, *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [2.10] D. Gross, W. Ehlers und P. Wriggers, *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 1: Statik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [2.11] ———, *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 2: Elastostatik, Hydrostatik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.
- [2.12] ———, *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3: Kinetik, Hydromechanik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.
- [2.13] H. Goldstein, *Klassische Mechanik*. Wiesbaden: AULA-Verlag, 1991.
- [2.14] H. Hahn, *Rigid Body Dynamics of Mechanisms: Part 1: Theoretical Basis*. Berlin: Springer, 2002.
- [2.15] ———, *Rigid Body Dynamics of Mechanisms: Part 2: Applications*. Berlin: Springer, 2002.
- [2.16] B. Heimann, W. Gerth und K. Popp, *Mechatronik: Komponenten - Methoden - Beispiele*. Leipzig: Fachbuchverlag, 2003.
- [2.17] R. Isermann, *Mechatronische Systeme: Grundlagen*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [2.18] L. Meirovitch, *Dynamics and Control of Structures*. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- [2.19] A. Shabana, *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

-
- [2.20] W. Schiehlen und P. Eberhard, *Technische Dynamik: Modelle für Regelung und Simulation*. Wiesbaden: Teubner, 2004.
- [2.21] M. Spong und M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [2.22] P. Wellstead, *Physical System Modelling*. London: Academic Press, 1979.
- [2.23] F. Ziegler, *Mechanics of Solids and Fluids*. New York: Springer, 1995.

3 Wärmeübertragung

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen zur Modellierung von Wärmeübertragungsprozessen diskutiert. Unter Wärmeübertragung soll hier der Energietransport in und zwischen Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen zufolge von Temperaturunterschieden verstanden werden. Die Temperatur ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie zufolge der ungeordneten mikroskopischen Bewegung der Atome und Moleküle eines Stoffes.

Gemäß dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik [3.1, 3.2] wird bei Wärmeübertragung Energie vom Ort höherer Temperatur zum Ort geringerer Temperatur transferiert, d. h. es findet ein Temperatúrausgleich statt. Besitzen zwei Körper die gleiche Temperatur, so befinden sie sich im thermischen Gleichgewicht und es findet kein weiterer Temperatúrausgleich statt.

Wärme kann auf drei verschiedene Arten übertragen werden [3.3–3.6]:

1. Wärmeleitung

Der Energietransport durch *Wärmeleitung* stellt eine Interaktion zwischen benachbarten Atomen oder Molekülen eines Stoffes dar. Die von der Temperatur abhängige innere Energie fließt dabei von Atomen oder Molekülen mit höherem Energieniveau zu solchen mit kleinerem Energieniveau, wobei es durch zufällige mikroskopische Bewegungen und Vibrationen fortwährend zu Diffusions- und Kollisionsvorgängen kommt. Wärmeleitung tritt in Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen auf. In festen elektrischen Nichtleitern erfolgt die Interaktion ausschließlich durch Gitterschwingungen; in elektrischen Leitern trägt auch die translatorische Bewegung von Elektronen zur Wärmeleitung bei. Wärmeleitung erfolgt ohne einen makroskopischen Materialstrom.

2. Konvektion

In Fluiden erfolgt der Transport von innerer Energie zusätzlich zu den zufälligen molekularen Diffusionsbewegungen durch makroskopische Materialströme, d. h. durch Massentransport. Wird eine solche Strömung durch eine äußere Einwirkung verursacht (z. B. durch ein Gebläse, eine Pumpe oder die Bewegung eines Fahrzeuges), so spricht man von *erzwungener Konvektion*. Bei *freier Konvektion* hingegen wird die Strömung durch den von temperaturbedingten lokalen Dichteunterschieden hervorgerufenen Auftrieb verursacht. Eine spezielle Form von Konvektion tritt bei Siede- oder Kondensationsvorgängen auf. Hierbei führen Temperaturunterschiede nicht nur zu veränderter Dichte sondern auch zu Übergängen zwischen flüssigem und gasförmigem Aggregatzustand des Fluids.

3. Wärmestrahlung

Unter Wärmestrahlung versteht man den Energietransport mittels elektromagneti-

scher Wellen die durch die innere Energie von Materie, die sich im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht befindet, ausgelöst wurden. Diese Merkmale unterscheiden Wärmestrahlung von anderen elektromagnetischen Wellen. Wärmestrahlen haben eine Wellenlänge im Bereich von $0.1\ \mu\text{m}$ bis $1\ \text{mm}$ (bei Temperaturen von $60\text{--}1000\ \text{K}$ liegen die Wellenlängen im Bereich von $50\text{--}3\ \mu\text{m}$) und transportieren Energie mit Lichtgeschwindigkeit. Wärmestrahlung kann in Festkörpern, Flüssigkeiten, Gasen und im Vakuum auftreten.

Abbildung 3.1 zeigt die drei Arten von Wärmeübertragung am Beispiel einer Gebäudewand mit Radiatorheizung. Der Radiator arbeitet als Wärmequelle und gibt durch thermische Strahlung und freie Konvektion Wärme an die Raumluft und die Gebäudewand ab. In der Wand selbst fließt die Energie hauptsächlich durch Wärmeleitung zur äußeren Gebäudeoberfläche, wo die von einer Windströmung erzwungene Konvektion und gegebenenfalls auch Wärmestrahlung die Energie an die Umgebung abführt. Natürlich können die beteiligten Materialien und Medien auch thermische Energie speichern oder abgeben, was zu einer zeitlichen Änderung ihrer lokalen Temperatur führt (transiente Wärmeübertragung). In diesem Beispiel treten, wie auch in vielen anderen praktischen Anwendungen, mehrere Wärmeübertragungsmechanismen in Kombination auf.

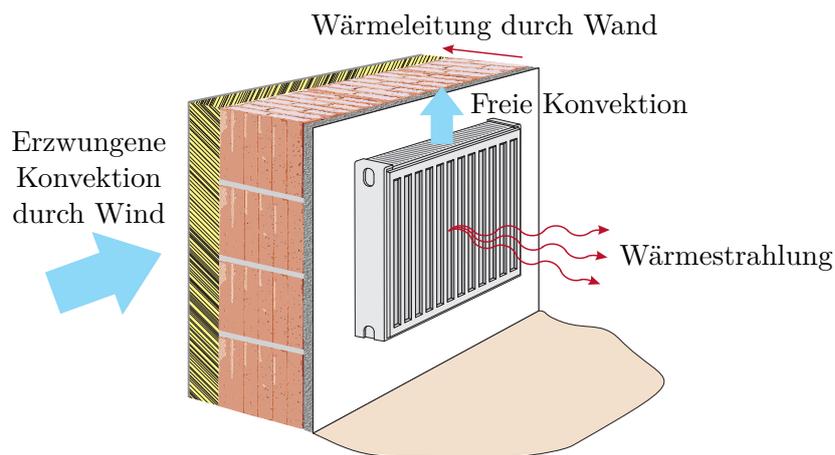


Abbildung 3.1: Arten der Wärmeübertragung.

Abschließend sei erwähnt, dass der Peltier-Effekt, ein thermo-elektrischer Effekt, einen Wärmestrom verursachen kann selbst wenn kein Temperaturunterschied vorhanden ist. Beim Peltier-Effekt wird der Wärmestrom ausschließlich durch die von einer elektrischen Potentialdifferenz ausgelösten Elektronenbewegungen, d. h. durch den Stromfluss, erzeugt.

In der vorliegenden Vorlesung werden Wärmeleitung in Festkörpern und einfache Formulierungen für die Wärmeübertragung an deren Rändern diskutiert. Es werden sowohl transiente als auch stationäre Wärmeübertragungsprobleme untersucht.

3.1 Wärmeleitung

Wärmeleitung erfolgt ohne einen makroskopischen Materialstrom, kann in allen drei Aggregatzuständen eines Stoffes auftreten und wird auch als Wärmediffusion bezeichnet. Wie Jean Baptiste Joseph Fourier 1822 herausfand, ist bei Wärmeleitung die Wärmestromdichte $\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x})$ im Punkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$ proportional zum lokalen Temperaturgradienten [3.3–3.5], d. h.

$$\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T)\nabla T(t, \mathbf{x}) . \quad (3.1)$$

Hierbei ist $T(t, \mathbf{x})$ die Temperatur zum Zeitpunkt t am Ort \mathbf{x} und die symmetrische Matrix $\mathbf{\Lambda}$ die im Allgemeinen orts- und temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit in $\text{W}/(\text{m K})$. In *isotropen* Materialien ist die Wärmeleitfähigkeit unabhängig von der Raumrichtung der Wärmestromdichte, d. h. es gilt $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T) = \lambda(\mathbf{x}, T)\mathbf{E}$ und die Wärmeleitfähigkeit kann durch die skalare positive Größe $\lambda(\mathbf{x}, T)$ beschrieben werden. In *homogenen* Materialien ist $\mathbf{\Lambda}$ unabhängig vom Ort.

Für ein festes Kontrollvolumen \mathcal{V} und ohne Materialbewegung gilt gemäß dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$\int_{\mathcal{V}} \rho c_p(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} d\mathcal{V} = - \underbrace{\int_{\partial\mathcal{V}} \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A}}_{=\dot{Q}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} g(t, \mathbf{x}, T) d\mathcal{V}}_{=\dot{W}} . \quad (3.2)$$

Hierbei bezeichnet ρ die Dichte und $c_p(\mathbf{x}, T)$ die spezifische Wärmekapazität des im Kontrollvolumen \mathcal{V} befindlichen Materials. Die spezifische Wärmekapazität wird meist in $\text{kJ}/(\text{kg K})$ angegeben und beschreibt die Wärmemenge, die notwendig ist, um 1 g einer Substanz um 1° zu erhöhen.

Da das Material sich nicht bewegt, spielen kinetische und potentielle Energie in (3.2) keine Rolle. \dot{Q} beschreibt den Wärmestrom der in das Kontrollvolumen hineinfließt, wobei \mathbf{n} den Flächennormalvektor der Berandung $\partial\mathcal{V}$ darstellt. \dot{W} beschreibt die in das System eingebrachte Arbeit, welche mangels Materialverschiebungen direkt in Wärme umgewandelt wird und hier durch die volumetrische Wärmequelle $g(t, \mathbf{x}, T)$ ausgedrückt wird. Ein Beispiel für g ist die Wärmeentwicklung in einem Ohmschen Widerstand (siehe auch Abschnitt 3.3).

Anwendung des Gaußschen Divergenzsatzes (A.1) auf (3.2) liefert

$$\int_{\mathcal{V}} \rho c_p(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} -\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) + g(t, \mathbf{x}, T) d\mathcal{V} . \quad (3.3)$$

Aus der Überlegung, dass diese Beziehung für beliebig gewählte Kontrollvolumina \mathcal{V} erfüllt sein muss, und durch Einsetzen von (3.1) erhält man die *Fouriersche Wärmeleitgleichung*

$$\rho c_p(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T)\nabla T(t, \mathbf{x})) + g(t, \mathbf{x}, T) . \quad (3.4)$$

Diese parabolische Differentialgleichung wird gelegentlich auch als Wärmediffusionsgleichung bezeichnet und stellt ein *Anfangs-Randwert-Problem* dar. Sie ist also noch mit Anfangs- und Randbedingungen zu versehen. Randbedingungen werden in Abschnitt

3.2 diskutiert. Anfangsbedingungen sind häufig in der Form $T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$ gegeben. Schwieriger aber praktisch gelegentlich bedeutend ist der Fall, dass $T_0(\mathbf{x})$ unbekannt ist und aus dem Zeitverlauf von Messwerten (z. B. Oberflächentemperaturen) rekonstruiert werden soll. Es handelt sich dabei um eine Beobachtungsaufgabe.

Bei *stationären* Problemstellungen gilt $\partial T/\partial t = 0$ (vgl. Abschnitt 3.4), die Angabe von Anfangsbedingungen entfällt natürlich und (3.4) reduziert sich zu einem *Randwertproblem* in Form einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Im Fall $g = 0$ ist für solche Differentialgleichungen bekannt, dass sowohl das Maximum als auch das Minimum der Lösung am Rand des Rechengebietes auftreten muss. Ähnliche weiterführende Aussagen auch für Fälle $g \neq 0$ finden sich z. B. in [3.7]. Weiters folgt aus (3.4), dass ρ und c_p auf die Lösung stationärer Wärmeleitungsprobleme keinen Einfluss haben. Dies gilt allgemein für stationäre Wärmeübertragungsprobleme ohne Massenströme.

Für die nachfolgenden Spezialisierungen von (3.4) wird angenommen, dass es sich um isotropes, homogenes Material mit temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit λ handelt. In kartesischen Koordinaten gilt dann

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + g(t, x, y, z, T) \quad (3.5a)$$

für die Temperatur $T = T(t, x, y, z)$ am Punkt (x, y, z) . In Zylinderkoordinaten (siehe

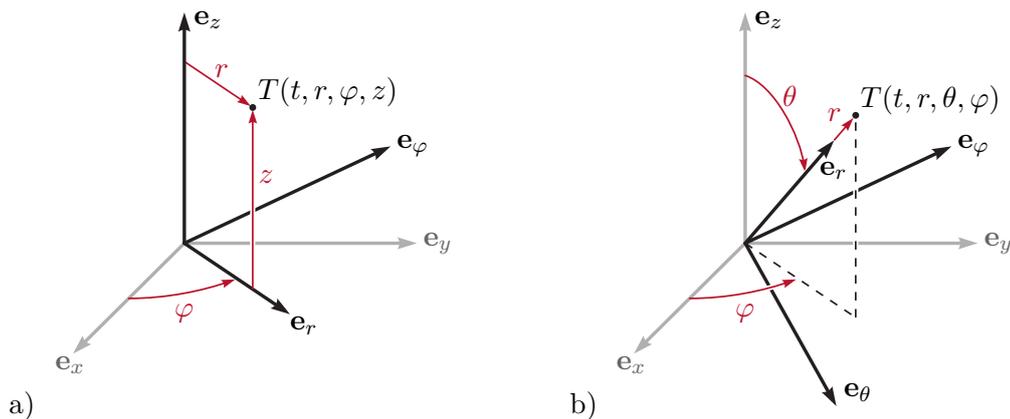


Abbildung 3.2: Koordinatensysteme, a) Zylinderkoordinaten, b) Kugelkoordinaten.

Abbildung 3.2a) gilt für die Temperatur $T = T(t, r, \varphi, z)$ am Punkt (r, φ, z)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + g(t, r, \varphi, z, T) \quad (3.5b)$$

und in Kugelkoordinaten (siehe Abbildung 3.2b) gilt für die Temperatur $T = T(t, r, \theta, \varphi)$ am Punkt (r, θ, φ)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + g(t, r, \theta, \varphi, T) . \quad (3.5c)$$

Aus (3.5) lassen sich sofort weitere Spezialisierungen für den 1-dimensionalen Fall oder radialsymmetrische Fälle ableiten. Häufig wird in (3.5) statt der Parameter ρ , c_p und λ die als *Temperaturleitfähigkeit* bezeichnete Abkürzung

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (3.6)$$

mit der Einheit m^2/s verwendet.

Aufgabe 3.1 (Wärmeleitgleichung in Zylinderkoordinaten). Beweisen Sie die Gültigkeit von (3.5b) unter Verwendung von

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.7)$$

und $\partial \mathbf{e}_r / \partial \varphi = \mathbf{e}_\varphi$.

Aufgabe 3.2 (Wärmeleitgleichung in Kugelkoordinaten). Beweisen Sie die Gültigkeit von (3.5c) unter Verwendung von

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (3.8)$$

3.2 Randbedingungen

Zur vollständigen Definition und damit auch zur Lösbarkeit eines Wärmeleitproblems werden Randbedingungen im Randgebiet $\partial \mathcal{V}$ benötigt [3.3, 3.4]. Diese können eine Ortsabhängigkeit aufweisen, z. B. können sie abschnittsweise definiert sein.

Bei einer *Randbedingung erster Art* (Dirichletsche Randbedingung) ist die Temperatur am jeweiligen Randabschnitt $\partial \mathcal{V}_a \subseteq \partial \mathcal{V}$ in der Form

$$T(t, \mathbf{x}) = T_a(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{V}_a \quad (3.9a)$$

fest vorgegeben. Um eine solche Randbedingung herzustellen, kann z. B. eine Temperaturregelung verwendet werden. Ein weiteres Beispiel für diese Randbedingung ist die Temperatur eines Fluids bei Phasenumwandlungsvorgängen. Die das Fluid einschließende Oberfläche wird dann konstant auf Phasenumwandlungstemperatur gehalten.

Bei einer *Randbedingung zweiter Art* (Neumannsche Randbedingung) ist die Wärmestromdichte $\dot{q}_n(t, \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$ in Richtung der Flächennormalen \mathbf{n} am jeweiligen Randabschnitt $\partial \mathcal{V}_a \subseteq \partial \mathcal{V}$ in der Form

$$\dot{q}_n(t, \mathbf{x}) = \dot{q}_a(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{V}_a \quad (3.9b)$$

fest vorgegeben. Dem Wärmeleitgesetz (3.1) folgend ist daher der Temperaturgradient entlang von \mathbf{n} festgelegt. Von einer *adiabaten* Randbedingung spricht man im Fall $\dot{q}_n = 0$.

Bei einer *Randbedingung dritter Art* (Newtonsche, Robinsche oder gemischte Randbedingung) gilt

$$\dot{q}_n(t, \mathbf{x}) = \alpha(x, y, z)(T(t, \mathbf{x}) - T_a(t, \mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}_a \quad (3.9c)$$

mit einem Proportionalitätsfaktor $\alpha \in \mathbb{R}$, der auch Wärmeübergangskoeffizient genannt wird. Diese Art von Randbedingung wird in den Abschnitten 3.2.1 bis 3.2.3 zur Beschreibung von Konvektion und Wärmeleitung verwendet. Man beachte noch, dass (3.9c) für $\alpha \rightarrow \infty$ wieder auf (3.9a) führt.

Eine allgemeinere Randbedingung ist durch die nichtlineare Beziehung

$$\dot{q}_n(t, \mathbf{x}) = \dot{q}_a(t, \mathbf{x}, T(t, \mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}_a \quad (3.9d)$$

gegeben. Diese Struktur tritt z. B. in Abschnitt 3.2.4 bei der Beschreibung von Wärmestrahlung auf.

Die Randbedingungen (3.9) stellen oft idealisierte oder makroskopische Näherungen für in der Realität komplexere Wärmeübertragungsvorgänge dar. Um bei Verwendung der obigen Ansätze dennoch möglichst exakt zu rechnen, ist daher eine sorgfältige Bestimmung der in den Gleichungen verwendeten Parameter notwendig. Dies soll im Folgenden beispielhaft für praktisch bedeutende Randbedingungen erläutert werden.

3.2.1 Erzwungene Konvektion

Erzwungene Konvektion tritt in Fluiden an der Oberfläche von anderen Körpern auf, wenn die Strömung durch eine äußere Einwirkung, z. B. einen Druckunterschied, verursacht wird [3.3, 3.4, 3.6, 3.8]. Abbildung 3.3 zeigt ein Beispiel für erzwungene Konvektion; Luft streicht mit einer Geschwindigkeit u_∞ und einer Temperatur T_∞ parallel über eine stehende ebene Platte mit der Länge L . Für die Wärmeübertragung durch Konvektion sind die als homogen vorausgesetzte Oberflächentemperatur T_p der Platte sowie die Temperaturverteilung $T(x, y)$ und die Geschwindigkeitsverteilung $u(x, y)$ in der Luft nahe über der Plattenoberfläche ($y = 0$) ausschlaggebend. Direkt an der Plattenoberfläche gilt die Haftbedingung, d. h. die Luft hat eine verschwindende Geschwindigkeit ($u(x, 0) = 0$) und die gleiche Temperatur wie die Plattenoberfläche ($T(x, 0) = T_p$). Oberhalb der Plattenoberfläche bilden sich in der Luft Grenzschichten mit einem charakteristischen Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil aus. Das Wärmeübertragungsverhalten hängt unter anderem von der Dicke dieser Grenzschichten ab und davon ob die Strömung in diesen Schichten laminar oder turbulent ist. Im Folgenden werden Berechnungsmethoden für den laminaren und den turbulenten Bereich separat vorgestellt und schließlich zur Bestimmung eines gemittelten Wärmeübertragungsverhaltens herangezogen. Transiente Effekte werden dabei nicht berücksichtigt, d. h. die Strömung wird als voll ausgebildet und stationär betrachtet.

Laminarer Bereich

In vielen Fällen ist die Strömung am Einlauf (nahe der Vorderkante) laminar und etwas weiter von der Kante entfernt turbulent. Die Strömungsgrenzschicht habe eine lokale Dicke $\delta_u(x)$. Im laminaren Bereich, der sich von $x = 0$ bis $x = x_c$ erstreckt, ist die Strömung gleichmäßig und geordnet, so dass eindeutige Stromlinien identifiziert werden können. Die Geschwindigkeitsprofile sind in Abbildung 3.3a) angedeutet. Direkt an der

Plattenoberfläche gilt $u(x, 0) = 0$ (Haftbedingung) und am oberen Rand der Grenzschicht gilt $u(x, \delta_u(x)) = u_\infty$. Da $\delta_u(x)$ mit steigendem x zunimmt, nimmt $\partial u / \partial y|_{y=0}$ ab. Dieser Gradient ist proportional zur viskosen Scherspannung im Fluid.

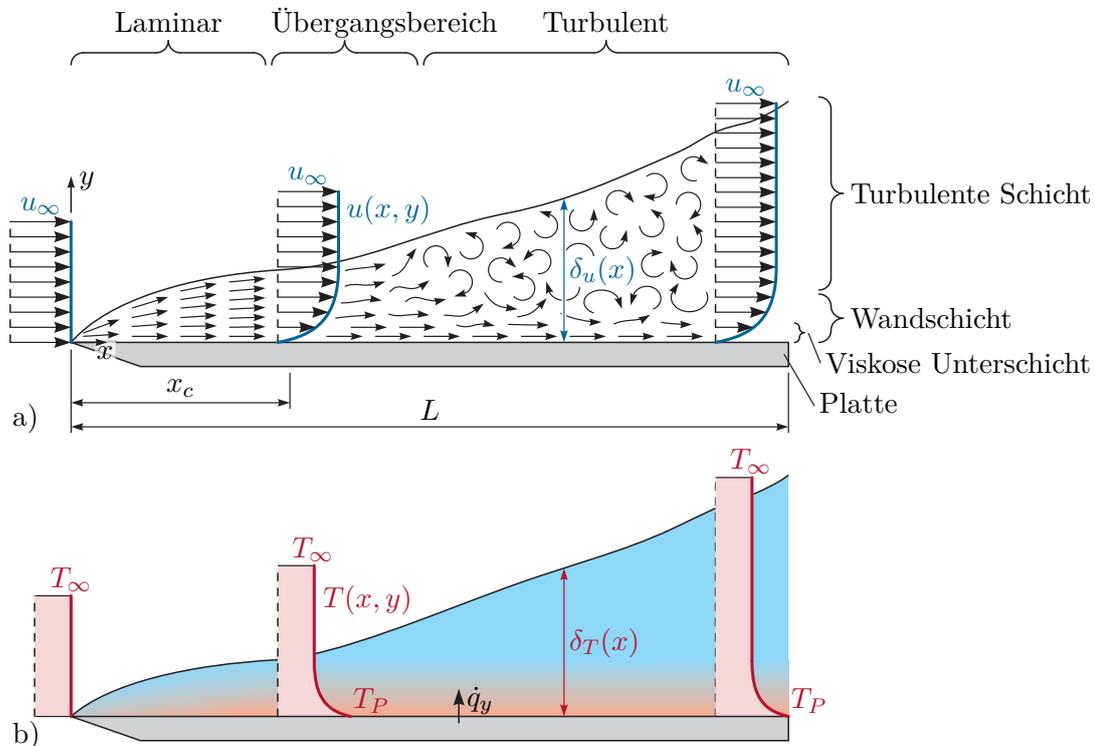


Abbildung 3.3: Grenzschichten bei erzwungener Konvektion an einer Platte, a) Strömungsgrenzschicht, b) thermische Grenzschicht.

Ferner bildet sich eine thermische Grenzschicht mit der Dicke $\delta_T(x)$ aus. Direkt an der Plattenoberfläche gilt $T(x, 0) = T_P$ und am oberen Rand der Grenzschicht gilt $T(x, \delta_T(x)) = T_\infty$. Das in Abbildung 3.3b) angedeutete Temperaturprofil beschreibt einen Abkühlvorgang der Platte, da $T_P > T_\infty$. Die hier angestellten Überlegungen gelten aber auch für $T_P < T_\infty$. Für den Gradienten $\partial T / \partial y|_{y=0}$ gilt analog zu $\partial u / \partial y|_{y=0}$, dass sein Absolutwert mit steigendem x abnimmt. Da bei $y = 0$ keine Luftbewegung vorhanden ist, ergibt sich der lokale Wärmestrom \dot{q}_y an der Stelle x in Richtung y allein aus der Wärmeleitung (siehe (3.1)), d. h.,

$$\dot{q}_y = -\lambda \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (3.10)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit λ der Luft. Offensichtlich besitzt \dot{q}_y eine Singularität bei $x = 0$.

Eine vollständige analytische Berechnung von $\delta_u(x)$, $\delta_T(x)$, $u(x, y)$, $T(x, y)$ und \dot{q}_y ist anspruchsvoll und erfordert die Verwendung der Kontinuitätsgleichung, der Impulsbilanz, der Energiebilanz und einer Konstitutivgleichung für die Reibung im Fluid. Derartige

Berechnungen werden z. B. in [3.3, 3.4, 3.8, 3.9] durchgeführt. Hier soll aber lediglich die in der Strömungsmechanik und Wärmelehre gebräuchliche Beschreibung mittels dimensionslosen Kennzahlen und teilweise empirisch gefundenen Zusammenhängen erläutert werden.

Als erste wichtige dimensionslose Kennzahl gilt die *Reynolds-Zahl*

$$\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}, \quad (3.11)$$

wobei x eine charakteristische Länge (im vorliegenden Fall die Längskoordinate x der Platte) und ν die kinematische Viskosität des Fluids in m^2/s ist. Re_x beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften in einer Strömung. Anhand von Re_x kann daher auch entschieden werden, ob eine Strömung laminar oder turbulent ist. Sie ist laminar für $\text{Re}_x < \text{Re}_c$ und turbulent für $\text{Re}_x > \text{Re}_c$. Die kritische Reynolds-Zahl Re_c ist eine situationsabhängige Größe und hat für den Fall der parallel angeströmten ebenen Platte (vgl. Abbildung 3.3) den Wert $\text{Re}_c = 5 \cdot 10^5$. Daraus folgt

$$x_c = \text{Re}_c \frac{\nu}{u_\infty}. \quad (3.12)$$

Als gute Näherung für die Dicke der Strömungsgrenzschicht im laminaren Bereich hat sich die Formel

$$\delta_u(x) = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (3.13)$$

erwiesen [3.4]. Sie zeigt, dass $\delta_u(x)$ mit steigenden Werten ν und x zunimmt und mit steigenden Werten u_∞ abnimmt.

Als weitere wichtige dimensionslose Kennzahl wird die *Prandtl-Zahl*

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} \quad (3.14)$$

mit der Temperaturleitfähigkeit a gemäß (3.6) verwendet. Sie ist eine rein stoffabhängige Größe und setzt den Impulstransport durch das Geschwindigkeitsfeld ins Verhältnis zur Wärmeleitung durch das Temperaturfeld. Sie hat daher auch einen direkten Einfluss auf die Grenzschichtdicken im laminaren Bereich. Dieser Einfluss kann durch

$$\delta_u(x) = \delta_T(x) \sqrt[3]{\text{Pr}} \quad (3.15)$$

beschrieben werden [3.4]. Für $\text{Pr} = 1$ (häufig bei Gasen und Dämpfen) gilt folglich $\delta_u(x) = \delta_T(x)$. $\text{Pr} \ll 1$ ($\delta_u(x) < \delta_T(x)$) tritt bei flüssigen Metallen auf und $\text{Pr} \gg 1$ ($\delta_u(x) > \delta_T(x)$) bei vielen anderen Flüssigkeiten.

Die Gleichungen (3.13) und (3.15) zeigen, dass die Dicke $\delta_T(x)$ der thermischen Grenzschicht nicht von den Randwerten T_P und T_∞ abhängt. Es kann gezeigt werden, dass Gleiches für die Form des Temperaturprofils $T(x, y)$ gilt, so dass die Grenzschichtgleichungen üblicherweise für die normierte Temperatur

$$\bar{T}(x, y) = \frac{T(x, y) - T_\infty}{T_P - T_\infty} \quad (3.16)$$

gelöst werden, so dass $\bar{T}(x, y)$ für beliebige Werte T_P und T_∞ gültig ist. Einsetzen von (3.16) in (3.10) liefert daher

$$\dot{q}_y = -\lambda \underbrace{\frac{\partial \bar{T}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0}}_{=\alpha_y} (T_P - T_\infty) \quad (3.17)$$

mit dem *Wärmeübergangskoeffizienten* α_y , d. h. die Wärmestromdichte ist proportional zur Temperaturdifferenz $T_P - T_\infty$. Diese Proportionalität ist charakteristisch für Wärmeübertragung durch Konvektion und wird daher praktisch sehr häufig zur Modellierung verwendet.

Bemerkung 3.1. Der menschliche Körper nützt die in (3.17) dargestellte Proportionalität zur Temperaturregelung. Soll der Körper gekühlt werden, so werden die oberflächennahen Blutgefäße erweitert, es fließt mehr Blut durch und die Oberflächentemperatur ist so wie der kühlende Wärmestrom nach außen höher. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die Oberflächentemperatur des Körpers T_P größer als die Umgebungstemperatur T_∞ ist. Soll der Wärmeverlust nach außen gemindert werden, wird die oberflächennahe Durchblutung durch Verengung der Blutgefäße reduziert.

Offensichtlich ist die Bestimmung von α_y , das von der Wärmeleitfähigkeit des Fluids und der Form der Temperaturverteilung im Fluid abhängt, eine zentrale Fragestellung. Um sie zu untersuchen, sind die Grenzschichtgleichungen zu lösen, wobei hier häufig die *Nußelt-Zahl*

$$\text{Nu}_x = \dot{q}_y \frac{x}{(T_P - T_\infty)\lambda} = \frac{\alpha_y x}{\lambda} \quad (3.18)$$

als weitere dimensionslose Kennzahl verwendet wird. Sie setzt die Wärmestromdichte an der Plattenoberfläche (vgl. (3.10) und (3.17)) in Beziehung zur Wärmestromdichte durch reine Wärmeleitung über die charakteristische Distanz x bei gleicher Temperaturdifferenz $T_P - T_\infty$. Im Bereich der laminaren Plattengrenzschicht kann gemäß [3.3] in guter Näherung die semiempirische Formulierung

$$\text{Nu}_{lam,x} = \sqrt{\text{Re}_x} \varphi(\text{Pr}) \quad (3.19a)$$

mit

$$\varphi(\text{Pr}) = \frac{\sqrt{\text{Pr}}}{\sqrt{\pi}(1 + 1.973\text{Pr}^{0.272} + 21.29\text{Pr})^{1/6}} \quad (3.19b)$$

verwendet werden.

Turbulenter Bereich

Die Strömung wird im Bereich von $x = x_c$ (Übergangsbereich) instabil und schlägt in eine turbulente Strömung um. In der als turbulente Schicht bezeichneten Region in Abbildung 3.3a) (auch Defektschicht genannt) ist die Bewegung der Fluidteilchen daher 3-dimensional, instationär und scheinbar zufällig (chaotisch). Es bilden sich ungeordnete Wellen und Wirbel, die sich auch wieder auflösen. Der Rand der Grenzschicht ist

üblicherweise ausgefranst, so dass die Grenzschichtdicke

$$\delta_u(x) = 0.37x\text{Re}_x^{-1/5} \quad (3.20)$$

[3.4] eher einem zeitlichen Mittelwert als einem festen Maß entspricht. Gleichung (3.20) und die nachfolgenden Beziehungen gelten für $\text{Re}_c < \text{Re}_x < 10^8$.

In der Nähe der Plattenoberfläche wird die Bewegung der Fluidteilchen durch die Wand behindert. In der sogenannten viskosen Unterschicht (vgl. Abbildung 3.3a) liegt daher etwa eine Parallelströmung vor und der Wärmetransport wird von herkömmlicher Wärmeleitung dominiert. In der Wandschicht oberhalb der viskosen Unterschicht erfolgt ein Übergang zum turbulenten Strömungsverhalten. Im Vergleich zur laminaren Strömung kommt es bei turbulenten Strömungsverhältnissen zu verstärktem Wärmetransport durch Stofftransport, d. h. die turbulenten Durchmischungsvorgänge begünstigen und dominieren letztlich das Wärmeübertragungsverhalten. Im turbulenten Bereich gilt daher

$$\delta_u(x) = \delta_T(x) . \quad (3.21)$$

Für die Nußelt-Zahl kann im Bereich $0.6 < \text{Pr} < 60$ die empirische Formulierung

$$\text{Nu}_{tur,x} = 0.0296\text{Re}_x^{4/5} \sqrt[3]{\text{Pr}} \quad (3.22)$$

[3.3, 3.4] verwendet werden.

Gemittelte Größen

Aus den bisher angegebenen Formeln für die Nußelt-Zahl lässt sich mit Hilfe von (3.18) die lokale Wärmestromdichte \dot{q}_y berechnen. Praktisch interessant sind auch noch die über die Plattenlänge L gemittelte Wärmestromdichte

$$\dot{q} = \frac{1}{L} \int_0^L \dot{q}_y dx = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_y dx (T_P - T_\infty) = \alpha (T_P - T_\infty) \quad (3.23)$$

sowie die unter Verwendung von (3.19) und (3.22) berechnete mittlere Nußelt-Zahl

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= \dot{q} \frac{L}{(T_P - T_\infty)\lambda} = \frac{\alpha L}{\lambda} \\ &= \begin{cases} 2\sqrt{\text{Re}_L} \varphi(\text{Pr}) & \text{wenn } L \leq x_c \\ 2\sqrt{\text{Re}_c} \varphi(\text{Pr}) + 0.0370(\text{Re}_L^{4/5} - \text{Re}_c^{4/5}) \sqrt[3]{\text{Pr}} & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.24) \\ &= \begin{cases} 2\text{Nu}_{lam,L} & \text{wenn } L \leq x_c \\ 2\text{Nu}_{lam,x_c} + \frac{5}{4}(\text{Nu}_{tur,L} - \text{Nu}_{tur,x_c}) & \text{sonst} \end{cases} . \end{aligned}$$

Eine Skizze zur Herleitung der Beziehung (3.24) findet man im Anhang A.2. Die hier gezeigte Vorgangsweise zur Berechnung der Wärmeübertragung durch erzwungene Konvektion an einer horizontalen Platte kann in ähnlicher Weise für andere Geometrien durchgeführt werden, z. B. für Rohrströmungen, querangeströmte Kreiszylinder, Gruppen von Rohren und Objekte mit Rippen. Es sind dann andere charakteristische Längen L , andere kritische Reynolds-Zahlen Re_c und andere Formeln für die Nußelt-Zahl (vgl. (3.19) und (3.22)) zu verwenden. Diese Werte und Formeln können z. B. den Fachbüchern [3.3–3.5, 3.8–3.15] entnommen werden.

Bemerkung 3.2. Abschließend sei noch erwähnt, dass erzwungene Konvektion nicht immer an der Oberfläche von Festkörpern auftreten muss; sie ist auch an Oberflächen von Flüssigkeiten möglich. In vielen Fällen ist es aufgrund von Dichte- und Viskositätsunterschieden zweier Fluide gerechtfertigt, ein Fluid als stehend zu betrachten. Ein Beispiel einer solchen Situation ist ein leichter Wind, der über die stehende Oberfläche eines Wasserbeckens streicht.

3.2.2 Freie Konvektion

Freie Konvektion tritt in Fluiden an der Oberfläche von anderen Körpern auf, wenn die Strömung durch temperaturbedingte lokale Dichteunterschiede (Auftrieb) und ohne eine äußere Einwirkung hervorgerufen wird. Die Berechnung freier Konvektion erfolgt methodisch ähnlich wie bei der erzwungenen Konvektion, d. h. mit Hilfe von dimensionslosen Kennzahlen (siehe Abschnitt 3.2.1), allerdings übernimmt die *Grashof-Zahl* Gr_x die Rolle einer quadratischen Reynolds-Zahl Re_x^2 (vgl. (3.11)). Die Nußelt-Zahl Nu_x ist daher eine Funktion der Grashof-Zahl Gr_x und der Prandtl-Zahl Pr . Die auftretende Strömung ist laminar, wenn für die *Rayleigh-Zahl* $Ra_x = Gr_x Pr < Ra_c$ gilt und turbulent, wenn $Ra_x > Ra_c$. Für den Fall einer ebenen vertikalen Platte hat die kritische Rayleigh-Zahl den Wert $Ra_c = 10^9$. Auf eine eingehende Diskussion und Berechnung der Größen Gr_x , Ra_x und Nu_x wird hier verzichtet. Diese Inhalte können z. B. in [3.3, 3.4, 3.6, 3.8, 3.14, 3.16] nachgelesen werden.

3.2.3 Wärmeleitung

Wärmeleitung tritt auch an den Kontaktflächen zwischen Festkörpern auf (vgl. Abbildung 3.4). Dort hängt das Wärmeleitvermögen von folgenden Faktoren ab [3.4]:

- Beschaffenheit (Rauigkeit) der sich berührenden Oberflächen
- Flächenpressung zwischen den sich berührenden Oberflächen
- allfällige (punktweise) Verschweißungen zwischen den sich berührenden Oberflächen
- Fluid, das kleine Hohlräume zwischen den sich berührenden Oberflächen füllt

Das Wärmeleitverhalten an solchen Kontaktstellen entspricht im einfachsten Fall dem *Fourierschen Wärmeleitgesetz* (vgl. (3.1)), d. h. die Wärmestromdichte ist linear proportional der Differenz der beiden Oberflächentemperaturen. Dies kann für zwei Kontaktflächen A und B mit den Temperaturen T_A und T_B mit Hilfe eines *Wärmeübergangskoeffizienten* α in der Form

$$\dot{q} = \alpha(T_A - T_B) \quad (3.25)$$

modelliert werden. Für ideale Kontaktbedingungen gilt $\alpha \rightarrow \infty$ und $T_A = T_B$.

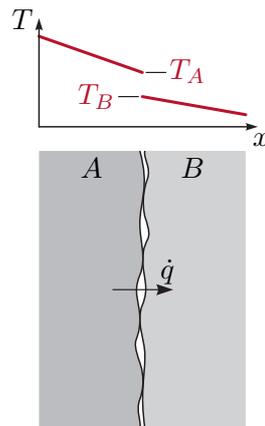


Abbildung 3.4: Wärmeleitung an der Kontaktfläche zweier Festkörper.

3.2.4 Wärmestrahlung

Im Folgenden wird eine kurze Einführung in die Wärmestrahlung zwischen Festkörpern im Vakuum gegeben. Damit ist auch der Fall von Fluiden die Wärmestrahlung weder absorbieren noch emittieren (*transparente Fluide*) abgedeckt. Um die Berechnungen einfach zu halten, sollen ausschließlich graue, diffuse Strahler berücksichtigt werden. Was darunter zu verstehen ist, wird im Folgenden diskutiert. Für die hier nicht dargestellten Wärmestrahlungsfälle (absorbierende und emittierende Fluide, nicht-graue Strahler, nicht-diffuse Strahler) wird auf Fachbücher wie z. B. [3.3, 3.4, 3.14, 3.17, 3.18] verwiesen.

Damit gasförmige Fluide Wärmestrahlung absorbieren und emittieren können, müssen sie Festkörperpartikel enthalten (z. B. Staub) oder Moleküle, die in asymmetrischen Moden schwingen können [3.5], wie etwa CO_2 , H_2O , O_3 , CH_4 und NO_2 . Gase mit ausschließlich einatomigen oder symmetrischen zweiatomigen Molekülen (z. B. N_2 , O_2 und H_2) besitzen nur symmetrische Schwingungsmoden und sind praktisch transparent. Auch auf Luft trifft dies bei moderaten Temperaturen und Strahlungslängen im Bereich weniger Meter näherungsweise zu.

Thermische Strahlung hängt wesentlich von den Temperaturen und Eigenschaften der beteiligten Oberflächen, den auftretenden Wellenlängen und der Raumrichtung ab. Ein *diffuser Strahler* liegt vor, wenn er in alle Raumrichtungen gleichmäßig abstrahlt, wie dies eine ideal matte Oberfläche tut [3.3, 3.4, 3.17, 3.18]. Mit der Beschränkung auf diffuse Strahler kann nachfolgend eine Berücksichtigung der Raumrichtung entfallen.

Spektrale Ein- und Ausstrahlung

Für ein thermisch ausstrahlendes infinitesimales Oberflächenstück dA mit der Absoluttemperatur T sei zunächst die spektrale spezifische Ausstrahlung $E_\lambda(\lambda, T)$ in W/m^3 bei der Wellenlänge λ definiert. Damit emittiert das Oberflächenstück im Wellenlängenbereich $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ die Gesamtenergie $E_\lambda(\lambda, T) dA d\lambda$ in den darüberliegenden Halbraum (Hemisphäre). Max Planck fand heraus, dass die emittierte spektrale spezifische Ausstrahlung

von schwarzen Körpern durch (*Plancksches Strahlungsgesetz*)

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc_0}{\lambda k T}} - 1 \right)}, \quad (3.26)$$

mit der Planckschen Konstanten $h = (6.626\,068\,96 \pm 0.000\,000\,33)10^{-34}$ J s, der Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 299\,792\,458$ m/s und der Boltzmann Konstanten $k = (1.380\,650\,4 \pm 0.000\,002\,4)10^{-23}$ J/K beschrieben werden kann [3.3, 3.17, 3.18]. Ein *schwarzer Körper* emittiert Strahlung mit einem ausschließlich von der Temperatur abhängigen Spektrum und absorbiert auftreffende elektromagnetische Strahlung vollständig (keine Spiegelung, Streuung oder Transmission). Insbesondere ist das Spektrum der emittierten Strahlung unabhängig von den Materialeigenschaften. Ein schwarzer Körper hat bei allen Wellenlängen das größtmögliche Emissions- und Absorptionsvermögen, d. h. keine andere Oberfläche kann mehr Wärmestrahlung absorbieren oder bei gleicher Temperatur emittieren.

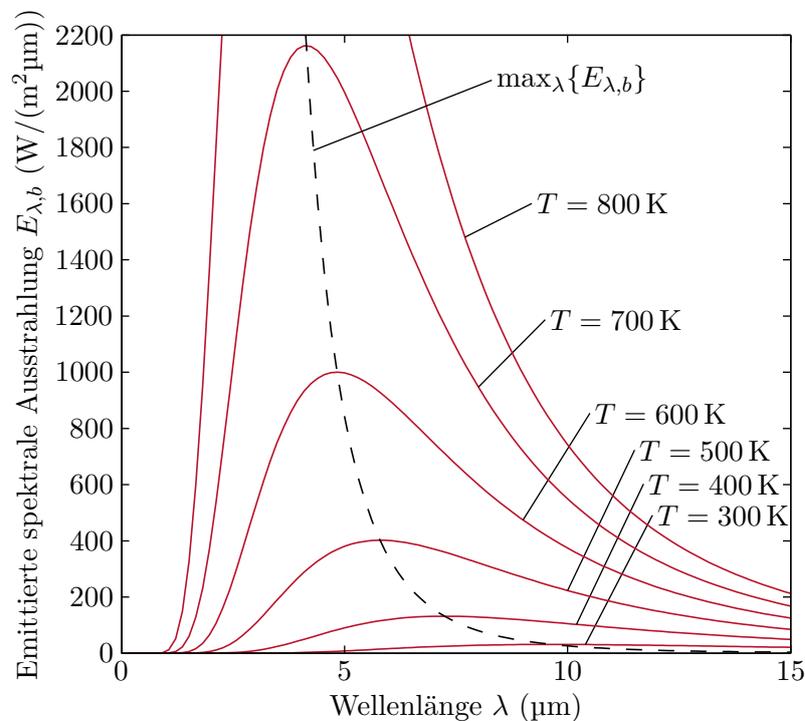


Abbildung 3.5: Emittierte spektrale Ausstrahlung von schwarzen Körpern.

Abbildung 3.5 zeigt die emittierte spektrale spezifische Ausstrahlung gemäß dem Planckschen Strahlungsgesetz (3.26). Das Maximum der Ausstrahlung tritt jeweils bei der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{0.002\,897\,768\text{ m K}}{T} \quad (3.27)$$

auf. Gleichung (3.27) ist als *Wiensches Verschiebungsgesetz* bekannt und die dadurch beschriebene Linie ist in Abbildung 3.5 strichliert dargestellt.

Aufgabe 3.3 (Wiensches Verschiebungsgesetz). Beweisen Sie das Wiensche Verschiebungsgesetz (3.27) basierend auf (3.26).

Um das Emissions- und Absorptionsvermögen von nicht-schwarzen Körpern zu beschreiben, werden dimensionslose Proportionalitätsfaktoren verwendet. Die *spektrale Emissivität*

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \frac{E_\lambda(\lambda, T)}{E_{\lambda,b}(\lambda, T)} \in [0, 1] \quad (3.28)$$

vergleicht die emittierte spektrale spezifische Ausstrahlung einer Oberfläche mit jener eines schwarzen Körpers bei gleicher Temperatur T . Folglich gilt

$$E_\lambda(\lambda, T) = \varepsilon_\lambda(\lambda, T) \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1 \right)} \quad (3.29)$$

und für einen schwarzen Strahler $\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = 1$.

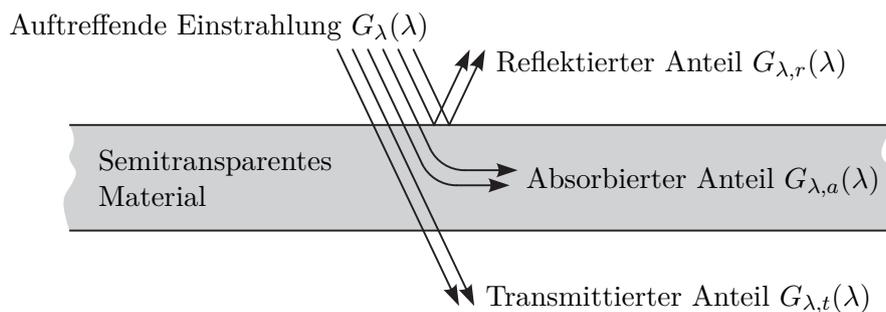


Abbildung 3.6: Absorption, Reflexion und Transmission der auf einen semitransparenten Körper auftreffenden Einstrahlung.

Es sei $G_\lambda(\lambda)$ die auf ein infinitesimales Flächenstück dA auftreffende spektrale spezifische Einstrahlung in W/m^2 im Wellenlängenbereich $[\lambda, \lambda + d\lambda]$. D. h. für diesen Wellenlängenbereich ist $G_\lambda(\lambda) dA d\lambda$ die auftreffende Gesamtenergie. Natürlich hängt das Spektrum der auftreffenden Wärmestrahlung von den Temperaturen der sie verursachenden Strahlungsquellen ab. Von der auf einen semitransparenten Körper auftreffenden spektralen Einstrahlung $G_\lambda(\lambda)$ werde der Anteil $G_{\lambda,a}(\lambda)$ absorbiert, der Anteil $G_{\lambda,r}(\lambda)$ werde reflektiert und der Anteil $G_{\lambda,t}(\lambda)$ strahle ungehindert durch den Körper durch (vgl. Abbildung 3.6). Damit lassen sich der *spektrale Absorptionsgrad*

$$\alpha_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,a}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0, 1], \quad (3.30a)$$

der *spektrale Reflexionsgrad*

$$\rho_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,r}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0, 1] \quad (3.30b)$$

und der *spektrale Transmissionsgrad*

$$\tau_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,t}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0, 1] \quad (3.30c)$$

definieren [3.4]. Aufgrund der Energieerhaltung gilt natürlich

$$G_\lambda(\lambda) = G_{\lambda,a}(\lambda) + G_{\lambda,r}(\lambda) + G_{\lambda,t}(\lambda) \quad (3.31a)$$

$$1 = \alpha_\lambda(\lambda) + \rho_\lambda(\lambda) + \tau_\lambda(\lambda) . \quad (3.31b)$$

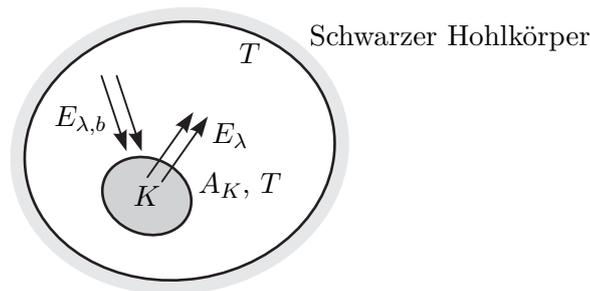


Abbildung 3.7: Körper in einem schwarzen Hohlkörper.

Wie Gustav Robert Kirchhoff im Jahr 1859 feststellte, müssen an für Wärmestrahlung undurchsichtigen Oberflächen, die sich mit ihrer Umgebung im vollständigen thermischen Gleichgewicht befinden (d. h. die gleiche Temperatur T aufweisen), die emittierte und absorbierte Strahlung übereinstimmen. Dies gilt auch für einzelne Bereiche des Spektrums, d. h. $E_\lambda(\lambda, T) = \varepsilon_\lambda(\lambda, T)E_{\lambda,b}(\lambda, T) = G_{\lambda,a}(\lambda) = \alpha_\lambda(\lambda)G_\lambda(\lambda)$, woraus die gelegentlich als *Kirchhoffsches Gesetz* bezeichnete Beziehung

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \alpha_\lambda(\lambda) \quad (3.32)$$

folgt [3.4, 3.17, 3.18]. Um dies zu zeigen, betrachte man die in Abbildung 3.7 skizzierte Situation. Ein undurchsichtiger Körper K mit der Oberfläche A_K , der Temperatur T und dem spektralen Absorptionsgrad $\alpha_\lambda(\lambda)$ befindet sich im Inneren eines Hohlkörpers mit der Temperatur T und den Strahlungseigenschaften eines schwarzen Körpers, d. h. aus Sicht des Körpers K gilt $G_\lambda(\lambda) = E_{\lambda,b}(\lambda, T)$. Damit der Körper K in diesem Gleichgewichtszustand verbleibt, d. h. das Temperaturniveau T beibehält, muss die totale absorbierte mit der totalen emittierten thermischen Strahlungsenergie übereinstimmen. Diese Gleichheit lässt sich nach Integration über das gesamte Spektrum in der Form

$$A_K \int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) G_\lambda(\lambda) d\lambda = A_K \int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda = A_K \int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda \quad (3.33)$$

ausdrücken. Diese Beziehung muss für beliebige Werte $\alpha_\lambda(\lambda)$ gültig sein, woraus (3.32) folgt.

Obwohl (3.32) streng nur gilt, wenn alle beteiligten Oberflächen die gleiche Temperatur haben, wird diese Beziehung auch für moderate Abweichungen von diesem Gleichgewichtszustand verwendet. Nicht mehr gültig ist sie für Strahlungssituationen bei denen

die Temperaturen der beteiligten Oberflächen sich um mehrere 100 K unterscheiden. Im Folgenden wird die Gültigkeit von (3.32) vorausgesetzt.

Totale Ein- und Ausstrahlung

Integration obiger spektraler Größen über das gesamte Spektrum liefert die emittierte totale Ausstrahlung

$$E(T) = \int_0^\infty E_\lambda(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda \quad (3.34)$$

und für den Spezialfall eines schwarzen Strahlers das *Stefan-Boltzmann Gesetz*

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc_0}{\lambda k T}} - 1 \right)} d\lambda = \sigma T^4 \quad (3.35)$$

mit der *Stefan-Boltzmann Konstanten* $\sigma = \frac{2}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c_0^2 h^3} = (5.6704 \pm 0.00004) 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$.

Damit lässt sich die totale Emissivität

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_b(T)} \quad (3.36)$$

berechnen. Sie hängt ausschließlich von der Temperatur T und den Eigenschaften der ausstrahlenden Oberfläche ab.

In ähnlicher Weise erhält man die totale Einstrahlung

$$G = \int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda = G_a + G_r + G_t \quad (3.37)$$

mit ihren Komponenten

$$G_i = \int_0^\infty G_{\lambda,i}(\lambda) d\lambda \quad \forall i \in \{a, r, t\} \quad (3.38)$$

für den absorbierten, reflektierten und transmittierten Anteil. Für den totalen Absorptions-, Reflexions- und Transmissionsgrad folgt

$$\alpha = \frac{G_a}{G}, \quad \rho = \frac{G_r}{G}, \quad \tau = \frac{G_t}{G}. \quad (3.39)$$

Natürlich gilt auch hier wieder

$$1 = \alpha + \rho + \tau. \quad (3.40)$$

Im Gegensatz zu $\varepsilon(T)$ hängen α , ρ und τ damit nicht nur von der Oberfläche selbst sondern auch vom Spektrum der auftreffenden Strahlung und damit der Temperatur und den Oberflächeneigenschaften der jeweiligen Strahlungsquelle ab.

Man beachte, dass aus dem Kirchhoffschen Gesetz (3.32) im Allgemeinen nicht die Beziehung $\varepsilon(T) = \alpha$ folgt, da

$$\varepsilon(T) = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda} \neq \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) G_\lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda} = \alpha. \quad (3.41)$$

Aus (3.41) erkennt man aber, dass $\varepsilon(T) = \alpha$ gilt, wenn die Faktoren $\varepsilon_\lambda(\lambda, T)$ und $\alpha_\lambda(\lambda)$ nicht von λ abhängen. Graue Strahler haben diese besondere Eigenschaft, d. h. die Faktoren $\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \varepsilon(T)$, $\alpha_\lambda(\lambda) = \alpha$, $\rho_\lambda(\lambda) = \rho$ und $\tau_\lambda(\lambda) = \tau$ sind unabhängig von λ [3.4]. Damit ist das von einem grauen Strahler emittierte Spektrum proportional zu dem eines schwarzen Strahlers mit der gleichen Temperatur T . Im Folgenden werden nur noch graue Strahler betrachtet. Ein spezieller grauer Strahler ist der schwarze Strahler, für den aufgrund von $\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = 1$, $\alpha_\lambda(\lambda) = 1$, $\rho_\lambda(\lambda) = 0$ und $\tau_\lambda(\lambda) = 0$ gilt. An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, dass $\varepsilon(T) = \alpha$ streng nur dann gilt, wenn die Quelle der auftreffenden Einstrahlung ebenfalls die Oberflächentemperatur T hat.

Netto-Strahlungsmethode

Bislang wurden einige Grundlagen zur Wärmestrahlung an einer Oberfläche diskutiert. Für Wärmeübertragungsprobleme interessant ist der Wärmeaustausch durch thermische Strahlung zwischen zwei oder mehreren Körpern mit bekannten Oberflächentemperaturen. Für die Bestimmung dieses Wärmeaustausches stehen mehrere Verfahren zur Verfügung, z. B. die Netto-Strahlungsmethode [3.3, 3.4, 3.14, 3.15], die Zonen-Methode [3.17–3.19], die Monte-Carlo Methode [3.17, 3.18] und die Methode der diskreten Ordinaten [3.17]. Im Folgenden wird die Netto-Strahlungsmethode kurz für graue, diffuse Strahler skizziert. Der Einfachheit halber werden ausschließlich intransparente Körper betrachtet, d. h. es gilt $\varepsilon = \alpha = 1 - \rho$; die Theorie lässt sich aber einfach auf semitransparente Körper erweitern.

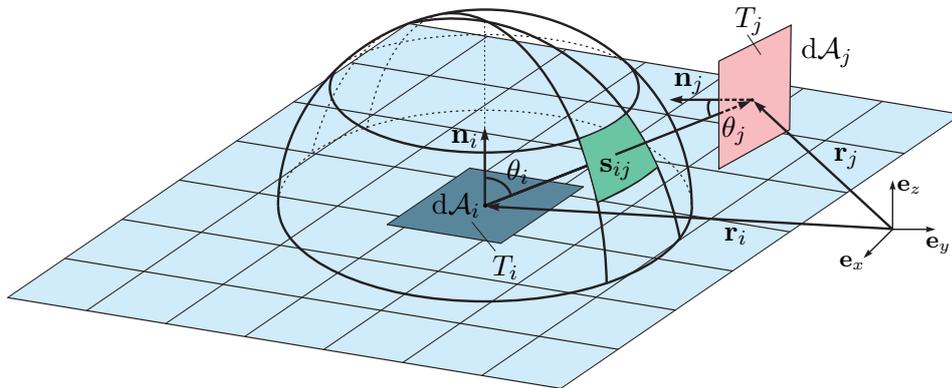


Abbildung 3.8: Zwei Flächen mit Strahlungsaustausch.

Abbildung 3.8 zeigt zwei strahlende Oberflächen A_i und A_j mit jeweils homogen verteilten Oberflächentemperaturen T_i und T_j . Es sei nun G_i die auf A_i auftreffende totale Einstrahlung in W/m^2 und J_i die von A_i (gleichmäßig) abgehende totale Ausstrahlung in W/m^2 . Da J_i also neben der von A_i emittierten Ausstrahlung $\varepsilon_i \sigma T_i^4$ den reflektierten Anteil von G_i beinhaltet, gilt

$$J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + \rho_i G_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) G_i . \quad (3.42)$$

Es sein nun $F_{ij} J_i$ jener Anteil von J_i , der auf A_j auftrifft. Die noch zu bestimmende dimensionslose Zahl $F_{ij} \in [0, 1]$ wird *Sichtfaktor* genannt und hängt ausschließlich von der

Form und relativen Position der Flächen A_i und A_j ab. Um eine Berechnungsformel für den Sichtfaktor herzuleiten, betrachte man Abbildung 3.8. Der Vektor $\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ vom Flächenelement $d\mathcal{A}_i$ zum Flächenelement $d\mathcal{A}_j$ hängt mit den beiden Winkeln θ_i und θ_j in der Form

$$\cos(\theta_i) = \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{s}_{ij}}{\|\mathbf{s}_{ij}\|_2} \quad \text{und} \quad \cos(\theta_j) = -\frac{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{s}_{ij}}{\|\mathbf{s}_{ij}\|_2} \quad (3.43)$$

zusammen, wobei \mathbf{n}_i und \mathbf{n}_j die Flächennormalvektoren zu $d\mathcal{A}_i$ und $d\mathcal{A}_j$ bezeichnen. Die vom Flächenelement $d\mathcal{A}_i$ total abgehende Strahlungsenergie lautet $J_i d\mathcal{A}_i$ mit J_i gemäß (3.42), wovon der Anteil $J_i d\mathcal{A}_i \cos(\theta_i)$ in Richtung von \mathbf{s}_{ij} abgestrahlt wird. Die auf das Flächenelement $d\mathcal{A}_j$ auftreffende Strahlungsenergie errechnet sich zu $J_i d\mathcal{A}_i \cos(\theta_i) d\mathcal{A}_j \cos(\theta_j)$. Damit ergibt sich die auf der gesamten Fläche A_j auftreffende Strahlungsenergie, die von der gesamten Fläche A_i abgegeben wurde, zu

$$J_{ji} = J_i \frac{1}{\Gamma} \int_{A_i} \int_{A_j} \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) d\mathcal{A}_j d\mathcal{A}_i . \quad (3.44)$$

Man beachte, dass Γ in (3.44) einen noch zu bestimmenden Normierungsfaktor darstellt. Es muss nämlich gelten, dass für eine Halbkugel der Fläche A_j (mit dem Radius $s_{ij} = \|\mathbf{s}_{ij}\|_2$) die auftreffende Strahlungsenergie J_{ji} der von der Fläche A_i abgegebenen Strahlungsenergie J_i entspricht (siehe Abbildung 3.8), weshalb in diesem Fall die Beziehung

$$\frac{1}{\Gamma} \int_{A_i} \int_{A_j} \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) d\mathcal{A}_j d\mathcal{A}_i = 1 \quad (3.45)$$

erfüllt sein muss. Wertet man (3.45) für die Halbkugel mit dem Radius s_{ij} aus, so folgt $\theta_j = 0$ und man erhält

$$\int_{A_i} \cos(\theta_i) d\mathcal{A}_i = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta_i) s_{ij}^2 \sin(\theta_i) d\theta_i d\varphi = s_{ij}^2 \pi = \Gamma . \quad (3.46)$$

Aus (3.44) mit (3.46) erhält man unmittelbar die Definitionsgleichung für den Sichtfaktor als Verhältnis von J_{ji} (auf die Fläche A_j auftreffende Strahlungsenergie, die von der Fläche A_i abgegeben wurde) zu $A_i J_i$ (gesamte von der Fläche A_i abgegebene Strahlungsenergie)

$$F_{ij} = \frac{J_{ji}}{A_i J_i} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{s_{ij}^2 \pi} d\mathcal{A}_j d\mathcal{A}_i . \quad (3.47)$$

Aus (3.47) folgt unmittelbar das *Reziprozitätsgesetz*

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} . \quad (3.48)$$

Dies kann bei der Berechnung von Sichtfaktoren nützlich sein. Da für viele geometrische Fälle exakte Lösungsformeln für F_{ij} existieren (siehe z. B. [3.17, 3.18, 3.20]), entfällt häufig die Berechnung des Mehrfachintegrals in (3.47).

Wie in Abbildung 3.9 angedeutet, bestehe ein geschlossener Strahlungsraum aus N Teilstücken mit den Oberflächen A_i ($i = 1, \dots, N$) und den zugehörigen homogenen

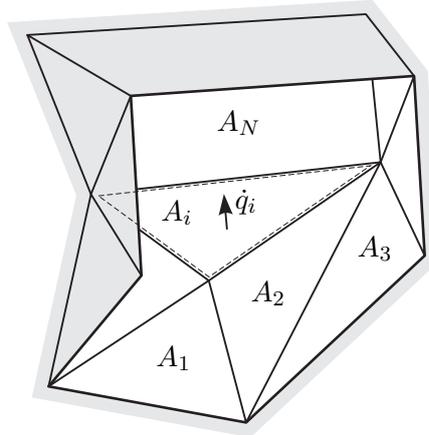


Abbildung 3.9: Schnitt durch einen geschlossenen Strahlungsraum.

Oberflächentemperaturen T_i . Eine Bilanz der von der Fläche A_i abgehenden totalen Ausstrahlung liefert

$$J_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \quad (3.49)$$

und daher die als *Summationsregel* bekannte Beziehung

$$1 = \sum_{j=1}^N F_{ij} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} . \quad (3.50)$$

Mit dem Reziprozitätsgesetz (3.48) und der Summationsregel (3.50) wurden bereits zwei Formeln gefunden, die zur effizienten Berechnung von Sichtfaktoren ausgenutzt werden können. Weitere Vereinfachungen ergeben sich häufig, da für ebene Flächen und konvexe Körper $F_{ii} = 0$ gilt. Außerdem lassen sich Sichtfaktoren addieren und subtrahieren.

Aufgabe 3.4 (Zusammenfassen von Flächen). Zeigen Sie, dass wenn zwei Flächen A_{i_1} und A_{i_2} zu einer Fläche $A_i = A_{i_1} + A_{i_2}$ zusammengefasst werden, basierend auf (3.47) $A_i F_{ij} = A_{i_1} F_{i_1 j} + A_{i_2} F_{i_2 j}$ für $j \neq i_1$, $j \neq i_2$ und $j \neq i$ sowie $A_i F_{ii} = A_{i_1} (F_{i_1 i_1} + F_{i_1 i_2}) + A_{i_2} (F_{i_2 i_1} + F_{i_2 i_2})$ gilt.

Aus dieser Eigenschaft lassen sich einfach Regeln für die Subtraktion von Flächen ableiten. Eine Bilanz der auf die Fläche A_j auftreffenden Strahlungsenergie liefert gemeinsam mit dem Reziprozitätsgesetz (3.48)

$$A_j G_j = \sum_{i=1}^N A_i J_i F_{ij} = \sum_{i=1}^N A_j J_i F_{ji} \quad (3.51)$$

und daher unter Verwendung von (3.42)

$$G_j = \sum_{i=1}^N F_{ji} J_i = \sum_{i=1}^N F_{ji} (\varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) G_i) . \quad (3.52)$$

Nun sei

$$\dot{q}_i = J_i - G_i = \varepsilon_i(\sigma T_i^4 - G_i) \quad (3.53)$$

die Nettowärmestromdichte die die Oberfläche A_i verlässt (vgl. Abbildung 3.9). An dieser Stelle ist es günstig auf Matrixschreibweise mit $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_i]_{i=1,\dots,N}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_i]_{i=1,\dots,N}$, $\mathbf{T}^4 = [T_i^4]_{i=1,\dots,N}$, $\mathbf{G} = [G_i]_{i=1,\dots,N}$ und $\mathbf{F} = [F_{ij}]_{i=1,\dots,N,j=1,\dots,N}$ zu wechseln. Aus (3.52) und (3.53) folgen damit direkt die von den Oberflächen austretenden Nettowärmestromdichten

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\})\mathbf{F})^{-1} \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\sigma\mathbf{T}^4 \\ &= \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}(\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{F})\sigma\mathbf{T}^4 \end{aligned} \quad (3.54)$$

zufolge von thermischer Strahlung.

Aufgabe 3.5 (Wärmestromdichten zufolge von thermischer Strahlung). Berechnen Sie ausgehend von (3.52) und (3.53) beide in (3.54) dargestellten Ergebnisse.

Aufgabe 3.6 (Wärmestrahlung zwischen parallelen unendlich ausgedehnten Platten). Die beiden in Abbildung 3.10 skizzierten, durch Vakuum getrennten, unendlich ausgedehnten, ebenen, parallelen Platten haben die festen Temperaturen T_1 und T_2 . Die Oberflächen sind graue, diffuse Strahler, haben die Emissivitäten ε_1 und ε_2 und tauschen mittels thermischer Strahlung Energie aus.

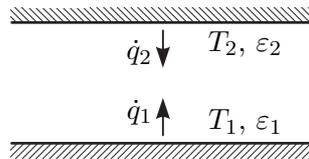


Abbildung 3.10: Unendlich ausgedehnte parallele Platten.

a) Begründen Sie formal warum hier für die Sichtfaktoren

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

gilt.

b) Berechnen Sie die Wärmestromdichte $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2$.

Lösung von Aufgabe 3.6.

b)

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{\sigma\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Beispiel 3.1 (Rohrreaktor mit Wärmeverlust durch Mantel). Abbildung 3.11 zeigt den Querschnitt eines Rohrreaktors der durch eine Vakuumschicht isoliert ist. Aufgrund der im Innenrohr ablaufenden exothermen chemischen Reaktion wird stationär der auf die Rohrlänge bezogene Wärmestrom \dot{q}° in W/m von der Reaktionskammer gleichmäßig an den Rohrmantel abgegeben. Alle Oberflächen sind graue, diffuse Strahler. Das Innenrohr mit dem Durchmesser d hat die Emissivität ε_1 . Das Außenrohr mit dem Durchmesser D hat beidseitig die Emissivität ε_2 . Es gibt durch Konvektion (Wärmeübergangskoeffizient α) Wärme an die umgebende Luft mit der festen Temperatur T_∞ ab. Zusätzlich geht Wärme über thermische Strahlung an die umgebenden Oberflächen, welche im Mittel ebenfalls die feste Temperatur T_∞ besitzen, verloren. Die Rohrwände seien vernachlässigbar dünn. Für die Berechnung der thermischen Strahlung sei der Reaktor im Vergleich zu den ihn umgebenden Oberflächen vernachlässigbar klein.

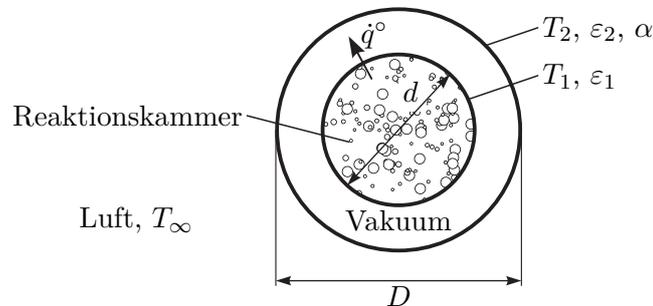


Abbildung 3.11: Rohrreaktor mit Wärmeverlust durch Mantel.

- a) Wie groß darf \dot{q}° maximal sein, damit das Außenrohr die bei Berührung durch Menschen ungefährliche Temperatur $T_{2,max}$ nicht überschreitet?

Da das innere Rohr von außen gesehen ein konvexer Körper ist, gilt für den Sichtfaktor $F_{11} = 0$ und aus der Summationsregel (3.50) folgt

$$F_{11} + F_{12} = F_{12} = 1 . \quad (3.57)$$

Mit dem Reziprozitätsgesetz (3.48) und der Rohrlänge l erhält man

$$A_1 F_{12} = l d \pi F_{12} = A_2 F_{21} = l D \pi F_{21} \quad (3.58)$$

und damit

$$F_{21} = \frac{d}{D} . \quad (3.59)$$

Der Sichtfaktor F_{22} lässt sich wiederum über die Summationsregel (3.50) $F_{21} + F_{22} = 1$ zu

$$F_{22} = 1 - \frac{d}{D} \quad (3.60)$$

bestimmen. Mit der Sichtfaktormatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{d}{D} & 1 - \frac{d}{D} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

errechnen sich die Nettowärmeströme nach (3.54) in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{d}{D} & \frac{d}{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}-\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -(1-\varepsilon_1) \\ -(1-\varepsilon_2)\frac{d}{D} & 1 - (1-\varepsilon_2)\left(1 - \frac{d}{D}\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}-(\mathbf{E}-\text{diag}(\varepsilon))\mathbf{F}}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}}_{\text{diag}(\varepsilon)} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^4} \quad (3.62)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1(1 - \varepsilon_2)\frac{d}{D}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{d}{D} & \frac{d}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Im stationären Fall muss der von der Reaktionskammer an den inneren Rohrmantel abgegebene Wärmestrom $\dot{q}^\circ/(d\pi)$ gleich dem Nettowärmestrom \dot{q}_1 und der vom äußeren Rohrmantel an die Umgebung abgegebene Wärmestrom zufolge Konvektion und Strahlung gleich dem Nettowärmestrom \dot{q}_2 sein, d. h.

$$\frac{\dot{q}^\circ}{d\pi} = \dot{q}_1 \quad \text{und} \quad -\alpha(T_2 - T_\infty) - \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_\infty^4) = \dot{q}_2. \quad (3.64)$$

Da gemäß (3.63) gilt $\dot{q}_2 = -\frac{d}{D}\dot{q}_1$, folgt aus (3.64) unmittelbar die Beziehung

$$\dot{q}^\circ = D\pi \left\{ \alpha(T_2 - T_\infty) + \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_\infty^4) \right\} \quad (3.65)$$

und daher muss der auf die Rohrlänge bezogene Wärmestrom \dot{q}° die Ungleichung

$$\dot{q}^\circ \leq D\pi \left\{ \alpha(T_{2,\max} - T_\infty) + \varepsilon_2 \sigma (T_{2,\max}^4 - T_\infty^4) \right\} \quad (3.66)$$

einhalten, damit die Temperatur T_2 am äußeren Rohrmantel den Wert $T_{2,\max}$ nicht übersteigt.

- b) Welche Temperatur T_1 stellt sich am Innenrohr ein, wenn der Reaktor bei der in Punkt a) berechneten Volllast betrieben wird?

Aus der Stationaritätsbeziehung $\dot{q}^\circ = d\pi\dot{q}_1$ (siehe (3.64)) lässt sich mit Hilfe von (3.63) und (3.66) die zu $T_{2,\max}$ zugehörige Temperatur des inneren Rohrs $T_{1,\max}$ zu

$$T_1 = \left(T_{2,\max}^4 + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{D}{\varepsilon_1 d} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \left(\alpha(T_{2,\max} - T_\infty) + \sigma \varepsilon_2 (T_{2,\max}^4 - T_\infty^4) \right) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.67)$$

berechnen.

Aufgabe 3.7. Die Sonne kann als eine strahlende Kugel mit dem Radius r_S und den Strahlungseigenschaften eines schwarzen Körpers betrachtet werden. Der mittlere Abstand zwischen Sonne und Erde beträgt l_{SE} . Als Solarkonstante E_0 bezeichnet man die Strahlungsleistung pro m^2 auf eine Fläche am äußersten Rand der Erdatmosphäre mit senkrecht einfallender Strahlung. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Oberflächentemperatur T_S und der Solarkonstanten?

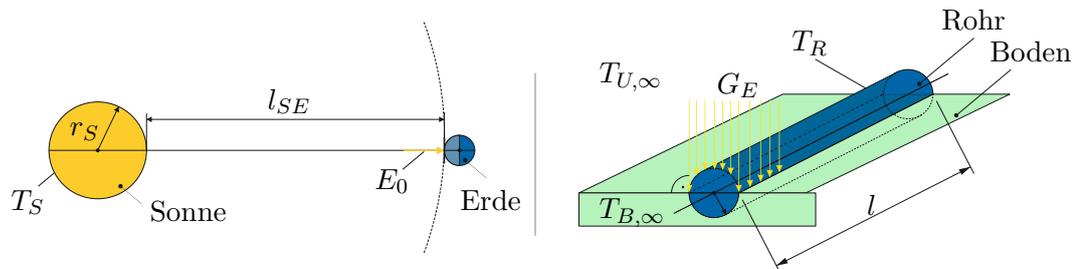


Abbildung 3.12: Sonnenabstrahlung und Erwärmung eines Rohres.

Die von der Sonne auf die Erde senkrecht eintretende Einstrahlung G_E erwärmt ein mit ruhendem Fluid gefülltes, dünnwandiges Rohr (Radius r , Länge l , Temperatur T_R). Das Rohr gibt seine Wärme in Form von Strahlung (Emissivität ϵ_R) und Konvektion (Wärmeübergangskoeffizient α_U) an die Umgebung mit der Umgebungstemperatur $T_{U,\infty}$ ab. Zudem wird dem Rohr durch Wärmeleitung über den Boden (Bodentemperatur $T_{B,\infty}$, Wärmeübergangskoeffizient α_B) Wärme entzogen. Ermitteln Sie eine Bestimmungsgleichung für die Oberflächentemperatur des Rohres T_R (und damit der Temperatur des Fluids) für den stationären Fall.

Hinweis: Sonne und Rohr werden als graue Strahler angenommen. Aufgrund von $l \gg r$ können die Wärmeströme an den Stirnflächen des Rohres vernachlässigt werden. Die Bestimmungsgleichung muss nicht explizit nach der Rohrtemperatur T_R aufgelöst werden.

Lösung von Aufgabe 3.7.

$$T_S = \left(\frac{E_0 (r_S + l_{SE})^2}{\sigma r_S^2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$0 = 2\epsilon_R G_E - \pi \left(\epsilon_R \sigma T_R^4 + \alpha_U (T_R - T_{U,\infty}) + \alpha_B (T_R - T_{B,\infty}) \right)$$

Die bisherigen Ergebnisse können direkt auch für 2-dimensionale Geometrien verwendet werden, allerdings vereinfacht sich in diesem Fall die in (3.47) definierte Berechnung von Sichtfaktoren erheblich. Die Annahme einer 2-dimensionalen Geometrie ist dann exakt erfüllt, wenn es sich um einen prismatischen Strahlungsraum (vgl. Abbildung 3.13a) mit unendlicher Längenausdehnung handelt. Die Flächen A_i sind dann vollständig durch die zugehörigen (nicht notwendigerweise geraden) Konturen mit den abgewickelten Längen a_i definiert. Man kann zeigen, dass in solchen 2-dimensionalen Geometrien für den Sichtfaktor

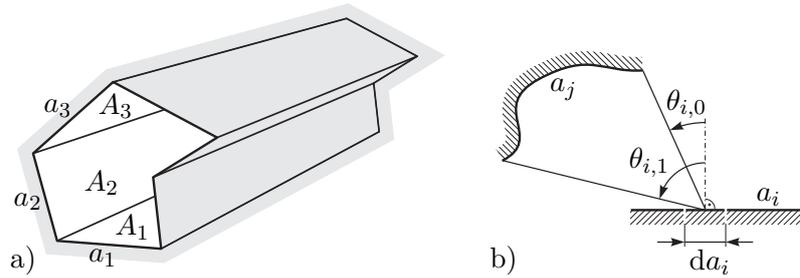


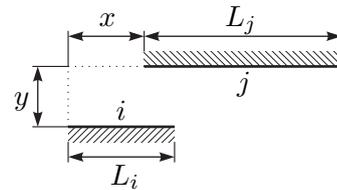
Abbildung 3.13: Vereinfachung bei 2-dimensionaler Geometrie, a) prismaförmiger Strahlungsraum, b) Integration entlang einer Kontur.

$$F_{ij} = \frac{1}{a_i} \int_{a_i} \int_{a_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{2s_{ij}} da_j da_i = \frac{1}{2a_i} \int_{a_i} \sin(\theta_{i,1}) - \sin(\theta_{i,0}) da_i \quad (3.68)$$

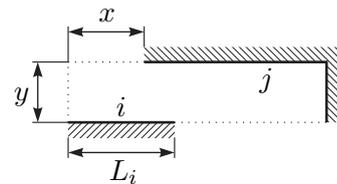
gilt. Die Winkel $\theta_{i,0}$ und $\theta_{i,1}$ sind in Abbildung 3.13b) definiert. In (3.68) kann das Integral entlang der Kontur a_i sehr häufig direkt analytisch berechnet werden. Ergebnisse für einige Fälle, wo eine analytische Berechnung leicht möglich ist, sind in Tabelle 3.1 angegeben.

Tabelle 3.1: Sichtfaktoren für einfache 2-dimensionale Geometrien.

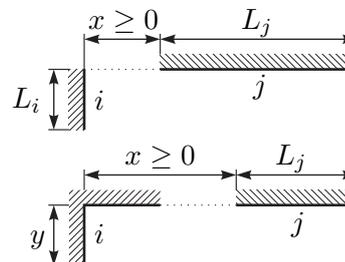
$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left(\sqrt{y^2 + (x + L_j)^2} + \sqrt{y^2 + (x - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + (x + L_j - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + x^2} \right)$$



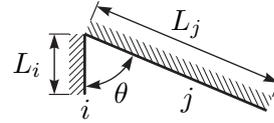
$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left(L_i + \sqrt{y^2 + (x - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + x^2} \right)$$



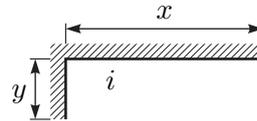
$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left(L_j + \sqrt{y^2 + x^2} - \sqrt{y^2 + (x + L_j)^2} \right)$$



$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left(L_i + L_j - \sqrt{L_i^2 + L_j^2 - 2L_i L_j \cos(\theta)} \right)$$



$$F_{ii} = 1 - \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{y + x}$$



Aufgabe 3.8 (Sichtfaktoren für einfache 2-dimensionale Geometrien). Rechnen Sie die in Tabelle 3.1 angegebenen Ergebnisse nach.

3.3 Wärmequellen

Wärme kann nicht originär erzeugt werden, sondern entsteht aus anderen Energieformen durch Umwandlung. Derartige Umwandlungsvorgänge und die Rückumwandlung von Wärme in andere Energieformen (soweit diese möglich ist) werden z. B. in der Thermodynamik studiert. Typische andere Energieformen sind mechanische Energie, elektrische Energie, chemische Energie, Strahlungsenergie und Kernenergie. Obwohl Wärme nur durch Umwandlung entstehen kann, ist es für Wärmebilanzen oft günstig von Wärmequellen zu sprechen. Im Folgenden werden einige Beispiele einfacher Umwandlungsvorgänge diskutiert.

Mechanische Reibung

In Abschnitt 2.2.5 wurde vorgestellt wie mechanische Arbeit durch Dissipation in Wärme umgewandelt werden kann. Reibung tritt typischerweise an der Berührfläche zweier Körper auf oder in sich deformierenden Körpern. Der Einfachheit halber wird hier nur der erste Fall behandelt.

Zufolge einer Reibkraft \mathbf{f}_r (resultierende Reibkraft) zwischen zwei Oberflächen, die sich berühren, wird nur dann mechanische Energie in Wärme umgewandelt, wenn sich die zwei Flächen relativ zueinander verschieben. Tun sie dies mit der Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} , so wird dem System mechanische Arbeit mit der Leistung

$$\dot{W}_r = -\mathbf{f}_r \cdot \mathbf{v} \quad (3.69)$$

entzogen. Da die Reibkraft stets der Bewegung entgegenwirkt, gilt $\dot{W}_r \geq 0$. \dot{W}_r kann in mechanische Verformungsenergie (plastische Deformation der Reibflächen, Bildung von Kratzern und Abrieb) oder Wärmeenergie umgewandelt werden. Welcher Anteil tatsächlich in Wärme umgewandelt wird, hängt von der jeweiligen Anwendung ab. In Bremssystemen beispielsweise soll ein möglichst großer Anteil in Wärme und nur ein geringer Anteil in Abriebenergie umgewandelt werden. Handelt es sich, anders als bei der für (3.69) postulierten translatorischen Relativbewegung, um einen rotatorischen

Reibvorgang, so entspricht die Reibleistung alternativ zu (3.69) dem negativen inneren Produkt aus Reibmoment und Drehwinkelgeschwindigkeit.

Die durch Reibung entstehende Wärme wird direkt an der Reibfläche (oder im deformierten Volumen) frei. Es ist daher oft zweckmäßig, statt \dot{W}_r eine auf die Fläche (das Volumen) bezogene Wärmequelle, d. h. eine Quelledichte, in W/m^2 (W/m^3) zu verwenden.

Ohmsche Last

Fließt durch ein infinitesimales Volumenelement $d\mathcal{V}$ eines elektrischen Leiters Strom mit der Stromdichte $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$, so muss das Element gemäß dem Ohmschen Gesetz einem elektrischen Feld

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \rho_e(\mathbf{x}, T)\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \quad (3.70)$$

ausgesetzt sein [3.21]. Hier bezeichnet ρ_e den spezifischen Ohmschen Widerstand des Materials, der im Allgemeinen vom Ort $\mathbf{x} = (x, y, z)$ und der lokalen Temperatur T abhängt. Häufig wird die Formulierung

$$\rho_e(\mathbf{x}, T) = \rho_{e,0}(\mathbf{x})(1 + \gamma(\mathbf{x})(T - T_0)) \quad (3.71)$$

mit dem Temperaturkoeffizienten γ und der Referenztemperatur T_0 zur Beschreibung dieses Effekts verwendet [3.21].

Der Stromfluss verursacht Interaktionen zwischen den sich bewegenden Elektronen und dem Atomgitter des Leiters, was zu einer Erhöhung der im Material gespeicherten thermischen Energie führt. In einem Ohmschen Widerstand wird daher am Punkt \mathbf{x} die Leistungsdichte

$$g(t, \mathbf{x}, T) = \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \rho_e(\mathbf{x}, T)\|\mathbf{J}(t, \mathbf{x})\|_2^2 = \frac{\|\mathbf{E}(t, \mathbf{x})\|_2^2}{\rho_e(\mathbf{x}, T)} \quad (3.72)$$

[3.21] dissipiert, d. h. in Wärme umgesetzt. Diese Beziehung lässt sich aus dem Verlust an potentieller Energie, den Ladungsteilchen erfahren, wenn sie sich im elektrischen Feld bewegen, herleiten (vgl. [3.22]). Grundsätzlich stellt elektrisch leitendes Material mit einem spezifischen Widerstand $\rho_e > 0$ also eine volumetrische Wärmequelle dar. Integriert man $g(t, \mathbf{x}, T)$ über das Volumen \mathcal{V} des Ohmschen Widerstandes R , so ergibt sich die gesamte in Wärme umgesetzte Leistung (*Joulesche Wärme*)

$$\dot{W}(t) = \int_{\mathcal{V}} g(t, \mathbf{x}, T) d\mathcal{V} = U(t)I(t) = RI^2(t) = \frac{U^2(t)}{R}, \quad (3.73)$$

[3.21] wobei $U(t)$ die anliegende Spannung und $I(t)$ der durchfließende Strom ist. Bei dieser Integration kann das Gebiet \mathcal{V} gedanklich in infinitesimale Stromröhren zerlegt werden, über deren Berandung kein Strom fließt.

Wird ein Leiter von Wechselstrom üblicher Netzfrequenz durchflossen, so reicht es zur Temperaturanalyse meist aus, mit den zeitlichen Mittelwerten von $g(t, \mathbf{x}, T)$ und $\dot{W}(t)$ zu rechnen, d. h. mit Effektivwerten. Der Grund dafür ist, dass die Zeitkonstanten des thermischen Verhaltens meist signifikant höher sind als jene des elektrischen Verhaltens.

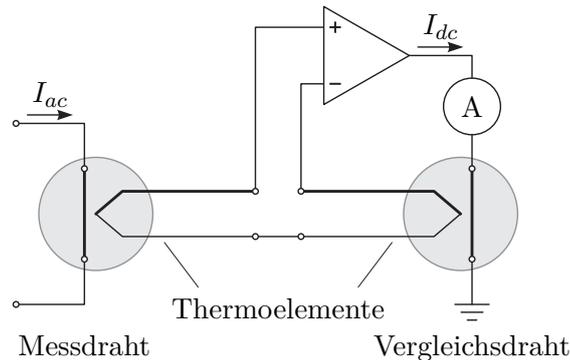


Abbildung 3.14: Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator zur Effektivwert-Messung des Stromes.

Bemerkung 3.3. Dieses Prinzip wird von sogenannten *Thermoumformern* zur Bestimmung von effektiven Stromwerten bei Frequenzen bis in den GHz-Bereich ausgenutzt. Dabei wird die Erwärmung eines stromdurchflossenen Widerstandsdrahtes gemessen. Dies erfolgt entweder direkt mit einem Thermoelement oder indirekt durch Erwärmung eines zweiten mit Gleichstrom betriebenen Vergleichsdrahtes. Der letztere, auch als Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator bekannte Fall ist in Abbildung 3.14 skizziert. Der mit dem Amperemeter gemessene Gleichstrom I_{dc} im Vergleichsdraht entspricht gerade dem Effektivwert des Stromes I_{ac} [3.23].

Aufgabe 3.9 (Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator). Für den in Abbildung 3.14 skizzierten Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator ist bekannt, dass der Messdraht und der Vergleichsdraht kreisrunde Querschnitte besitzen und aus dem gleichen Material gefertigt sind. Der Durchmesser des Messdrahtes sei D_{ac} ; jener des Vergleichsdrahtes D_{dc} . Die Drähte besitzen eine homogene Temperaturverteilung und werden ausschließlich durch Konvektion an der Mantelfläche gekühlt, wobei der Wärmeübergangskoeffizient α und die Umgebungstemperatur T_∞ bei beiden Drähten ident sind. Es wird hochfrequenter Wechselstrom I_{ac} gemessen, weshalb der Skin-Effekt die effektive Leiterquerschnittsfläche des Messdrahtes auf 10 % reduziert. Mit welchem Durchmesser Verhältnis D_{ac}/D_{dc} muss das Messgerät gebaut werden, damit der Gleichstrom I_{dc} dem zu messenden Effektivwert von I_{ac} entspricht?

Lösung von Aufgabe 3.9.

$$\frac{D_{ac}}{D_{dc}} = \sqrt[3]{10} \quad (3.74)$$

3.4 Stationäre Wärmeübertragung

In diesem Abschnitt werden einige einfache Beispiele zur stationären Wärmeübertragung diskutiert.

3.4.1 Ebene Wand

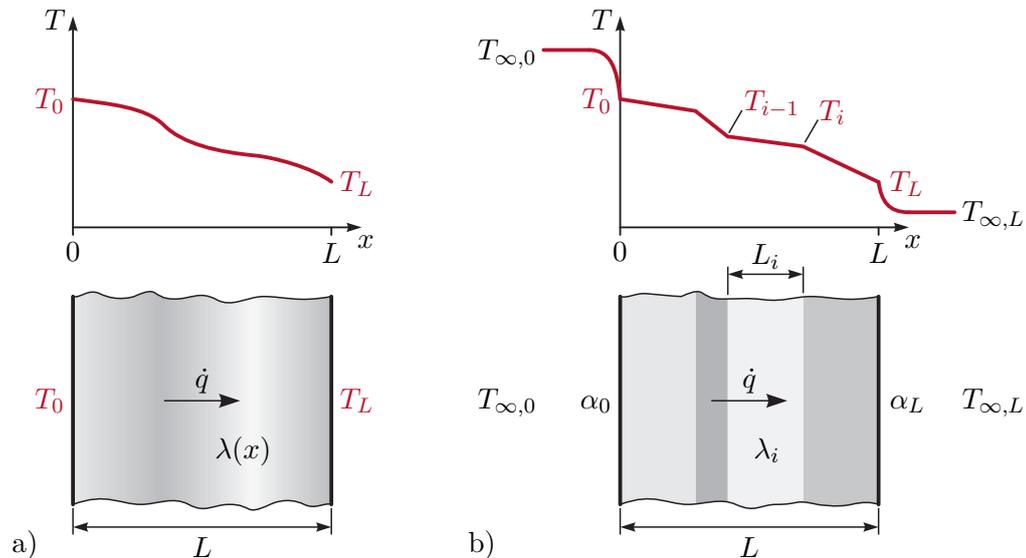


Abbildung 3.15: Stationäre Wärmeübertragung in ebener Wand, a) allgemeiner Wandaufbau mit Randbedingungen erster Art, b) schichtweise konstanter Wandaufbau mit Randbedingungen zweiter Art.

Die Bestimmung des Wärmestroms und des Temperaturprofils in einer ebenen Wand ohne Wärmequellen und mit Randbedingungen erster Art an beiden Oberflächen kann als 1-dimensionales Wärmeleitproblem in kartesischen Koordinaten aufgefasst werden. Im Folgenden soll von stationären Verhältnissen und isotropem Material mit temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit $\lambda(x)$ ausgegangen werden. Wie in Abbildung 3.15a dargestellt, habe die Wand die Dicke L und die beiden Oberflächentemperaturen $T(0) = T_0$ und $T(L) = T_L$. Im stationären Zustand muss gemäß (3.4) die Temperatur $T(x)$ dem Randwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} T(x) \right) = 0 \quad \text{und} \quad T(0) = T_0, T(L) = T_L \quad (3.75)$$

genügen. Aus (3.75) folgt

$$\lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} T(x) = C = \text{konst.} \quad (3.76)$$

und damit durch Integration

$$T(x) - T(0) = C \int_0^x \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x} . \quad (3.77)$$

Setzt man in (3.77) für $x = L$ ein, so erhält man

$$C = \frac{T(L) - T(0)}{\int_0^L \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}} \quad (3.78)$$

und damit das stationäre Temperaturprofil in der Wand in der Form

$$T(x) = T_0 + (T_L - T_0) \frac{\int_0^x \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}}{\int_0^L \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}} . \quad (3.79)$$

Die Wärmestromdichte \dot{q} gemäß (3.1) errechnet sich zu

$$\dot{q} = -\lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} T(x) = -C = \frac{T_0 - T_L}{\int_0^L \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}} \quad (3.80)$$

und für konstante Wärmeleitfähigkeit λ vereinfacht sich (3.80) zu

$$\dot{q} = \frac{\lambda}{L} (T_0 - T_L) . \quad (3.81)$$

Wegen $\lambda(x) > 0$ ist $T(x)$ entsprechend (3.79) monoton. Wie gemäß Abschnitt 3.1 zu erwarten war, haben die Massendichte ρ und die spezifische Wärmekapazität c_p keinen Einfluss auf den Wärmestrom und das stationäre Temperaturprofil in der Wand.

Ist eine Wand aus mehreren Schichten mit abschnittsweise konstanten Materialparametern aufgebaut, wie dies in Abbildung 3.15b) gezeigt ist, dann vereinfacht sich die Berechnung der Wärmestromdichte \dot{q} gemäß (3.84) erheblich. Man nehme an, die Wand bestehe aus den Schichten $i = 1, \dots, N$ mit den jeweiligen Dicken L_i und Wärmeleitfähigkeiten λ_i . Außerdem soll nun von Randbedingungen zweiter Art mit den Wärmeübergangskoeffizienten α_0 und α_L und den festen Temperaturen $T_{\infty,0}$ und $T_{\infty,L}$ der umgebenden Fluide ausgegangen werden. Für die Wärmestromdichte \dot{q} folgt in diesem Fall (siehe Abbildung 3.15b)) unter Berücksichtigung von (3.23) und (3.81)

$$\dot{q} = \alpha_0 (T_{\infty,0} - T_0) = \frac{\lambda_1}{L_1} (T_0 - T_1) = \dots = \frac{\lambda_N}{L_N} (T_{N-1} - T_L) = \alpha_L (T_L - T_{\infty,L}) . \quad (3.82)$$

Der *Wärmedurchgangskoeffizient* k (gelegentlich auch k -Wert genannt) in $\text{W/m}^2\text{K}$ beschreibt den Proportionalitätsfaktor zwischen der Differenz der Außentemperaturen ($T_{\infty,0} - T_{\infty,L}$) und der Wärmestromdichte \dot{q} . Aus (3.82) lassen sich einfach die Differenztemperaturen für jede Schicht berechnen und addieren

$$T_{\infty,0} - T_{\infty,L} = \underbrace{(T_{\infty,0} - T_0)}_{\dot{q} \frac{1}{\alpha_0}} + \underbrace{(T_0 - T_1)}_{\dot{q} \frac{L_1}{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{(T_{N-1} - T_L)}_{\dot{q} \frac{L_N}{\lambda_N}} + \underbrace{(T_L - T_{\infty,L})}_{\dot{q} \frac{1}{\alpha_L}} , \quad (3.83)$$

womit sich unmittelbar die Wärmestromdichte zu

$$\dot{q} = k (T_{\infty,0} - T_{\infty,L}) \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_L}} \quad (3.84)$$

ergibt. Man erkennt, dass die Wand besser isoliert, je kleiner der k -Faktor ist.

Beispiel 3.2 (Isolierverglasung). Bei der Auswahl der Fenster für ein neues Wohnhaus steht man vor der Entscheidung, konventionelle Fenster mit einer Einfachverglasung oder teurere Fenster mit einer Doppelverglasung zu wählen. Ein typisches Fenster mit Doppelverglasung ist in Abbildung 3.16 links dargestellt. Zum Vergleich der thermischen Eigenschaften soll das Verhältnis der Wärmeübergangskoeffizienten zwischen Einfach- und Doppelverglasung untersucht werden.

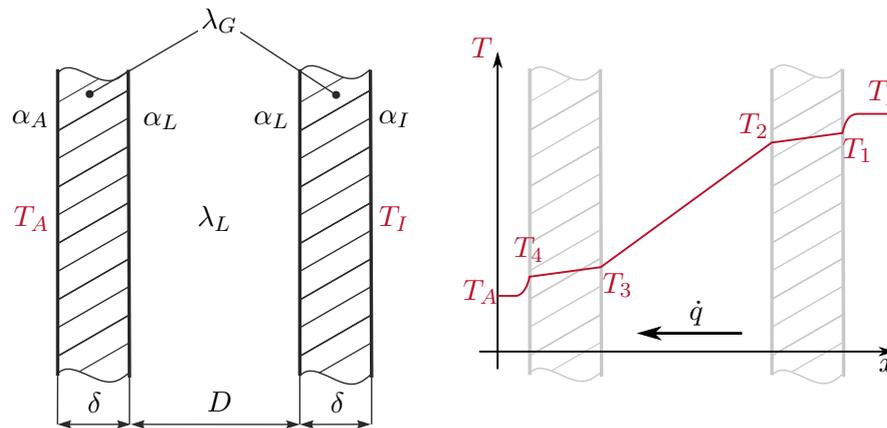


Abbildung 3.16: Querschnitt einer Doppelverglasung (links) mit typischem Temperaturverlauf (rechts).

Der Wärmeübergang von Glas auf Luft und umgekehrt wird im Scheibenzwischenraum vernachlässigt, d. h. $\alpha_L \rightarrow \infty$. Für den Fall $T_I > T_A$ ist ein typischer Temperaturverlauf in Abbildung 3.16 dargestellt. Da das gesamte Fenster von der selben Wärmestromdichte \dot{q} durchsetzt wird, ergeben sich für die einzelnen Segmente die Beziehungen

$$\dot{q} = \alpha_I(T_I - T_1) \quad (3.85a)$$

$$\dot{q} = \frac{\lambda_G}{\delta}(T_1 - T_2) \quad (3.85b)$$

$$\dot{q} = \frac{\lambda_L}{D}(T_2 - T_3) \quad (3.85c)$$

$$\dot{q} = \frac{\lambda_G}{\delta}(T_3 - T_4) \quad (3.85d)$$

$$\dot{q} = \alpha_A(T_4 - T_A), \quad (3.85e)$$

$$(3.85f)$$

welche ein lineares Gleichungssystem der unbekanntenen Größen T_1, T_2, T_3, T_4 und \dot{q} darstellen. Daraus folgt der Zusammenhang

$$\dot{q} \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_I} + 2 \frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{D}{\lambda_L} + \frac{1}{\alpha_A} \right)}_{\frac{1}{k_D}} = T_I - T_A, \quad (3.86)$$

woraus der Wärmedurchgangskoeffizient der Doppelverglasung abgelesen werden kann. Mit dem analog berechneten Wärmedurchgangskoeffizienten einer Einfachverglasung

$$\frac{1}{k_E} = \left(\frac{1}{\alpha_I} + \frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{1}{\alpha_A} \right) \quad (3.87)$$

ergibt sich das Verhältnis der beiden Durchgangskoeffizienten zu

$$\frac{k_E}{k_D} = 1 + \frac{\frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{D}{\lambda_L}}{\frac{1}{\alpha_I} + \frac{\delta}{\lambda_G} + \frac{1}{\alpha_A}}. \quad (3.88)$$

3.4.2 Zylinderförmige Wand

Für die in Abbildung 3.17 dargestellte aus N kreisförmigen Schichten bestehende Rohrwand soll für den stationären Fall ohne Wärmequellen der Temperaturverlauf und der Wärmestrom berechnet werden. Eine Schicht $i \in \{1, \dots, N\}$ habe den Innenradius r_{i-1} ,

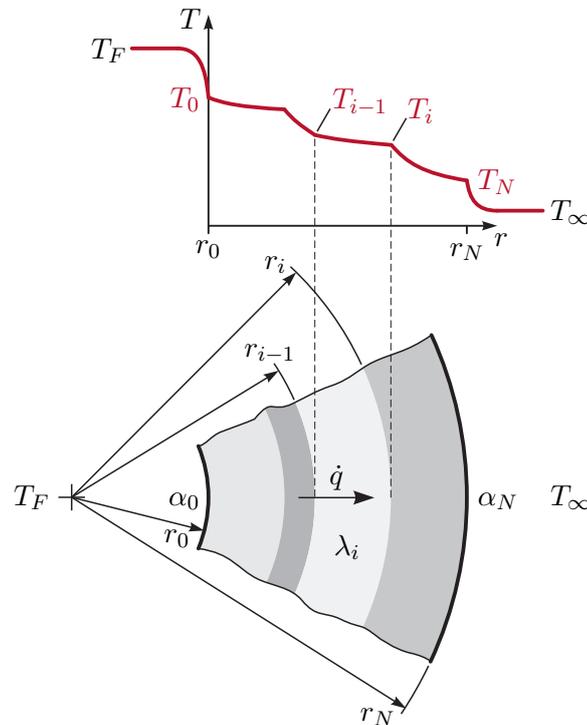


Abbildung 3.17: Stationäre Wärmeübertragung in zylinderförmiger Wand.

den Außenradius r_i und die homogene, temperaturunabhängige Wärmeleitfähigkeit λ_i . Im Rohr fließt ein Medium mit der festen Temperatur T_F und das Rohr wird von einem Medium mit der festen Temperatur T_∞ umströmt. Der Wärmeübergangskoeffizient an der Rohrinneenseite (Radius r_0) sei α_0 ; an der Rohraußenseite (Radius r_N) sei er α_N . Alle

Größen seien unabhängig von der Winkelkoordinate φ und der Längskoordinate z (vgl. Abbildung 3.2a), so dass die Annahme 1-dimensionaler Wärmeleitung in Richtung der radialen Koordinate r gerechtfertigt ist. Aus (3.5b) folgt damit für eine beliebige Schicht $i \in \{1, \dots, N\}$

$$0 = \lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \forall r \in (r_{i-1}, r_i) . \quad (3.89)$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$T(r) = T_{i-1} + (T_i - T_{i-1}) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)} \quad \forall r \in [r_{i-1}, r_i] \quad (3.90)$$

mit $T_i = T(r_i)$ und $T_{i-1} = T(r_{i-1})$. Wie es sein muss, hängt die lokale Wärmestromdichte

$$\dot{q}(r) = -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_i \frac{1}{r} \frac{T_{i-1} - T_i}{\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)} \quad \forall r \in (r_{i-1}, r_i) \quad (3.91)$$

vom Radius r ab. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen zweiter Art ergibt sich daher für die mehrschichtige Wand

$$\dot{q}(r) = (T_F - T_\infty) \frac{1}{r \underbrace{\frac{1}{r_0 \alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right) + \frac{1}{r_N \alpha_N}}_{=k(r)}} \quad (3.92)$$

mit dem vom Radius abhängigen Wärmedurchgangskoeffizienten $k(r)$ in $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$. Praktisch interessant ist auch noch der vom Radius unabhängige auf die Rohrlänge bezogene Wärmestrom

$$\dot{q}^\circ = (T_F - T_\infty) \frac{2\pi}{\underbrace{\frac{1}{r_0 \alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right) + \frac{1}{r_N \alpha_N}}_{=k^\circ}} \quad (3.93)$$

mit dem bezogenen Wärmedurchgangskoeffizienten k° in $\text{W}/(\text{mK})$.

Aufgabe 3.10 (Bezogener Wärmedurchgangskoeffizient bei schichtweisem zylinderförmigem Wandaufbau). Leiten Sie (3.93) ausgehend von (3.89) her. Beachten Sie, dass im Gegensatz zu (3.82) der Ausdruck $r\dot{q}(r)$ betrachtet werden muss.

3.4.3 Vorspringende Teile und Rippen

Um den Wärmeübergang zwischen Festkörpern und Fluiden zu verbessern, wird häufig die wirksame Wärmeaustauschfläche konstruktiv vergrößert, z. B. durch Rippen. Abbildung 3.18 zeigt ein Beispiel eines mit Rippen versehenen Kühlkörpers für Elektronikbauteile.

Bemerkung 3.4. Auch in der Natur sind solche konstruktiv vergrößerten Wärmeaustauschflächen zu beobachten: Delphine nützen ihre Flossen auch zur Temperaturregulation. Bei afrikanischen Elefanten entfällt rund ein Sechstel der Körperoberfläche auf



Abbildung 3.18: Kühlkörper für Elektronikbauteile.

die kühlenden Ohren.

Da eine exakte Berechnung des Temperaturfeldes und Wärmeübertragungsverhaltens solcher Bauteile meist mit erheblichem Aufwand verbunden ist, beschränkt man sich oft auf Näherungen mit zahlreichen vereinfachenden Annahmen.

Mit diesen Ergebnissen lässt sich der Effekt von Rippen (oder anderen konstruktiven Elementen) auf den Wärmeaustausch an einer Oberfläche bestimmen. Ausschlaggebend ist die Form und das Material der Rippen sowie deren Einfluss auf die Wärmeübertragung an der Oberfläche (z. B. verringerter Wärmeübergangskoeffizient durch behinderte Strömung und verringerte Wärmestrahlung durch Schattenwurf). Zur Beurteilung, ob der Einsatz bestimmter Rippen zweckmäßig ist, ist der Gesamtwärmestrom durch den Basisquerschnitt (Befestigungsstelle $x = 0$ in Abbildung A.1) der Rippen sowie durch die zwischen den Rippen liegenden Flächen mit jenem Gesamtwärmestrom zu vergleichen, der ohne Rippen auftreten würde. In diesem Zusammenhang wird häufig der Rippenwirkungsgrad

$$\eta_f = \frac{\dot{Q}(0)}{\dot{Q}_{max}} \in [0, 1] \quad (3.94)$$

als Maßzahl verwendet. Er setzt den tatsächlich an der Befestigungsstelle $x = 0$ auftretenden Wärmestrom $\dot{Q}(0)$ ins Verhältnis zum Wärmestrom \dot{Q}_{max} , der auftreten würde, wenn die gesamte Rippenoberfläche die Temperatur T_0 (Temperatur an der Befestigungsstelle $x = 0$) hätte.

3.5 Transiente Wärmeübertragung

Meist ist das Finden einer exakten analytischen Lösung von transienten Wärmeübertragungsproblemen, die die Wärmeleitgleichung (3.4) beinhalten, eine herausfordernde Aufgabe. Für praktische Anwendungen werden daher oft numerische Näherungsverfahren zur Lösung verwendet (vgl. Abschnitt 3.6). In speziellen Fällen lassen sich jedoch geschlossene analytische Lösungen finden, die z. B. bei der Verifikation von numerischen Lösungsverfahren oder als Näherungslösung für ähnliche Problemstellungen dienlich sein können.

Aufgabe 3.11 (Einfaches transientes Wärmeleitproblem). Für ein 1-dimensionales Wärmeleitproblem mit konstanter, homogener Temperaturleitfähigkeit a gelte $g = \lambda^2 \text{ K/m}^2$, d. h.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2a \quad x \in [0, 1], t > 0. \quad (3.95a)$$

Hinzu kommen die Anfangs- und Randbedingungen

$$T(0, x) = \sin(\pi x) + 1 - x^2 \quad x \in [0, 1] \quad (3.95b)$$

$$T(t, 0) = 1, \quad T(t, 1) = 0 \quad t > 0. \quad (3.95c)$$

Berechnen Sie die analytische Lösung $T(t, x)$ für dieses Problem. Sie können dabei die Laplace-Transformation bezüglich der Zeit t verwenden.

Lösung von Aufgabe 3.11.

$$T(t, x) = e^{-a\pi^2 t} \sin(\pi x) + 1 - x^2 \quad (3.96)$$

Beispiel 3.3 (Tauchsieder). Der in Abbildung 3.19 skizzierte zylindrische Behälter ist

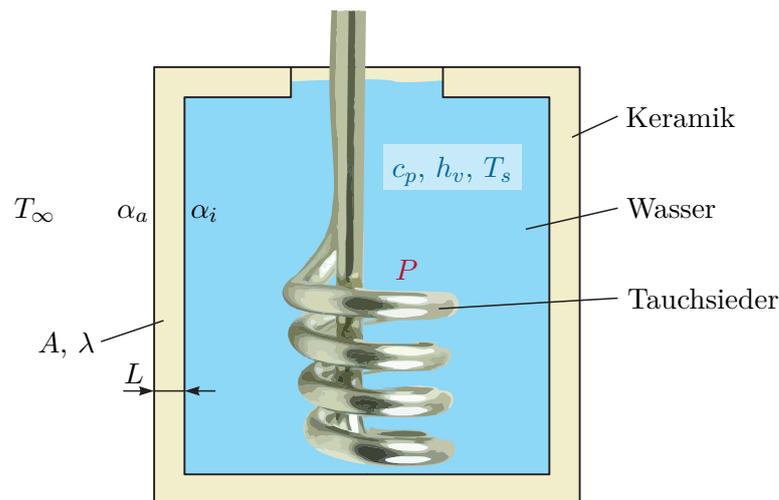


Abbildung 3.19: Wasserbehälter mit Tauchsieder.

zunächst vollständig mit Wasser (Masse m_0 , spezifische Wärmekapazität c_p im flüssigen Zustand, Verdampfungsenthalpie h_v in J/kg, Siedetemperatur T_s) mit einer anfänglichen Temperatur $T_0 = T_\infty$ gefüllt. Es wird angenommen, dass die Grundfläche und die mit einer Öffnung versehene Deckfläche des Behälters adiabatisch (kein Wärmeaustausch mit der Umgebung) sind.

Der Mantel des Zylinders hat eine Dicke L und eine Fläche A und besteht aus Keramik (Wärmeleitfähigkeit λ). Der Mantel tauscht durch freie Konvektion Wärme sowohl mit dem enthaltenen Wasser als auch mit der umgebenden Luft aus. Der Wärmeübergangskoeffizient beträgt innen α_i und außen α_a . Die wirksame Wärme-

austauschfläche ist proportional zum Füllstand des Behälters. Die Luft hat eine feste Temperatur T_∞ . Es ist von stationärer Wärmeübertragung durch den Behältermantel auszugehen, wobei die Wand aufgrund ihrer geringen Dicke als eben betrachtet werden kann. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird ein im Behälter eingebauter Tauchsieder eingeschaltet.

Es soll nun die Leistung P des Tauchsieders so dimensioniert werden, dass das Wasser zum Zeitpunkt t_s zu sieden beginnt. Dazu wird angenommen, dass die Wassertemperatur $T(t)$ homogen ist und die gesamte Leistung P in Wärme umgewandelt und vom Wasser aufgenommen wird. Nach (3.4) lautet die zugehörige Differentialgleichung

$$m_0 c_p \frac{d}{dt} T(t) = P - kA(T(t) - T_\infty), \quad T(0) = T_\infty \quad (3.97)$$

mit dem Wärmedurchgangskoeffizienten gemäß (3.84)

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}}. \quad (3.98)$$

Die Lösung von (3.97) resultiert in

$$T(t) = T_\infty + \frac{P}{kA} \left(1 - e^{-\frac{kA}{m_0 c_p} t} \right) \quad (3.99)$$

und damit folgt für die Leistung P (damit zum Siedezeitpunkt t_s gilt $T(t_s) = T_s$) die Beziehung

$$P = \frac{kA(T_s - T_\infty)}{1 - e^{-\frac{kA}{m_0 c_p} t_s}}. \quad (3.100)$$

Wenn das Wasser die Siedetemperatur T_s erreicht, dann bedingt die durch den Tauchsieder zugeführte Wärmemenge, dass es zum Verdampfen des Fluids kommt und die Wassertemperatur $T(t) = T_s$ bleibt für alle Zeiten $t \geq t_s$ konstant. Da die wirksame Wärmeaustauschfläche proportional zum Füllstand des Behälters ist, folgt für den an die Umgebung abgegebenen Wärmestrom

$$\dot{Q}_{ab}(t) = -\frac{m_0 - m_D(t)}{m_0} kA(T_s - T_\infty), \quad (3.101)$$

wobei $m_D(t)$ jene Wassermenge bezeichnet, die bereits in Dampf umgewandelt wurde. Aus der Energiebilanz erhält man

$$h_v \frac{d}{dt} m_D(t) = P - \frac{m_0 - m_D(t)}{m_0} kA(T_s - T_\infty), \quad m_D(t_s) = 0 \quad (3.102)$$

und damit

$$m_D(t) = m_0 \left(1 - \frac{P}{kA(T_s - T_\infty)} \right) \left(1 - e^{-\frac{kA(T_s - T_\infty)}{h_v m_0} (t - t_s)} \right), \quad t \geq t_s. \quad (3.103)$$

Aus (3.103) erkennt man, dass die gesamte Wassermenge nach der Zeit

$$t = t_s + \ln\left(\frac{P}{P - kA(T_s - T_\infty)}\right) \frac{h_v m_0}{kA(T_s - T_\infty)} \quad (3.104)$$

verdampft ist.

3.6 Numerische Lösung von Wärmeübertragungsproblemen

Die Wärmeleitgleichung (3.4) ist ein Anfangs-Randwert-Problem und gehört zur Klasse der parabolischen Differentialgleichungen. Die Randbedingungen ergeben sich in Abhängigkeit der jeweiligen Aufgabenstellung. Für stationäre Problemstellungen vereinfacht sich (3.4) zu einer elliptischen Differentialgleichung. Zur numerischen Lösung von Wärmeübertragungsproblemen mit Wärmeleitung kommen daher alle Verfahren in Frage, die grundsätzlich für parabolische oder elliptische Differentialgleichungen geeignet sind. Dazu gehören z. B. die Finite Differenzen Methode [3.24], das Kollokationsverfahren, die Galerkin Methode, die Finite Volumen Methode und die Finite Elemente Methode [3.25]. Außer der Finiten Differenzen Methode sind all diese Verfahren Spezialisierungen der Methode der gewichteten Residuen. Der vorliegende Abschnitt gibt eine erste Einführung in die Finite Differenzen Methode und eine daraus ableitbare konzentriert-parametrische Problemformulierung als thermisches RC-Netzwerk.

3.6.1 Finite Differenzen Methode

Bei der Finite Differenzen Methode wird das Rechengebiet örtlich und zumeist auch zeitlich in Gitter eingeteilt und die Lösung wird nur an den Gitterpunkten berechnet. Dazu werden die in den Differentialgleichungen vorkommenden Ableitungen näherungsweise durch Differenzenquotienten ersetzt. Für eine allgemeine, hinreichend oft differenzierbare Funktion $y(x)$ sind in Tabelle 3.2 Beispiele für Differenzenquotienten gegeben, wenn das Gitter entlang der x -Achse eine gleichförmige Schrittweite Δx aufweist. Die Tabelle zeigt auch die Ordnung des Abschneidefehlers.

Tabelle 3.2: Differenzenquotienten.

1. Ableitung, Vorwärtsdifferenz	$y'(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$
1. Ableitung, Rückwärtsdifferenz	$y'(x) = \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$
1. Ableitung, zentrale Differenz	$y'(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$
2. Ableitung, zentrale Differenz	$y''(x) = \frac{y(x - \Delta x) - 2y(x) + y(x + \Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$

Aufgabe 3.12 (Differenzenquotienten). Die Herleitung von Differenzenquotienten und die Berechnung der zugehörigen Abschneidefehler kann mittels Taylorreihenentwicklung am Punkt x erfolgen. Rechnen Sie auf diese Art die in Tabelle 3.2 angegebenen Differenzenquotienten nach.

Anhand des 1-dimensionalen Wärmeleitproblems

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \forall t > 0, x \in (0, L) \quad (3.105a)$$

mit $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ (homogenes Material, konstante Materialparameter, keine Quellterme) für die Temperatur $T(t, x)$ im Gebiet $x = [0, L]$ mit den Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.105b)$$

$$T(t, L) = T_L(t) \quad (3.105c)$$

und der Anfangsbedingung

$$T(0, x) = T_A(x) \quad (3.105d)$$

soll die Finite Differenzen Methode veranschaulicht werden. Das Rechengebiet wird örtlich in N Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) aufgeteilt, wobei

$$x_i = i\Delta x \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad \Delta x = \frac{L}{N}. \quad (3.106)$$

Außerdem soll die Zeitachse in Intervalle der festen Länge Δt unterteilt werden, so dass sich die Gitterpunkte

$$t_j = j\Delta t \quad (3.107)$$

ergeben. Für die Werte an den Gitterpunkten werden die Abkürzungen $T_i(t) = T(t, x_i)$ und $T_i^j = T(t_j, x_i) = T_i(t_j)$ verwendet. Aus einer Ersetzung der Ortsableitung in (3.105a) gemäß Tabelle 3.2 folgt das Anfangswertproblem

$$\dot{T}_i(t) = \frac{a}{\Delta x^2} (T_{i-1}(t) - 2T_i(t) + T_{i+1}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.108a)$$

$$\dot{T}_0(t) = \frac{2a}{\Delta x^2} (T_1(t) - T_0(t)) \quad (3.108b)$$

mit den Anfangswerten

$$T_i(0) = T_A(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.108c)$$

In (3.108a) gilt natürlich $T_N(t) = T_L(t)$. Um (3.108b) zu erhalten, wurde ein virtueller Gitterpunkt an der Stelle x_{-1} eingeführt und die Randbedingung (3.105b) mit dem zentralen Differenzenquotienten ausgewertet. Dies führt auf

$$\frac{T_1(t) - T_{-1}(t)}{2\Delta x} = 0 \quad (3.109)$$

und damit die in (3.108b) verwendete Beziehung $T_{-1}(t) = T_1(t)$. Das Anfangswertproblem (3.108) ist linear und liegt bereits in Zustandsraumdarstellung vor. Es kann also

direkt die Lösungsformel für lineare zeitinvariante Systeme zur Berechnung der Temperaturtrajektorien verwendet werden. Alternativ kann das Anfangswertproblem auch mit üblichen numerischen Methoden integriert werden. Das Euler-Vorwärtsverfahren, das aus der Anwendung des Vorwärtsdifferenzenquotienten (vgl. Tabelle 3.2) auf die linken Seiten von (3.108a) und (3.108b) folgt, ist eine solche Methode. Es führt auf die explizite Differenzengleichung

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta t a}{\Delta x^2} (T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j) \quad j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.110a)$$

$$T_0^{j+1} = T_0^j + \frac{2\Delta t a}{\Delta x^2} (T_1^j - T_0^j) \quad j \geq 0 \quad (3.110b)$$

mit den Anfangswerten

$$T_i^0 = T_A(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.110c)$$

Es ist unmittelbar einsichtig, dass dieses zeitdiskrete lineare System nicht für beliebige Werte $\Delta t a / \Delta x^2$ stabil ist. D. h. die Wahl der Zeitschrittweite Δt ist auf die Wahl der Ortsschrittweite Δx abzustimmen. Das Einhalten der Bedingung

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.111)$$

garantiert die Stabilität von (3.110). Auf den Beweis dieser Bedingung wird hier verzichtet – er kann z. B. in [3.26] nachgeschlagen werden.

Mit der hier beschriebenen Finite Differenzen Formulierung können bereits 1-dimensionale transiente Wärmeleitungsprobleme gelöst werden. Andere Arten der Diskretisierung, insbesondere der Zeitableitung in (3.105a) finden sich z. B. in [3.3, 3.4, 3.10]. Darunter sind auch Formulierungen die auf implizite Differenzengleichungen führen, deren Stabilität bedingungslos oder mit weniger stringenten Anforderungen an Δt und Δx gesichert ist. Die Anwendung des Verfahrens auf mehrdimensionale Wärmeleitprobleme wird z. B. in [3.4, 3.10, 3.11] beschrieben. Theoretische Grundlagen zur Finite Differenzen Methode finden sich z. B. in [3.24].

Aufgabe 3.13 (Differenzenquotienten für unregelmäßige Gitter). Auch die Anwendung der Finite Differenzen Methode mit unregelmäßigen Gittern und auf unregelmäßige Rechengebiete ist möglich. Als Vorbereitung dazu dienen die folgenden Rechnungen. Es ist wie in Tabelle 3.2 von einer Funktion $y(x)$ auszugehen, wobei die x -Achse mit der nicht notwendigerweise regelmäßigen Schrittweite $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ zu diskretisieren ist.

a) Zeigen Sie, dass die zunächst naheliegende Formulierung

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (3.112)$$

für den zentralen Differenzenquotienten 1. Ordnung einen Abschneidefehler von nur linearer Ordnung aufweist.

- b) Finden Sie unter Verwendung von $y(x_{i-1})$, $y(x_i)$ und $y(x_{i+1})$ eine bessere Formulierung für $y'(x_i)$, deren Abschneidefehler stets quadratische Ordnung besitzt.
- c) Finden Sie unter Verwendung von $y(x_{i-1})$, $y(x_i)$ und $y(x_{i+1})$ einen Differenzenquotienten, der eine Näherung für $y''(x_i)$ repräsentiert, und zeigen Sie, dass deren Abschneidefehler lineare Ordnung besitzt.

Lösung von Aufgabe 3.13.

b)

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} + y(x_i) \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} - \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \right) - y(x_{i-1}) \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (3.113)$$

c)

$$y''(x_i) = 2 \frac{y(x_{i+1}) \frac{1}{\Delta x_i} - y(x_i) \left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i} \right) + y(x_{i-1}) \frac{1}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (3.114)$$

Aufgabe 3.14 (Stationäre Wärmeübertragung in einem umströmten Stab). Rechnen Sie mit Hilfe der Finiten Differenzen Methode die Ergebnisse (A.11) und (A.13) für die Parameterwerte $L = 0.5 \text{ m}$, $T_0 = 353 \text{ K}$, $T_L = T_\infty = 293 \text{ K}$, $\alpha = \alpha_L = 25 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, $P = 0.5 \text{ m}$, $A = 0.01 \text{ m}^2$ und $\lambda = 60 \text{ W}/(\text{m K})$ nach. Implementieren Sie dazu die Gleichung (A.10a) samt den jeweils zugehörigen Randbedingungen in einem Computernumerikprogramm. Ersetzen Sie dabei die Ortsableitungen durch zentrale Differenzenquotienten gemäß Tabelle 3.2 für ein regelmäßiges Gitter mit der Schrittweite Δx . Vergleichen Sie die Ergebnisse für unterschiedliche Schrittweiten mit den analytischen Resultaten (A.11) und (A.13).

Aufgabe 3.15 (Transiente Wärmeübertragung in einem umströmten Stab). Erweitern Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 3.14 zu einer transienten Analyse. Verwenden Sie die Anfangsbedingung $T(x, 0) = T_\infty$ und die Parameter $\rho = 7850 \text{ kg}/\text{m}^3$ und $c_p = 450 \text{ J}/(\text{kg K})$ und wählen Sie unter Berücksichtigung von (3.111) geeignete Schrittweiten Δt und Δx . Wie lange dauert es bis die maximale Differenz zwischen stationärem und transientem Temperaturprofil den Wert $0.05(T_0 - T_\infty)$ unterschreitet?

3.6.2 Konzentriert-parametrische Formulierung als RC-Netzwerk

Ein meist zentraler Schritt bei der numerischen Lösung von Wärmeübertragungsproblemen ist der Übergang von einer verteilt-parametrischen zu einer konzentriert-parametrischen Formulierung, d. h. die räumliche Diskretisierung. Im vergangenen Abschnitt beruhte dieser Übergang rein auf mathematischen Überlegungen zur Berechnung von Ableitungen. Aufbauend auf diesen Resultaten zeigt der vorliegende Abschnitt eine physikalisch

motiviert die Möglichkeit zur räumlich diskreten Formulierung von Wärmeübertragungsproblemen. Diese Formulierung führt auf eine anschauliche Analogie zwischen elektrischen RC-Netzwerken und thermischen Netzwerken (thermische RC-Netzwerke). Die nachfolgend näher diskutierten korrespondierenden Größen sind in Tabelle 3.3 aufgelistet.

Tabelle 3.3: Analogie zwischen elektrischen und thermischen Netzwerken.

Elektrische Größe	Einheit	Thermische Größe	Variable	Einheit
Potentialdifferenz	V	Temperaturdifferenz	T	K
Elektrischer Strom	A	Wärmestrom	\dot{Q}	W
Elektrische Ladung	C	Enthalpie	H	J
Elektrischer Widerstand	Ω	Thermischer Widerstand	R	K/W
Elektrische Kapazität	F	Thermische Kapazität	C	J/K

Die Temperatur T stellt eine Zweipunktgröße dar, der Wärmestrom \dot{Q} eine Einpunktgröße. Ähnlich dem Ohmschen Gesetz in der Elektrotechnik gilt für die Temperaturdifferenz ΔT an den beiden Enden eines thermischen Widerstandes R

$$\Delta T = R\dot{Q} . \quad (3.115a)$$

Ferner kann das dynamische Verhalten der Temperatur T (Zustandsgröße) einer thermischen Kapazität C durch

$$\dot{T} = \frac{\dot{Q}}{C} \quad (3.115b)$$

charakterisiert werden. Auch hier ist die Ähnlichkeit zur Strom-Spannungsbeziehung an elektrischen Kapazitäten unmittelbar ersichtlich. Bemerkenswerterweise findet sich im Bereich der Wärmeübertragung aber kein Analogon zur elektrischen Induktivität. Dies erklärt aus physikalischer Sicht, warum es in thermischen Netzwerken (ohne periodische Anregung) kein oszillierendes Verhalten geben kann. D. h. das linearisierte dynamische System besitzt ausschließlich rein reelle Eigenwerte.

Die Darstellung eines Wärmeübertragungsproblems als thermisches RC-Netzwerk kann hilfreich sein, weil die aus der Elektrotechnik bekannten Knoten- und Maschengleichungen zur Netzwerkanalyse genutzt werden können. Ferner können gängige Netzwerksimulationsprogramme zur Berechnung herangezogen werden.

Abbildung 3.20 zeigt einen an der Mantelfläche und am Ende $x = 0$ isolierten Stab, dessen transienter Temperaturverlauf z. B. mit Hilfe von (3.108) berechnet werden kann. Die Diskretisierungspunkte x_i sind als schwarze Punkte in Abbildung 3.20 dargestellt. Die Querschnittsfläche des Stabes sei konstant A . Man kann nun in (3.108a) und (3.108b) durch Umschreiben in die Form

$$\underbrace{\Delta x A \rho c_p}_{=C_i} \dot{T}_i(t) = A \underbrace{\frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{i-1,i}}} (T_{i-1}(t) - T_i(t)) + A \underbrace{\frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{i,i+1}}} (T_{i+1}(t) - T_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (3.116a)$$

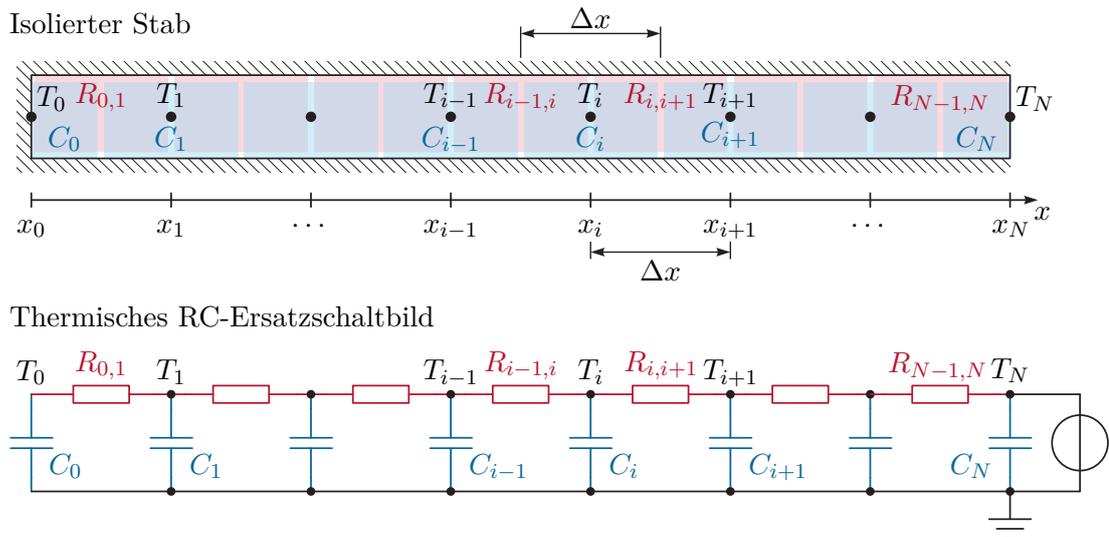


Abbildung 3.20: Finite Differenzen Formulierung als Kette von RC-Gliedern.

$$\underbrace{\frac{\Delta x}{2} A \rho c_p}_{=C_0} \dot{T}_0(t) = A \underbrace{\frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{0,1}}} (T_1(t) - T_0(t)) \quad (3.116b)$$

thermische Kapazitäten C_i und thermische Widerstände $R_{i,i+1}$ identifizieren und das in Abbildung 3.20 gezeigte Ersatzschaltbild erstellen. Es hat eine leiterförmige Struktur und wird auch Cauer Modell genannt. Der thermische Widerstand $R_{i,i+1}$ verbindet den Knoten x_i mit dem Knoten x_{i+1} . Die thermische Kapazität C_i verbindet den Knoten x_i mit der thermischen Masse. Da der Knoten x_0 am Rand des Rechengebietes liegt, ist seine thermische Kapazität C_0 nur halb so groß, wie die der Knoten im Inneren. Gleiches würde auch für den Randknoten x_N gelten, dessen thermische Kapazität C_N aber hier nicht von Bedeutung ist, da $T_N(t) = T_L(t)$ fest vorgegeben ist (Randbedingung erster Art).

An diesem einfachen Beispiel werden bereits einige der folgenden Prinzipien von thermischen RC-Netzwerken klar:

- Ein thermisches RC-Netzwerk beschreibt ein Anfangswertproblem (gewöhnliche Differentialgleichung mit Anfangswerten, vgl. das Zustandsraummodell (3.108)).
- Thermische Widerstände stellen immer eine thermische Verbindungsstrecke zwischen zwei Knoten dar. Außerdem treten sie bei einigen Randbedingungen auf. Mit thermischen Widerständen lassen sich wärmeleitende Volumen und generell Wärmeübertragungsstrecken modellieren. Der in stationären Wärmeübertragungsproblemen häufig verwendete k -Wert (vgl. (3.84) und (3.92)) steht mit dem thermischen Widerstand über die Beziehung

$$R = \frac{1}{Ak} \quad (3.117)$$

in Verbindung, wobei A die Querschnittsfläche des Widerstandes ist.

- Volumetrische Wärmequellen können als zusätzliche in die Netzwerkknoten mündende Stromquellen modelliert werden (vgl. Abbildung 3.21d).
- Thermische Kapazitäten sind immer direkt mit der thermischen Masse verbunden, d. h. alle Kapazitäten sind sternförmig um die thermische Masse angeordnet. Thermische Kapazitäten haben keinen Einfluss auf die stationäre Temperaturverteilung und das stationäre Wärmeübertragungsverhalten des Systems.
- Die Temperatur (das Potential) der thermischen Masse kann im Falle konstanter Materialparameter (spezifischer Wärmekapazität, Dichte, Leitfähigkeit) auf einen beliebigen Wert gesetzt werden.
- Eine Randbedingung erster Art (fest vorgegebene Temperatur T_a) kann als ideale Potentialquelle modelliert werden (vgl. Abbildung 3.21a).
- Eine Randbedingung zweiter Art (fest vorgegebener Wärmestrom \dot{Q}_a) kann als ideale Stromquelle modelliert werden (vgl. Abbildung 3.21b)). (Entfällt im obigen Beispiel, da der Wärmestrom am Rand $x = 0$ verschwindet.)
- Eine Randbedingung dritter Art (temperaturabhängige Wärmestromdichte $\alpha(T_\infty - T_a)$, vgl. die Abschnitte 3.2.1 bis 3.2.3) kann mit Hilfe eines thermischen Widerstandes (Kontakt- oder Übergangswiderstand)

$$R_a = \frac{1}{A\alpha} \quad (3.118)$$

modelliert werden, wobei A die Fläche der Randbedingung ist. Ist eines der beiden Temperaturniveaus fest vorgegeben (gilt z. B. häufig für die Umgebungstemperatur T_∞), so ist der Widerstand an eine ideale Potentialquelle zu koppeln (vgl. Abbildung 3.21c)).

- Soll ein RC-Netzwerkmodell auch zur Abbildung nichtlinearer Effekte (z. B. Wärmestrahlung, vgl. Abschnitt 3.2.4) verwendet werden, so sind die konstitutiven Beziehungen (3.115) durch entsprechende nichtlineare Ausdrücke zu ersetzen. Außerdem ist es natürlich möglich den linearisierten Anteil des thermischen Verhaltens als lineares Netzwerk zu modellieren.

Als Grundeinheit zur Erstellung thermischer RC-Netzwerke kann das in Abbildung 3.21d) gezeigte Knotenelement i dienen. Es ist über eine Kapazität C_i mit der thermischen Masse und über Widerstände $R_{i,j}$ mit den anderen Knoten $j = 1, 2, \dots$ verbunden und beinhaltet außerdem eine (volumetrische) Wärmequelle G_i . Eine andere als die in Abbildung 3.20 gezeigte sternförmige Anordnung der Kapazitäten rund um die thermische Masse kann durch Transformationen gefunden werden. Eine eindeutige physikalische Interpretation ist jedoch nur bei der sternförmigen Anordnung der Kapazitäten möglich.

Im obigen Beispiel wurde gezeigt, dass eine Finite Differenzen Formulierung eines Wärmeübertragungsproblems eine einfache Interpretation als thermisches RC-Netzwerk

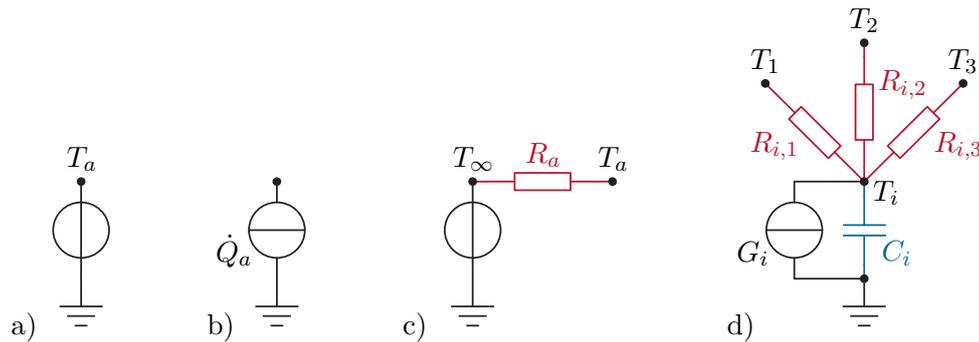


Abbildung 3.21: Basiselemente für thermische RC-Netzwerke, a) Randbedingung erster Art, b) Randbedingung zweiter Art, c) Randbedingung dritter Art, d) Knotenelement mit Wärmequelle.

in Form eines Cauer Modells zulässt. Dieses Prinzip ist erweiterbar, denn das Modellierungsergebnis muss nicht zwingend ein Cauer Modell sein und der Ausgangspunkt der Modellierung ist zumeist keine Finite Differenzen Diskretisierung. Vielmehr kann ausgehend von einem physikalischen Modell durch benutzerdefinierte Partitionierung des Rechengebietes direkt manuell ein thermisches RC-Ersatzschaltbild erstellt werden. Daraus kann leicht ein Zustandsraummodell des Systems abgelesen werden.

Im Falle eines prismatischen, an der Mantelfläche isolierten Körpers mit der volumetrischen Wärmequelle g gilt (vgl. auch (3.108))

$$C_i = \Delta x_i A \rho c_p \quad (3.119a)$$

$$R_{i,i+1} = \frac{\Delta x_{i,i+1}}{A \lambda} \quad (3.119b)$$

$$G_i = \Delta x_i A g \quad (3.119c)$$

In technischen Anwendungen mit komplexeren Geometrien werden diese Werte oft in Messungen oder numerischen Analysen bestimmt. Wie das nachfolgende Beispiel zeigt, können auch Serien- und Parallelschaltungen von thermischen Widerständen zumindest näherungsweise berechnet werden. In der darauffolgenden Aufgabe wird die passive Kühlung eines Elektronikbauteils untersucht.

Beispiel 3.4 (Serien- und Parallelschaltung von thermischen Widerständen). Abbildung 3.22 a) zeigt einen inhomogenen wärmeleitenden Quader mit der Länge L , der Breite B und der Höhe H (vgl. [3.4]). An der linken und an der rechten Seitenfläche werden homogen verteilte feste Randtemperaturen eingepreßt (Randbedingungen erster Art). Alle übrigen Oberflächen sind adiabatisch. Der Quader besteht aus den vier Blöcken a , b , c und d mit unterschiedlichen Materialien.

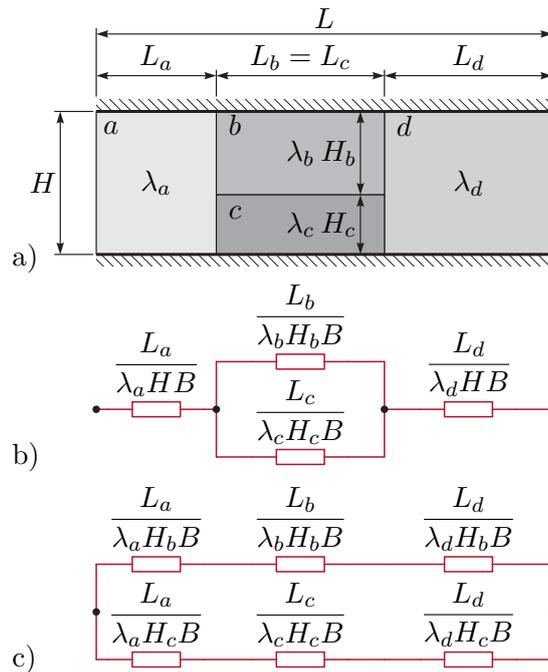


Abbildung 3.22: Serien- und Parallelschaltung von thermischen Widerständen (in Anlehnung an [3.4]), a) Aufbau, b) thermisches Ersatzschaltbild für untere Schranke des Gesamtwiderstandes, c) thermisches Ersatzschaltbild für obere Schranke des Gesamtwiderstandes.

Um den thermischen Widerstand R des Quaders zu ermitteln, müsste ein 2-dimensionales stationäres Wärmeleitproblem (numerisch) gelöst werden. Durch einfache Serien- und Parallelschaltungen von Teilwiderständen lassen sich aber untere und obere Schranken für R finden, die oftmals brauchbare Näherungen für R sind. Zur Erklärung kann man gedanklich von einer orthotropen Wärmeleitfähigkeit ausgehen. In horizontaler Richtung gelten die angegebenen Wärmeleitfähigkeiten λ_a , λ_b , λ_c und λ_d . Geht man davon aus, dass für die Wärmeleitfähigkeit in vertikaler Richtung $\lambda_v \rightarrow \infty$ gilt, so bedingt dies eine homogene Temperaturverteilung entlang vertikaler Schnittflächen innerhalb der Teilbereiche a und d und insbesondere an deren Grenzschichten. Die thermischen Widerstände der Bereiche b und c sind daher, wie in Abbildung 3.22b) dargestellt, an ihren Enden thermisch verbunden. Für dieses Ersatzschaltbild folgt

$$\underline{R} = \frac{L_a}{\lambda_a H B} + \frac{1}{\frac{\lambda_b H_b B}{L_b} + \frac{\lambda_c H_c B}{L_c}} + \frac{L_d}{\lambda_d H B}, \quad (3.120)$$

was eine untere Schranke des thermischen Gesamtwiderstandes R darstellt. Wird hingegen $\lambda_v = 0$ angenommen, womit kein Wärmestrom in vertikale Richtung möglich ist, so ergibt sich ein thermisches Ersatzschaltbild gemäß Abbildung 3.22c) mit der

oberen Schranke

$$\bar{R} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{L_a}{\lambda_a H_b B} + \frac{L_b}{\lambda_b H_b B} + \frac{L_d}{\lambda_d H_b B}} + \frac{1}{\frac{L_a}{\lambda_a H_c B} + \frac{L_c}{\lambda_c H_c B} + \frac{L_d}{\lambda_d H_c B}}} . \quad (3.121)$$

Beispiel 3.5 (Dimensionierung eines Kühlkörpers für einen Spannungsregler). Ein linearer Spannungsregler liefert am Ausgang $U_a = 5 \text{ V}$, wobei für die Eingangsspannung $6 \text{ V} \leq U_e \leq 20 \text{ V}$ gelten muss. Die angeschlossene Last zieht einen Gleichstrom $I_a = 0.5 \text{ A}$. Der gleiche Strom fließt auch eingangsseitig, d. h. der Spannungsregler reduziert nur die Eingangsspannung auf den gewünschten Ausgangswert U_a . Aus dem Datenblatt des Spannungsreglers sind außerdem die thermischen Widerstandswerte $R_{SB} = 5 \text{ K/W}$ und $R_{B\infty} = 60 \text{ K/W}$ bekannt. R_{SB} ist der thermische Widerstand zwischen Sperrschicht und Basisplatte und $R_{B\infty}$ ist der thermische Widerstand zwischen Basisplatte und Umgebungsluft. Die Basisplatte hat eine Masse $m_B = 0.002 \text{ kg}$ und eine spezifische Wärmekapazität $c_B = 385 \text{ J/(kg K)}$ (Kupfer). Die Wärmeübertragung über das Kunststoffgehäuse und die elektrischen Anschlusskontakte sei vernachlässigbar klein.

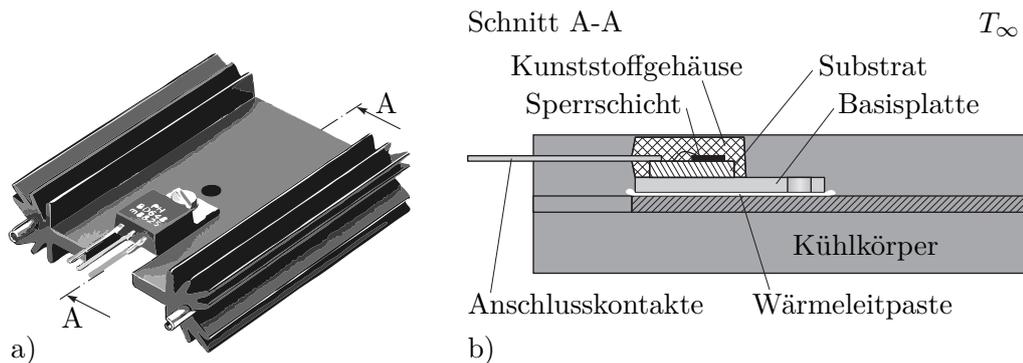


Abbildung 3.23: Spannungsregler mit Kühlkörper, a) Ansicht, b) innerer Aufbau.

Die Sperrschichttemperatur T_S soll den Wert $T_{S,max} = 403 \text{ K}$ nicht überschreiten, wobei die Umgebungsluft die feste Temperatur $T_\infty = 323 \text{ K}$ aufweist. Um die Kühlung zu verbessern, wird ein Kühlkörper (passive Kühlung) mit der Masse $m_K = 0.02 \text{ kg}$ und der spezifischen Wärmekapazität $c_K = 903 \text{ J/(kg K)}$ (Aluminium) aufgeschraubt. Der thermische Widerstand zwischen Kühlkörper und Umgebungsluft beträgt laut Datenblatt des Kühlkörpers $R_{K\infty} = 7 \text{ K/W}$. Durch die Verwendung von Wärmeleitpaste konnte der Übergangswiderstand zwischen Basisplatte und Kühlkörper im Vergleich zu einem Luftspalt deutlich reduziert werden. Die Paste besitzt eine Wärmeleitfähigkeit von $\lambda = 0.8 \text{ W/(m K)}$ und wurde auf einer Fläche $A = 150 \text{ mm}^2$ mit einer Dicke $H = 30 \text{ }\mu\text{m}$ aufgetragen. Durch Anwenden der konzentriert-parametrischen Formulierung sollen folgende Fragen geklärt werden:

- a) Wie hoch darf die Eingangsspannung U_e im stationären Fall mit bzw. ohne Kühlkörper maximal sein, damit die zulässige Sperrschichttemperatur $T_{S,max}$

eingehalten wird?

- b) Zur Untersuchung des Einflusses von Schwankungen der Eingangsspannung soll davon ausgegangen werden, dass die Eingangsspannung $U_e(t)$ sinusförmig zwischen 6 V und 20 V schwankt, d. h. den Verlauf $U_e(t) = \bar{U}_e + \hat{U}_e \cos(2\pi ft)$ mit $\bar{U}_e = 13$ V und $\hat{U}_e = 7$ V besitzt. Welche Frequenz f muss das Signal mindestens haben, damit der Spannungsregler in der Konfiguration mit dem Kühlkörper nicht überhitzt?

Die in Abbildung 3.23 dargestellte Konfiguration lässt sich durch die thermischen Ersatzschaltbilder gemäß Abbildung 3.24 beschreiben, wobei P die Heizleistung des Spannungsreglers und R_P den Wärmeübergangswiderstand der Wärmeleitpaste bezeichnen.

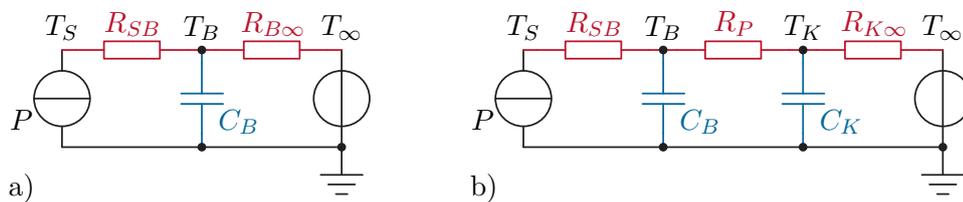


Abbildung 3.24: Thermische Ersatzschaltbilder, a) ohne Kühlkörper, b) mit Kühlkörper.

ad a) Die Heizleistung des Spannungsreglers beträgt

$$P = (U_e - U_a)I_a, \quad (3.122)$$

so dass

$$U_{e,max} = U_a + \frac{P_{max}}{I_a}. \quad (3.123)$$

Für die maximale Heizleistung gilt im stationären Fall

$$P_{max} = \frac{T_{S,max} - T_\infty}{R_{ges}}, \quad (3.124)$$

wobei ohne Kühlkörper für den Gesamtwiderstand

$$R_{ges} = R_{SB} + R_{B\infty} \quad (3.125)$$

gilt und mit Kühlkörper

$$R_{ges} = R_{SB} + R_P + R_{K\infty}. \quad (3.126)$$

Hierbei ist

$$R_P = \frac{H}{\lambda A} \quad (3.127)$$

der Wärmeübergangswiderstand der Wärmeleitpaste. Damit kann die maximale Eingangsspannung $U_{e,max}$ direkt berechnet werden. Ohne Kühlkörper dürfen maximal 7.462 V und mit Kühlkörper maximal 18.061 V am Eingang anliegen.

ad b) Für die thermischen Kapazitäten gilt

$$C_B = m_B c_B, \quad C_K = m_K c_K \quad (3.128)$$

und für die Heizleistung im Spannungsregler erhält man

$$P(t) = (\bar{U}_e + \hat{U}_e \cos(2\pi ft) - U_a) I_a = \underbrace{(\bar{U}_e - U_a) I_a}_{=\bar{P}} + \underbrace{\hat{U}_e I_a}_{\hat{P}} \cos(2\pi ft). \quad (3.129)$$

Da es sich um ein lineares System handelt gilt für die Sperrschichttemperatur

$$T_S(t) = \bar{T}_S + \hat{T}_S \cos(2\pi ft + \varphi) \quad (3.130)$$

mit dem konstanten Anteil

$$\bar{T}_S = T_\infty + \bar{P}(R_{SB} + R_P + R_{K\infty}), \quad (3.131)$$

der Amplitude

$$\hat{T}_S = |G(j2\pi f)| \hat{P} \quad (3.132)$$

und der Phase

$$\varphi = \arg(G(j2\pi f)). \quad (3.133)$$

Die hier verwendete Übertragungsfunktion

$$G(s) = R_{SB} + \frac{R_P(1 + sR_{K\infty}C_K) + R_{K\infty}}{(1 + sR_P C_B)(1 + sR_{K\infty}C_K) + sR_{K\infty}C_B} \quad (3.134)$$

lässt sich leicht anhand des in Abbildung 3.24b gezeigten RC-Netzwerks berechnen. Natürlich zeigt sie Tiefpassverhalten. Die gesuchte minimale Frequenz f_{min} lässt sich aus der Bestimmungsgleichung

$$\frac{T_{S,max} - \bar{T}_S}{\hat{U}_e I_a} = |G(j2\pi f_{min})| \quad (3.135)$$

berechnen. Man erhält z. B. durch numerisches Lösen von (3.135) $f_{min} = 1.429 \cdot 10^{-3} \text{ Hz} = 5.146 \text{ h}^{-1}$.

3.7 Literatur

- [3.1] M. Moran und H. Shapiro, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, 6. Aufl. New York: John Wiley & Sons, 2009.
- [3.2] P. Stephan, K. Schaber, K. Stephan und F. Mayinger, *Thermodynamik, Band 1: Einstoffsysteme*, 18. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2009.
- [3.3] H.D. Baehr und K. Stephan, *Heat and Mass Transfer*, 2. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
- [3.4] F.P. Incropera, D.P. DeWitt, T.L. Bergman und A.S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 6. Aufl. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007.
- [3.5] J.H. Lienhard IV und J.H. Lienhard V, *A Heat Transfer Textbook*, 3. Aufl. Cambridge, Massachusetts: Phlogiston Press, 2002.
- [3.6] J. Welty, C. Wicks, R. Wilson und G. Rorrer, *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*, 5. Aufl. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007.
- [3.7] M. Protter und H. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*. New York: Springer, 1984.
- [3.8] W.M. Kays, M.E. Crawford und B. Weigand, *Convective Heat and Mass Transfer*, 4. Aufl. New York: McGraw Hill, 2005.
- [3.9] H. Schlichting und K. Gersten, *Grenzschicht-Theorie*, 10. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
- [3.10] A. Bejan und A. Kraus, Hrsg., *Heat Transfer Textbook*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2003.
- [3.11] Y. Çengel und G. A.J., *Heat Transfer: A Practical Approach*, 4. Aufl. New York: McGraw-Hill, 2011.
- [3.12] M. Favre-Marinet und S. Tardu, *Convective Heat Transfer: Solved Problems*, Ser. ISTE. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.
- [3.13] J. Holman, *Heat transfer*, 10. Aufl. New York: McGraw-Hill, 2009.
- [3.14] Verein Deutscher Ingenieure, *VDI-Wärmeatlas*, 10. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
- [3.15] W. Wagner, *Wärmeübertragung: Grundlagen*, 7. Aufl., Ser. Kamprath-Reihe. Würzburg: Vogel Buchverlag, 2011.
- [3.16] Y. Çengel, J. Cimbala und R. Turner, *Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences*, 4. Aufl. New York: McGraw-Hill, 2012.
- [3.17] M.F. Modest, *Radiative Heat Transfer*, 3. Aufl. New York: Academic Press, 2013.
- [3.18] J. Howell, R. Siegel und P. Mengüç, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 5. Aufl. Boca Raton: CRC Press, 2010.
- [3.19] H.C. Hottel und A.F. Sarofim, *Radiative Transfer*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [3.20] J.R. Howell, *A Catalog of Radiation Heat Transfer Configuration Factors*, 3. Aufl. <http://www.engr.uky.edu/rtl/Catalog>, 2010.

-
- [3.21] M. Albach, *Grundlagen der Elektrotechnik 1: Erfahrungssätze Bauelemente Gleichstromschaltungen*, 3. Aufl. München: Pearson Studium, 2011.
- [3.22] P. Tipler und R. Llewellyn, *Moderne Physik*, 2. Aufl. München: Oldenbourg, 2010.
- [3.23] E. Schrüfer, L. Reindl und B. Zagar, *Elektrische Messtechnik: Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen*, 10. Aufl. München: Hanser, 2012.
- [3.24] J. Thomas, *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Ser. Texts in Applied Mathematics 22. New York: Springer, 1995.
- [3.25] J.-M. Bergheau und R. Fortunier, *Finite Element Simulation of Heat Transfer*. Hoboken, NJ: Wiley, 2008.
- [3.26] H.R. Schwarz und N. Köckler, *Numerische Mathematik*, 6. Aufl. Wiesbaden: B.G. Teubner, 2006.

A Ergänzungen zu Kapitel 3

A.1 Gaußscher Divergenzsatz

Es sei $\mathcal{V}(t)$ ein Kontrollvolumen mit dem infinitesimalen Volumenelement $d\mathcal{V}$ und der zugehörigen Oberfläche $\partial\mathcal{V}(t)$. Im Weiteren bezeichne \mathbf{n} den nach außen gerichteten Normalenvektor am infinitesimalen Oberflächenelement $d\mathcal{A}$. Der *Gaußsche Divergenzsatz* besagt nun, dass gilt

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \nabla \cdot \mathbf{h} \, d\mathcal{V} = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (\text{A.1})$$

für einen Vektor \mathbf{h} bzw.

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \nabla h \, d\mathcal{V} = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} h \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (\text{A.2})$$

für einen Skalar h .

A.2 Skizze der Herleitung der Beziehung (3.24)

Aus (3.18), (3.19a) und (3.11) erhält man für den lokalen Wärmestrom \dot{q}_y an der Stelle x in y -Richtung im laminaren Bereich die Beziehung

$$\dot{q}_y = \text{Nu}_{\text{lam},x} \frac{T_P - T_\infty}{x} \lambda = \sqrt{\text{Re}_x} \varphi(\text{Pr}) \frac{T_P - T_\infty}{x} \lambda = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \varphi(\text{Pr}) \frac{T_P - T_\infty}{\sqrt{x}} \lambda. \quad (\text{A.3})$$

Damit ergibt sich der über die Plattenlänge L gemittelte Wärmestrom zu

$$\dot{q} = \frac{1}{L} \int_0^L \dot{q}_y \, dx = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \varphi(\text{Pr}) (T_P - T_\infty) \lambda \sqrt{x} \Big|_0^L = 2 \sqrt{\frac{u_\infty}{L\nu}} \varphi(\text{Pr}) (T_P - T_\infty) \lambda. \quad (\text{A.4})$$

Setzt man (A.4) in die Definition der mittleren Nußelt-Zahl gemäß (3.18) ein, so erhält man

$$\text{Nu} = \dot{q} \frac{L}{(T_P - T_\infty) \lambda} = 2 \sqrt{\frac{u_\infty L}{\nu}} \varphi(\text{Pr}) = 2 \sqrt{\text{Re}_L} \varphi(\text{Pr}) = 2 \text{Nu}_{\text{lam},L}. \quad (\text{A.5})$$

Auf analoge Art und Weise lassen sich auch alle anderen Beziehungen von (3.24) berechnen.

A.3 Wärmeleitung eines vorspringenden Bauteils

Es wird dabei angenommen, dass der Bauteil die Länge L habe mit der lokalen Querschnittsfläche $A(x)$ und der isotropen Wärmeleitfähigkeit $\lambda(x, T)$ am Ort x . Außerdem

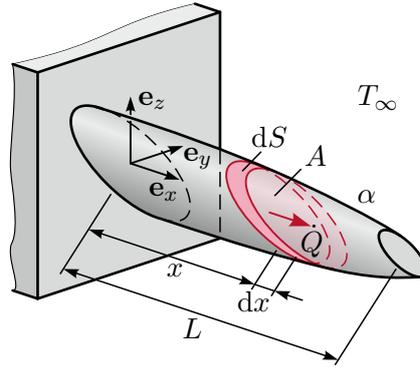


Abbildung A.1: Wärmeleitung in vorspringendem Bauteil.

sei dessen Mantelfläche im Bereich $[0, x]$ durch die Funktion $S(x)$ gegeben. An der Mantelfläche wird ausschließlich durch Konvektion Wärme mit der Umgebung ausgetauscht, wobei sowohl der Wärmeübergangskoeffizient $\alpha(x)$ als auch die feste Temperatur $T_\infty(x)$ des Fluids von x abhängen können. Insbesondere bei eng angeordneten Rippen trifft dies zu. Der Bauteil besitzt keine Wärmequellen. Die Temperatur sei in jedem Querschnitt $x = \text{const.}$ homogen, d. h. es wird von 1-dimensionaler Wärmeleitung in Richtung x ausgegangen und für den Gesamtwärmestrom $\dot{Q}(x)$ gilt entsprechend dem Fourierschen Wärmeleitgesetz (3.1)

$$\dot{Q}(x) = A(x)\dot{q}(x) = -\lambda(x, T)A(x)\frac{\partial T(x)}{\partial x}. \quad (\text{A.6})$$

Die Energiebilanz für den infinitesimalen Bereich $[x, x + dx]$ lautet

$$\begin{aligned} \dot{Q}(x) - \dot{Q}(x + dx) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, T)A(x)\frac{\partial T(x)}{\partial x} \right) dx \\ &= \alpha(x)(S(x + dx) - S(x))(T(x) - T_\infty(x)) = \alpha(x)\frac{\partial S(x)}{\partial x} dx(T(x) - T_\infty(x)), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

wobei der Term auf der rechten Seite den konvektiven Wärmeaustausch mit der Umgebung beschreibt. Der Grenzübergang $dx \rightarrow 0$ liefert die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, T)A(x)\frac{\partial T(x)}{\partial x} \right) - \alpha(x)\frac{\partial S(x)}{\partial x}(T(x) - T_\infty(x)) = 0 \quad (\text{A.8})$$

für das Temperaturfeld im Bauteil. Es handelt sich um ein lineares Randwertproblem, d. h. zur tatsächlichen Berechnung des Temperaturfeldes und der Wärmestromdichte werden natürlich noch Randbedingungen an den Stellen $x = 0$ (Befestigungsstelle) und $x = L$ (freie Stirnfläche) benötigt.

Im Folgenden werden einige Spezialisierungen des obigen Problems diskutiert, für die einfache analytische Lösungen existieren. Es handelt sich um einen umströmten Stab, wobei an der Stelle $x = 0$ die Temperatur $T(0) = T_0$ stets fest vorgegeben sei. Die Größen

A , λ , α und T_∞ hängen nicht von x ab. Ferner sei λ unabhängig von der Temperatur und für die Mantelfläche gelte

$$S(x) = Px, \quad (\text{A.9})$$

d. h. der lokale Umfang $P = \partial S(x)/\partial x$ hängt nicht von x ab. An der Stirnfläche $x = L$ ist zunächst mit konvektivem Wärmeübergang (Wärmeübergangskoeffizient α_L , feste Fluidtemperatur T_∞) zu rechnen. Mit diesen Annahmen vereinfacht sich (A.8) zu

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{\alpha P}{\lambda A}}_{=m^2} (T(x) - T_\infty) = 0 \quad (\text{A.10a})$$

mit den Randbedingungen

$$T(0) = T_0, \quad \alpha_L (T(L) - T_\infty) = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L}. \quad (\text{A.10b})$$

Die Lösung dieses Randwertproblems lautet

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{\lambda m \cosh(m(L-x)) + \alpha_L \sinh(m(L-x))}{\lambda m \cosh(mL) + \alpha_L \sinh(mL)}, \quad (\text{A.11a})$$

so dass für den interessierenden Wärmestrom an der Stelle $x = 0$

$$\dot{Q}(0) = \lambda A m (T_0 - T_\infty) \frac{\lambda m \sinh(mL) + \alpha_L \cosh(mL)}{\lambda m \cosh(mL) + \alpha_L \sinh(mL)} \quad (\text{A.11b})$$

folgt. Diese Lösung gilt für einen umströmten Stab mit einer Randbedingung erster Art an der Stelle $x = 0$ und einer Randbedingung dritter Art an der Stelle $x = L$. Der Spezialfall einer adiabaten Randbedingung an der Stelle $x = L$ (ideal isolierte Stirnfläche, Randbedingung zweiter Art) folgt direkt aus dem Ergebnis (A.11) durch Verwendung von $\alpha_L = 0$.

Wird an der Stelle $x = L$ die Temperatur T_L fest vorgegeben (Randbedingung erster Art auf beiden Seiten), so sind die Randbedingungen (A.10b) durch

$$T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L \quad (\text{A.12})$$

zu ersetzen und man erhält die Lösung

$$T(x) = T_\infty + \frac{(T_0 - T_\infty) \sinh(m(L-x)) + (T_L - T_\infty) \sinh(mx)}{\sinh(mL)} \quad (\text{A.13a})$$

$$\dot{Q}(0) = \lambda A m \frac{(T_0 - T_\infty) \cosh(mL) - (T_L - T_\infty)}{\sinh(mL)}. \quad (\text{A.13b})$$

Unabhängig von der Randbedingung an der Stelle $x = L$ erhält man für den Spezialfall eines unendlich langen Stabes durch Grenzübergang $L \rightarrow \infty$ aus den obigen Ergebnissen

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-mx} \quad (\text{A.14a})$$

$$\dot{Q}(0) = \lambda A m (T_0 - T_\infty). \quad (\text{A.14b})$$

Aufgabe A.1 (Wärmeübertragung in einem umströmten Stab). Rechnen Sie die Ergebnisse (A.11), (A.13) und (A.14) nach.