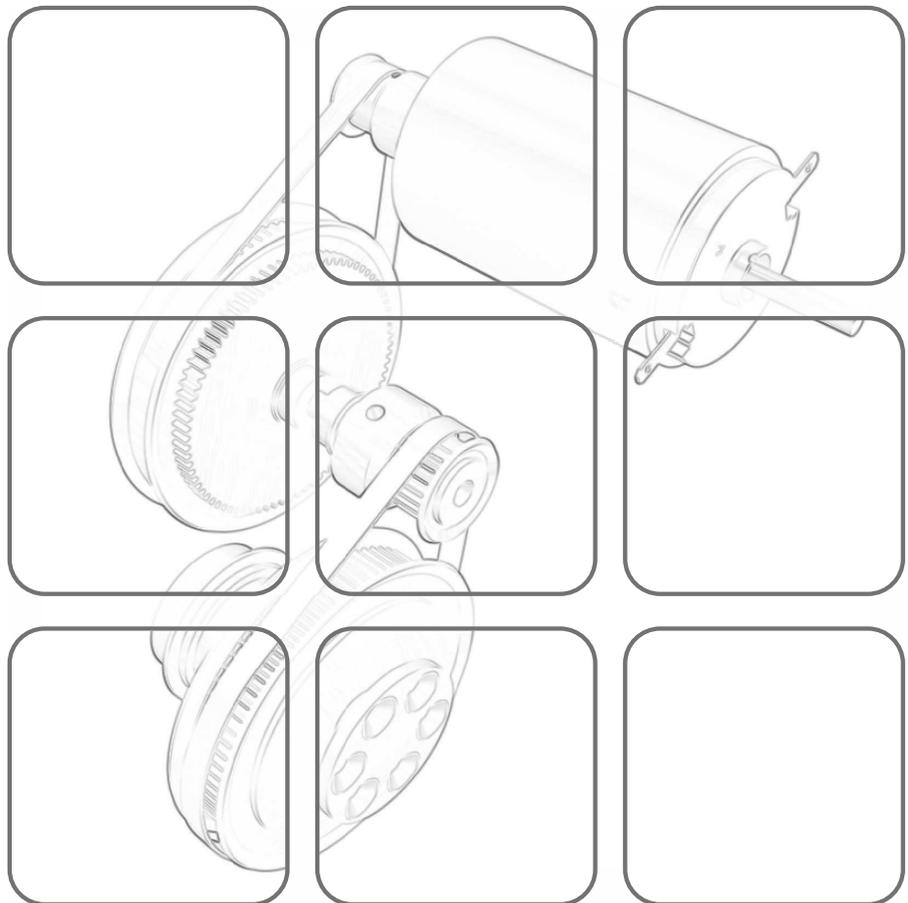


Vorlesung und Übung  
SS 2018

Univ.-Prof. Dr. techn. Andreas Kugi  
Assoc.-Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Kemmetmüller  
Ass.-Prof. Dr. techn. Andreas Steinböck  
Dr. techn. Tobias Glück

# MODELLBILDUNG



## **Modellbildung**

Vorlesung und Übung  
SS 2018

Univ.-Prof. Dr. techn. Andreas Kugi  
Assoc.-Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Kemmetmüller  
Ass.-Prof. Dr. techn. Andreas Steinböck  
Dr. techn. Tobias Glück

TU Wien  
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik  
Gruppe für komplexe dynamische Systeme

Gußhausstraße 27–29  
1040 Wien  
Telefon: +43 1 58801 – 37615  
Internet: <http://www.acin.tuwien.ac.at>

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Literatur . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Mechanische Systeme</b>	<b>7</b>
2.1	Punkt-Kinematik . . . . .	7
2.2	Newtonsche Gesetze . . . . .	12
2.2.1	Kräftesysteme . . . . .	12
2.2.2	Schwerpunkt . . . . .	20
2.2.3	Impulserhaltung . . . . .	24
2.2.4	Translatorische kinetische Energie und potentielle Energie . . . . .	28
2.2.5	Dissipative Kräfte . . . . .	33
2.2.6	Feder-Masse-Dämpfer System . . . . .	40
2.2.7	Körper mit veränderlicher Masse . . . . .	42
2.2.8	Drehimpulserhaltung . . . . .	44
2.3	Euler-Lagrange Gleichungen . . . . .	54
2.4	Literatur . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Wärmeübertragung</b>	<b>67</b>
3.1	Wärmeleitung . . . . .	69
3.2	Randbedingungen . . . . .	71
3.2.1	Erzwungene Konvektion . . . . .	72
3.2.2	Freie Konvektion . . . . .	77
3.2.3	Wärmeleitung . . . . .	77
3.2.4	Wärmestrahlung . . . . .	79
3.3	Wärmequellen . . . . .	96
3.4	Stationäre Wärmeübertragung . . . . .	99
3.4.1	Ebene Wand . . . . .	99
3.4.2	Zylinderförmige Wand . . . . .	102
3.4.3	Vorspringende Teile und Rippen . . . . .	103
3.4.4	Wärmetauscher . . . . .	106
3.5	Transiente Wärmeübertragung . . . . .	111
3.6	Numerische Lösung von Wärmeübertragungsproblemen . . . . .	113
3.6.1	Finite Differenzen Methode . . . . .	114
3.6.2	Konzentriert-parametrische Formulierung als RC-Netzwerk . . . . .	117
3.7	Literatur . . . . .	126
<b>A</b>	<b>Grundlegende Bilanzgleichungen und Zustandsgrößen</b>	<b>128</b>
A.1	Gaußscher Integralsatz . . . . .	128

A.2	Reynoldsches Transporttheorem . . . . .	128
A.3	Energieerhaltungssatz . . . . .	129
A.3.1	Energieerhaltung in geschlossenen Systemen . . . . .	130
A.3.2	Energieerhaltung in offenen Systemen . . . . .	131
A.4	Thermodynamische Zustandsgrößen reiner Stoffe . . . . .	132
A.5	Literatur . . . . .	135
<b>B</b>	<b>Aufgaben zum Selbststudium</b>	<b>136</b>
Aufgabe B.1	(Klappbrücke) . . . . .	136
Aufgabe B.2	(Mechanisches Starrkörpersystem) . . . . .	139
Aufgabe B.3	(Haltevorrichtung) . . . . .	144
Aufgabe B.4	(Vertikalmodell eines Viertelfahrzeuges) . . . . .	147
Aufgabe B.5	(Radaufhängung) . . . . .	150
Aufgabe B.6	(Fliehkraftregler) . . . . .	151
Aufgabe B.7	(Gekoppeltes mechanisches System) . . . . .	154
Aufgabe B.8	(Seilzug) . . . . .	158
Aufgabe B.9	(Kniehebelpresse) . . . . .	161
Aufgabe B.10	(Planarer Manipulator) . . . . .	164
Aufgabe B.11	(Drehteller mit Masse) . . . . .	168
Aufgabe B.12	(Drehgelagerter Hohlzylinder) . . . . .	171
Aufgabe B.13	(Starrkörper mit Drehfeder) . . . . .	175
Aufgabe B.14	(Elastisch gelagerter Ausleger) . . . . .	179
Aufgabe B.15	(Flachdach) . . . . .	182
Aufgabe B.16	(Abkühlen eines Zylinders) . . . . .	183
Aufgabe B.17	(Elektronisches Bauteil) . . . . .	185
Aufgabe B.18	(Elektrisches Kabel) . . . . .	187
Aufgabe B.19	(Platte mit erzwungener Konvektion) . . . . .	190
Aufgabe B.20	(Temperaturmessung in einem Lüftungsrohr) . . . . .	192
Aufgabe B.21	(Sichtfaktorberechnung für einen Industrieofen) . . . . .	196
Aufgabe B.22	(Sichtfaktorberechnung für einen Reflow-Lötofen) . . . . .	200
Aufgabe B.23	(Strahlungsschild) . . . . .	203
Aufgabe B.24	(Rettungsdecke) . . . . .	206
Aufgabe B.25	(Wärmestrahlung in zylindrischem Sackloch) . . . . .	209
Aufgabe B.26	(Stationäre Wärmeleitung in einem Rohr) . . . . .	212
Aufgabe B.27	(Raumheizung) . . . . .	215
Aufgabe B.28	(Auskühlen eines Permanentmagnet-Synchronmotors) . . . . .	220
Aufgabe B.29	(Gehäuse einer elektrischen Maschine) . . . . .	225
Aufgabe B.30	(Doppelrohr-Gegenstromwärmetauscher) . . . . .	228
Aufgabe B.31	(Finite Differenzen Methode für ein durchströmtes Rohr) . . . . .	231
Aufgabe B.32	(Elektrische Heckscheibenheizung) . . . . .	236
Aufgabe B.33	(Tauchpumpe) . . . . .	243
Aufgabe B.34	(Wasserkühlung) . . . . .	247
Aufgabe B.35	(Brennofen) . . . . .	252
Aufgabe B.36	(Schwungrad mit Scheibenbremse) . . . . .	255
B.1	Literatur . . . . .	259

# 1 Einleitung

Diese Vorlesung beschäftigt sich mit der Modellbildung technischer Systeme. In einem ersten Schritt soll daher geklärt werden, was man unter einem *System* versteht. Einfach formuliert ist *ein System die Verbindung unterschiedlicher miteinander in Verbindung stehender Komponenten zu einem Ganzen zum Zwecke der Durchführung bestimmter Aufgaben*. Die Wechselwirkung eines Systems mit der Systemumgebung erfolgt über die so genannten *Eingangs-* bzw. *Ausgangsgrößen*, siehe Abbildung 1.1.

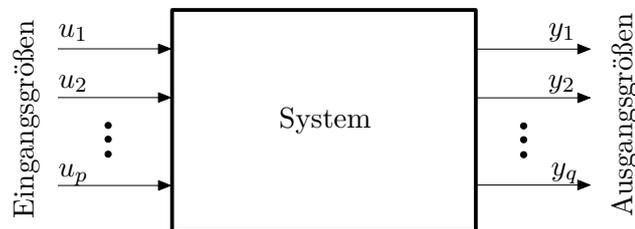


Abbildung 1.1: Zum Systembegriff.

Die Eingangsgrößen  $u_1, u_2, \dots, u_p$  sind dabei Größen, die von der Systemumgebung auf das System einwirken und nicht vom Verhalten des Systems selbst beeinflusst werden. Man unterscheidet dabei zwischen Eingangsgrößen, mit denen man das System gezielt (regelungstechnisch) beeinflussen kann (*Stellgrößen*) und Eingangsgrößen, die nicht unserer Kontrolle unterliegen (*Störgrößen*). Die Ausgangsgrößen  $y_1, y_2, \dots, y_q$  sind Größen, die vom System generiert werden und ihrerseits die Systemumgebung beeinflussen. Ausgangsgrößen, die messtechnisch erfassbar sind, nennt man auch *Messgrößen*.

Ein *Modell* ist im Wesentlichen ein *beschränktes Abbild der Wirklichkeit*, in dem die für die jeweilige Aufgabe wesentlichen Eigenschaften des Systems berücksichtigt werden. Bei einem *mathematischen Modell* wird das Verhalten des realen Systems in abstrahierter Form beispielsweise durch algebraische Gleichungen, gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen abgebildet. An dieser Stelle ist es wichtig zu betonen, dass *kein mathematisches Modell ein System exakt abbildet*. Vielmehr stellt ein mathematisches Modell immer einen *Kompromiss* zwischen *Modellkomplexität* und *Modellgenauigkeit* bezüglich der gewünschten Eigenschaften dar. Um ein für die jeweilige Fragestellung geeignetes mathematisches Modell zu entwickeln, müssen teilweise in wiederkehrenden Schleifen verschiedene Schritte der Dekomposition (Zerlegung des Systems in einzelne Subsysteme und Komponenten), der Reduktion und Abstraktion (Weglassen von für die Aufgabenstellung unwesentlichen Details und Überführen auf ein einfacheres Ersatzsystem) und der Aggregation (Zusammenfassung von Komponenten und Subsystemen zu einem Ganzen) durchgeführt werden. Diese Schritte lassen sich nur beschränkt systematisieren, weshalb die Erstellung eines geeigneten mathematischen Modells zumindest zum Teil eine

Ingenieurskunst ist und immer bleiben wird. Das mathematische Modell bildet nicht nur die Grundlage für die *Systemanalyse*, bei der das statische und dynamische Verhalten des Systems in Abhängigkeit der Eingangsgrößen und Systemparameter untersucht wird, sondern auch für die *Systemsynthese*, also den Entwurf des Gesamtsystems. Zum letzteren Punkt zählt insbesondere auch die Auslegung von geeigneten Sensoren und Aktoren bis hin zum Steuerungs- und Regelungsentwurf, der ausführlich in der Vorlesung Automatisierung im kommenden Semester behandelt wird.

Grundsätzlich unterscheidet man zwischen der theoretischen und experimentellen Modellbildung. Bei der *experimentellen Modellbildung* wird das mathematische Modell auf Basis der gemessenen Ein- und Ausgangsgrößen so erstellt, dass das Eingangs-Ausgangsverhalten möglichst gut wiedergegeben wird. Diese Art der Modellbildung wird auch als *Systemidentifikation* bezeichnet und man spricht bei Modellen, die ausschließlich auf experimenteller Information beruhen, von *Black-Box Modellen*. Da Black-Box Modelle sich lediglich auf experimentelle Ergebnisse stützen und kein (oder sehr wenig) a priori Wissen des Systems nutzen, hat das so gewonnene Modell nur in dem durch die Identifikation abgedeckten Datensatz Gültigkeit. Der Hauptvorteil besteht darin, dass man relativ wenig Wissen über das System benötigt. Im Gegensatz dazu werden die mathematischen Modelle bei der *theoretischen Modellbildung* auf Basis physikalischer Grundgesetze hergeleitet. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *White-Box Modellen* oder *first-principles models*. Zwischen den Black-Box und White-Box Modellen gibt es je nach Verhältnis von experimenteller zu physikalisch basierter Modellinformation verschiedene Grade von *Grey-Box Modellen*. An dieser Stelle sei erwähnt, dass es im Allgemeinen nicht möglich ist, ein mathematisches Modell ausschließlich über physikalische Gesetze herzuleiten und vollständig zu parametrieren. Einige sogenannte konstitutive Parameter (Reibungsparameter, Streuinduktivitäten, Leckölstromkoeffizienten) müssen aus Experimenten ermittelt werden, auch wenn der Modellansatz physikalisch motiviert ist. Die Vorteile dieser letzteren Modelle (White-Box Modelle mit wenigen experimentell ermittelten Konstitutivparametern) besteht in der sehr guten Extrapolierbarkeit des Modells über die durch Experimente gewonnenen Daten hinaus, einer hohen Zuverlässigkeit, einer guten Einsicht in das Modell, sowie in der Tatsache, dass das Modell skalierbar und auch für noch nicht realisierte Systeme (Prototyping) anwendbar ist. Als Nachteil kann angegeben werden, dass diese Art der Modellbildung im Allgemeinen relativ zeitintensiv ist und man das System genau verstehen muss. Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir uns ausschließlich auf letztgenannte mathematische Modelle konzentrieren.

Im Folgenden betrachte man die zwei einfachen elektrischen Systeme von Abbildung 1.2, nämlich einen Widerstand und einen idealen Kondensator, mit der Eingangsgröße  $i(t)$  (Strom), der Ausgangsgröße  $u(t)$  (Spannung) und der Zeit  $t$ . Beim Widerstand  $R$  ist die Ausgangsgröße zu jedem Zeitpunkt  $t$  eindeutig durch die Eingangsgröße zum Zeitpunkt  $t$  bestimmt, es gilt nämlich

$$u(t) = Ri(t) . \quad (1.1)$$

Systeme dieser Art, deren Ausgangsgrößen lediglich vom Augenblickswert der Eingangsgrößen abhängen, werden als *statische Systeme* bezeichnet. Im Gegensatz dazu muss zur Berechnung der Spannung  $u(t)$  des Kondensators  $C$  zum Zeitpunkt  $t$  der Eingangsstrom

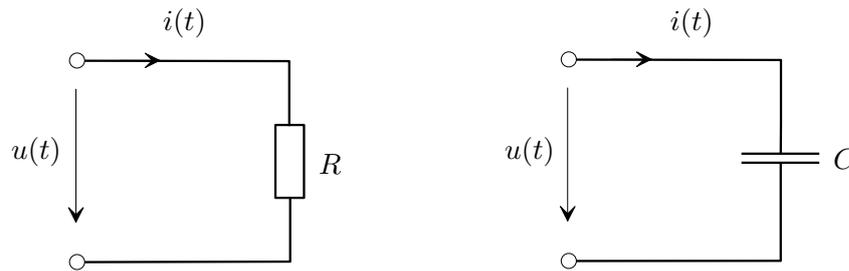


Abbildung 1.2: Zu statischen und dynamischen Systemen.

$i(\tau)$  für die gesamte Vergangenheit  $\tau \leq t$  bekannt sein, da gilt

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \underbrace{\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau}_{u(t_0)=u_0} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau . \quad (1.2)$$

Kennt man die Eingangsgröße  $i(\tau)$  lediglich für das Zeitintervall  $t_0 \leq \tau \leq t$ , dann muss zusätzlich die Spannung des Kondensators zum Zeitpunkt  $t_0$  als Anfangsbedingung  $u(t_0) = u_0$  bekannt sein. Wie man aus (1.2) erkennt, beinhaltet die Anfangsbedingung die gesamte Information über die Vergangenheit  $\tau < t_0$ . Man sagt auch,  $u(t_0)$  beschreibt den internen *Zustand* des Systems Kondensator zum Zeitpunkt  $t_0$ . Systeme dieser Art, deren Ausgangsgrößen nicht nur vom Augenblickswert der Eingangsgrößen sondern auch von deren Vergangenheit abhängen, werden als *dynamische Systeme* bezeichnet.

Wenn für ein System nach Abbildung 1.1, wie im Falle des Widerstandes und des Kondensators, die Werte der Ausgangsgrößen  $y_1, y_2, \dots, y_q$  zum Zeitpunkt  $t$  ausschließlich vom Verlauf der Eingangsgrößen  $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_p(\tau)$  für  $\tau \leq t$  abhängen, dann nennt man das System *kausal*. Da alle technisch realisierbaren Systeme kausal sind, werden wir uns im Folgenden auf diesen Fall beschränken.

Die bisherigen Überlegungen erlauben uns nun die allgemeine Definition der Zustandsgrößen eines dynamischen Systems anzugeben:

**Definition 1.1 (Zustand).** Existieren für ein dynamisches System Größen  $x_1, \dots, x_n$  mit der Eigenschaft, dass die Ausgangsgrößen  $y_1, y_2, \dots, y_q$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  eindeutig durch den Verlauf der Eingangsgrößen  $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_p(\tau)$  auf dem Intervall  $t_0 \leq \tau \leq t$  und den Werten von  $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$  für ein beliebiges  $t_0$  festgelegt sind, dann heißen die Größen  $x_1, \dots, x_n$  *Zustandsgrößen* des Systems.

**Aufgabe 1.1.** Welche Größe wählen Sie als Zustandsgröße bei einer Induktivität? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung von Aufgabe 1.1.** Den Strom oder den verketteten Fluss der Induktivität.

Dynamische Systeme, die sich durch eine endliche Anzahl  $n$  von Zustandsgrößen charakterisieren lassen, werden auch als *Systeme mit finitem Zustand* der *Ordnung  $n$*  bezeichnet. Diese Systeme mit finitem Zustand, oft auch *konzentriert-parametrische Systeme* genannt,

werden durch mathematische Modelle in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen beschrieben. Im Rahmen dieser Vorlesung schränken wir uns auf jene Systemklasse mit finitem Zustand ein, die eine Beschreibung durch ein *explizites mathematisches Modell* folgender Form erlaubt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t), \quad x_1(t_0) = x_{1,0} \\ \frac{d}{dt}x_2 = f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t), \quad x_2(t_0) = x_{2,0} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t), \quad x_n(t_0) = x_{n,0} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Zustandsdifferen-} \\ \text{tialgleichungen} \\ \text{mit Anfangs-} \\ \text{bedingungen} \end{array} \quad (1.3a)$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \\ y_2 = h_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \\ \vdots \\ y_q = h_q(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p, t) \end{array} \right\} \text{Ausgangsgleichungen} \quad (1.3b)$$

Fasst man die Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsgrößen zu Spaltenvektoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_p \end{bmatrix}^T \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_q \end{bmatrix}^T \quad (1.4b)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \quad (1.4c)$$

zusammen und schreibt zur Vereinfachung der Notation an Stelle von  $\frac{d}{dt}$  einen Punkt über die abzuleitende Größe, dann lässt sich (1.3) in kompakter Vektorschreibweise in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.5b)$$

angeben. Die Größen  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{x}$  werden als *Eingang*, *Ausgang* und *Zustand* des dynamischen mathematischen Modells bezeichnet.

Wird der Zustand  $\mathbf{x}$  als Element eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes betrachtet, dann nennt man diesen Vektorraum auch *Zustandsraum*. Der Zustand eines Systems zum Zeitpunkt  $t$  kann dann als Punkt im  $n$ -dimensionalen Zustandsraum dargestellt werden. Die Kurve all dieser Punkte im Zustandsraum für veränderliche Zeit  $t$  in einem Zeitintervall wird auch als *Trajektorie* bezeichnet, siehe Abbildung 1.3 zur Veranschaulichung einer Trajektorie im 3-dimensionalen Zustandsraum.

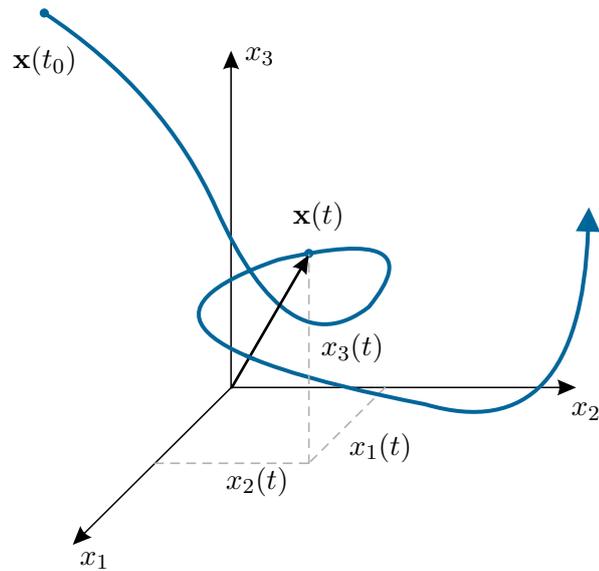


Abbildung 1.3: Zum Begriff der Trajektorie.

Vollständigkeitshalber sei noch erwähnt, dass *Systeme mit infinit-dimensionalem Zustand*, auch *verteilt-parametrische Systeme* genannt, durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Beispiele dazu sind Balken, Platten, Membranen und elektromagnetische Felder.

## 1.1 Literatur

- [1.1] R. Cannon, *Dynamics of Physical Systems*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [1.2] F. E. Cellier, *Continuous System Modeling*. New York: Springer, 1991.
- [1.3] S. W. Director und R. A. Rohrer, *Introduction to Systems Theory*. New York: McGraw-Hill, 1972.
- [1.4] O. Föllinger und D. Franke, *Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme*. München, Wien: Oldenbourg, 1982.
- [1.5] R. Isermann, *Mechatronische Systeme: Grundlagen*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [1.6] D. Karnopp, D. Margolis und R. Rosenberg, *System Dynamics*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- [1.7] G. Ludyk, *Theoretische Regelungstechnik 1*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995.
- [1.8] D. G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems*. New York: John Wiley & Sons, 1979.
- [1.9] L. Padulo und M. A. Arbib, *System Theory*. Philadelphia: W.B. Saunders Company, 1974.
- [1.10] J. L. Shearer und B. T. Kulakowski, *Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems*. New York: Macmillan Publishing Company, 1990.

## 2 Mechanische Systeme

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen zur Modellierung einfacher mechanischer Systeme diskutiert. Der Fokus liegt dabei auf der Beschreibung der Bewegung von Punktmassen sowie einfacher Starrkörpersysteme in der Ebene.

### 2.1 Punkt-Kinematik

Die Kinematik beschreibt die Bewegung von Körpern oder einzelnen materiellen Punkten im Raum bezüglich eines Bezugssystems. Betrachtet man als Bezugssystem das raumfeste kartesische Koordinatensystem  $(0xyz)$  mit dem Ursprung  $0$  und den orthonormalen Basisvektoren  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$ , d. h.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_z^T \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_z^T \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z^T \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

dann kann der Ortsvektor vom Ursprung  $0$  zu einem materiellen Punkt  $P$  in der Form

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z \quad (2.2)$$

mit den in der Zeit  $t$  parametrisierten Komponenten  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  beschrieben werden, siehe Abbildung 2.1. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  und die Beschleunigung  $\mathbf{a}(t)$  des materiellen

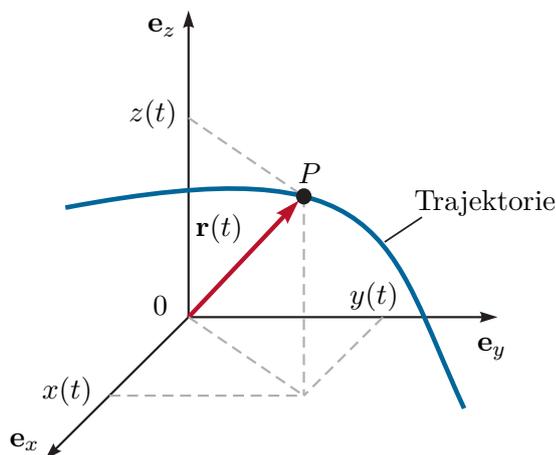


Abbildung 2.1: Trajektorie im kartesischen Koordinatensystem.

Punktes  $P$  erhält man durch zeitliche Differentiation in der Form

$$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z \quad (2.3)$$

bzw.

$$\mathbf{a}(t) = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z = \ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y + \ddot{z} \mathbf{e}_z, \quad (2.4)$$

wobei  $v_x, v_y, v_z$  und  $a_x, a_y, a_z$  die jeweiligen Komponenten bezüglich der Basisvektoren  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$  beschreiben. Es sei angemerkt, dass in weiterer Folge die totale zeitliche Ableitung einer Funktion  $x(t)$  mit  $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$  bzw.  $\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$  bezeichnet wird. Im einfachsten Fall, wenn das Koordinatensystem so gewählt werden kann, dass der Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  für alle Zeiten  $t$  mit einer Koordinatenachse zusammenfällt, spricht man von einer *geradlinigen Bewegung*.

**Beispiel 2.1.** Eine Masse wird von einem Motor geradlinig gemäß dem in Abbildung 2.2 dargestellten Beschleunigungsverlauf beschleunigt.

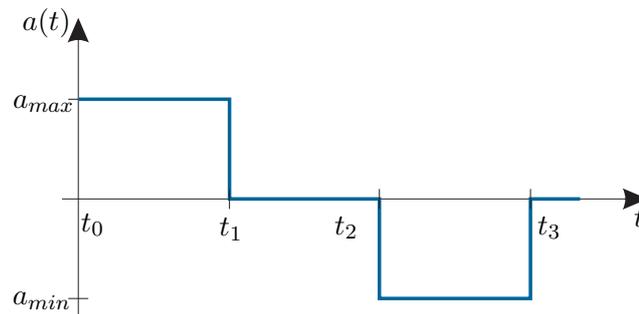


Abbildung 2.2: Zeitverlauf der Beschleunigung  $a(t)$ .

Wie groß muss die Zeit  $t_3$  und die minimale Beschleunigung  $a_{min}$  gewählt werden, dass zum Zeitpunkt  $t = t_3$  die Geschwindigkeit Null ist und die Position einen vorgegebenen Wert  $x_{soll}$  annimmt? Es wird dabei vorausgesetzt, dass zum Zeitpunkt  $t = t_0$  gilt  $v(t_0) = v_0 = 0$ ,  $x(t_0) = x_0 = 0$ . Für das Zeitintervall  $t_0 \leq t \leq t_1$  errechnet sich der Geschwindigkeits- und Positionsverlauf zu

$$v_1(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a_{max} d\tau = \underbrace{v_0}_{=0} + a_{max}(t - t_0) \quad (2.5a)$$

$$x_1(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t a_{max}(\tau - t_0) d\tau = \underbrace{x_0}_{=0} + \frac{1}{2}a_{max}(t - t_0)^2, \quad (2.5b)$$

für  $t_1 \leq t \leq t_2$  folgt

$$v_2(t) = v_1(t_1) + \int_{t_1}^t 0 d\tau = a_{max}(t_1 - t_0) \quad (2.6a)$$

$$x_2(t) = x_1(t_1) + \int_{t_1}^t a_{max}(t_1 - t_0) d\tau = \frac{1}{2}a_{max}(t_1 - t_0)^2 + a_{max}(t_1 - t_0)(t - t_1) \quad (2.6b)$$

und für  $t_2 \leq t \leq t_3$  ergibt sich

$$v_3(t) = v_2(t_2) + \int_{t_2}^t a_{min} d\tau = a_{max}(t_1 - t_0) + a_{min}(t - t_2) \quad (2.7a)$$

$$x_3(t) = x_2(t_2) + \int_{t_2}^t v_3(\tau) d\tau = \frac{1}{2}a_{max}(t_0^2 - t_1^2) + a_{max}(t_1 - t_0)t + \frac{1}{2}a_{min}(t - t_2)^2. \quad (2.7b)$$

Mit der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = t_3$

$$v_3(t_3) = a_{max}(t_1 - t_0) + a_{min}(t_3 - t_2) \quad (2.8)$$

errechnet sich die gewünschte Zeit  $t_3$  aus der Bedingung  $v_3(t_3) = 0$  zu

$$t_3 = t_2 - \frac{a_{max}}{a_{min}}(t_1 - t_0) \quad (2.9)$$

und die gewünschte Position  $x_3(t_3) = x_{soll}$ , mit

$$x_3(t_3) = \frac{1}{2a_{min}}a_{max}(t_1 - t_0)(a_{min}(2t_2 - t_0 - t_1) + a_{max}(t_0 - t_1)), \quad (2.10)$$

wird durch die Beschleunigung

$$a_{min} = \frac{-a_{max}^2(t_1 - t_0)^2}{a_{max}(t_1 - t_0)(t_1 + t_0 - 2t_2) + 2x_{soll}} \quad (2.11)$$

erreicht. Der Positions- und Geschwindigkeitsverlauf ist in Abbildung 2.3 dargestellt.

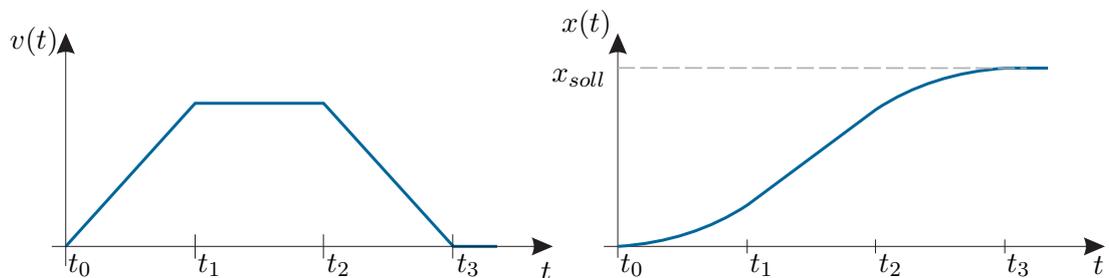


Abbildung 2.3: Zeitverlauf der Geschwindigkeit  $v(t)$  und der Position  $x(t)$ .

Im Weiteren soll die Bewegung eines materiellen Punktes  $P$  in der Ebene bezüglich des raumfesten Koordinatensystems  $(0xy)$  betrachtet und mit Hilfe von *Polarkoordinaten*

$$x(t) = r(t) \cos(\varphi(t)) \quad \text{und} \quad y(t) = r(t) \sin(\varphi(t)) \quad (2.12)$$

beschrieben werden, siehe Abbildung 2.4. Damit lautet der Ortsvektor vom Ursprung 0 zu einem materiellen Punkt  $P$

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \cos(\varphi(t)) \mathbf{e}_x + r(t) \sin(\varphi(t)) \mathbf{e}_y. \quad (2.13)$$

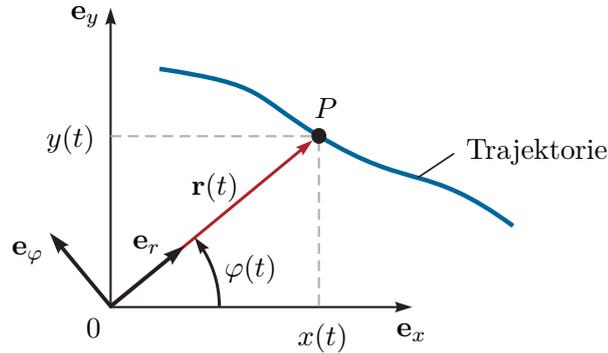


Abbildung 2.4: Trajektorie im Polarkoordinatensystem.

Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  gemäß (2.3) erhält man durch Anwendung der Kettenregel der Differentiation in der Form

$$\mathbf{v}(t) = \left( \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} \right) \dot{r} + \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{r} \right) \dot{\varphi}, \quad (2.14)$$

wobei sich die Basisvektoren der Polarkoordinaten zu

$$\tilde{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} = \cos(\varphi) \mathbf{e}_x + \sin(\varphi) \mathbf{e}_y \quad (2.15a)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{r} = -r \sin(\varphi) \mathbf{e}_x + r \cos(\varphi) \mathbf{e}_y \quad (2.15b)$$

ergeben. Die Vektoren  $\tilde{\mathbf{e}}_r$  und  $\tilde{\mathbf{e}}_\varphi$  bilden genau dann eine zulässige Basis eines Koordinatensystems, wenn die Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

regulär ist, also  $\det(\mathbf{J}) = r \neq 0$  ist. Dies ist abgesehen vom Punkt  $r = 0$  überall der Fall. Normiert man nun die Basisvektoren auf die Länge 1

$$\mathbf{e}_r = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_r}{\|\tilde{\mathbf{e}}_r\|_2} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_\varphi}{\|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\|_2} \quad (2.17)$$

mit

$$\|\tilde{\mathbf{e}}_r\|_2 = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1 \quad \text{und} \quad \|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\|_2 = r, \quad (2.18)$$

dann lässt sich (2.14) in der Form

$$\mathbf{v}(t) = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (2.19)$$

mit den Komponenten  $v_r = \dot{r}$  (*radiale Komponente*) und  $v_\varphi = r \dot{\varphi}$  (*zirkulare Komponente*) der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  bezüglich der Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  schreiben. In der Zeit  $dt$  überstreicht der Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  einen Winkel  $d\varphi$  und die auf die Zeit bezogene Winkeländerung  $\omega = \dot{\varphi}$  wird als *Winkelgeschwindigkeit* bezeichnet. Bei einer reinen Kreisbewegung (siehe Abbildung 2.5) ist die radiale Geschwindigkeitskomponente  $v_r = 0$  und für die zirkulare Geschwindigkeitskomponente gilt  $v_\varphi = r\omega$ .

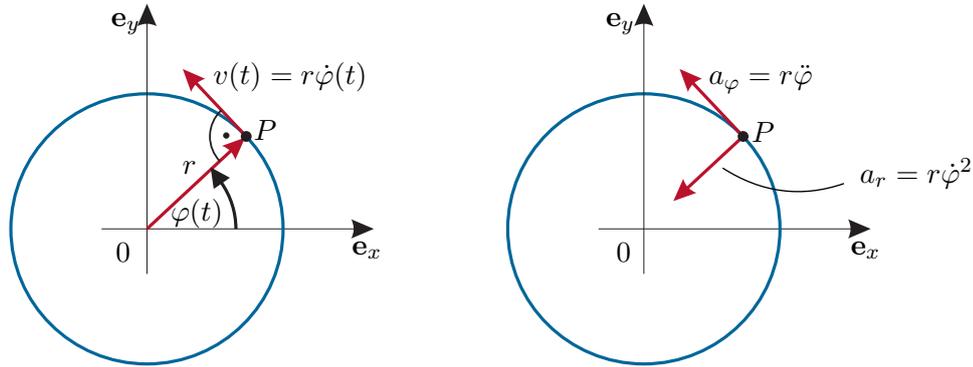


Abbildung 2.5: Kreisbahn im Polarkoordinatensystem.

**Aufgabe 2.1.** Zeigen Sie, dass sich die Geschwindigkeitskomponenten eines materiellen Punktes  $P$  im Raum bezüglich der normierten Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  in Kugelkoordinaten

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad z = r \cos(\theta) \quad (2.20)$$

zu

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r \sin(\theta)\dot{\varphi} \quad (2.21)$$

errechnen.

Die Komponenten der Beschleunigung  $\mathbf{a}(t)$  in Polarkoordinaten bezüglich der Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  erhält man durch totale zeitliche Differentiation von  $\mathbf{v}(t)$  nach (2.19)

$$\mathbf{a}(t) = a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \dot{v}_r \mathbf{e}_r + v_r \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{v}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_\varphi \dot{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (2.22)$$

wobei darauf geachtet werden muss, dass sich die Basisvektoren (siehe (2.15) und (2.17))

$$\mathbf{e}_r = \cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\varphi)\mathbf{e}_y \quad (2.23a)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\mathbf{e}_x + \cos(\varphi)\mathbf{e}_y \quad (2.23b)$$

ebenfalls zeitlich ändern. Man ist nun bestrebt,  $\dot{\mathbf{e}}_r$  und  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$  durch  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  auszudrücken. Dazu wird (2.23) invertiert

$$\mathbf{e}_x = \cos(\varphi)\mathbf{e}_r - \sin(\varphi)\mathbf{e}_\varphi \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin(\varphi)\mathbf{e}_r + \cos(\varphi)\mathbf{e}_\varphi \quad (2.24b)$$

und in  $\dot{\mathbf{e}}_r$  und  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$  substituiert, d. h.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= -\sin(\varphi)\dot{\varphi}\mathbf{e}_x + \cos(\varphi)\dot{\varphi}\mathbf{e}_y \\ &= -\sin(\varphi)\dot{\varphi}(\cos(\varphi)\mathbf{e}_r - \sin(\varphi)\mathbf{e}_\varphi) + \cos(\varphi)\dot{\varphi}(\sin(\varphi)\mathbf{e}_r + \cos(\varphi)\mathbf{e}_\varphi) \\ &= \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (2.25)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\cos(\varphi)\dot{\varphi}\mathbf{e}_x - \sin(\varphi)\dot{\varphi}\mathbf{e}_y \\
 &= -\cos(\varphi)\dot{\varphi}(\cos(\varphi)\mathbf{e}_r - \sin(\varphi)\mathbf{e}_\varphi) - \sin(\varphi)\dot{\varphi}(\sin(\varphi)\mathbf{e}_r + \cos(\varphi)\mathbf{e}_\varphi) \\
 &= -\dot{\varphi}\mathbf{e}_r .
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Setzt man (2.25) und (2.26) in (2.22) ein

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}(t) &= \dot{v}_r\mathbf{e}_r + v_r\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{v}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + v_\varphi\dot{\mathbf{e}}_\varphi \\
 &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + (\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\mathbf{e}_r) \\
 &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi ,
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

dann folgt die *radiale Beschleunigung* zu  $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$  und die zirkulare Beschleunigung zu  $a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$ . Bei einer reinen Kreisbewegung vereinfacht sich die Tangentialkomponente zu  $a_\varphi = r\ddot{\varphi}$  und die Radialkomponente  $a_r = -r\dot{\varphi}^2$  wird auch als *Zentripetalbeschleunigung* bezeichnet, siehe Abbildung 2.5.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass im allgemeinen Fall eines Koordinatenwechsels die zeitlichen Ableitungen der Basisvektoren sehr elegant über die so genannten *Christoffel Symbole* mit Hilfe der Basisvektoren selbst ausgedrückt werden können. Effiziente Möglichkeiten zur Berechnung dieser Christoffel Symbole findet man beispielsweise in [2.1].

**Aufgabe 2.2.** Zeigen Sie, dass sich die Beschleunigungskomponenten eines materiellen Punktes  $P$  im Raum bezüglich der normierten Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  in Kugelkoordinaten

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad z = r \cos(\theta)$$

zu

$$\begin{aligned}
 a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2 \\
 a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2 \\
 a_\varphi &= (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin(\theta) + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta)
 \end{aligned}$$

errechnen.

**Hinweis:** Verwenden Sie zur Lösung ein Computeralgebraprogramm!

## 2.2 Newtonsche Gesetze

### 2.2.1 Kräftesysteme

Im Rahmen dieser Vorlesung werden nur Einzelkräfte betrachtet, die an diskreten Punkten (*Angriffspunkten*) eines *Starrkörpers* wirken. Ein Starrkörper hat die Eigenschaft, dass unter der Wirkung von Kräften der Abstand beliebiger Körperpunkte immer gleich bleibt.

Die Richtung der Kraft wird durch ihre *Wirkungslinie* und durch den Richtungssinn beschrieben. Die SI Einheit der Kraft ist Newton ( $N = \text{kg m/s}^2$ ).

Bei einem sogenannten *zentralen Kräftesystem* wirken alle Einzelkräfte  $\mathbf{f}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  am gleichen Angriffspunkt und die resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R$  ergibt sich zu (siehe Abbildung 2.6)

$$\mathbf{f}_R = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i . \quad (2.28)$$

Drückt man nun die Kräfte  $\mathbf{f}_i$  mit ihren Komponenten im Koordinatensystem ( $0xyz$ )

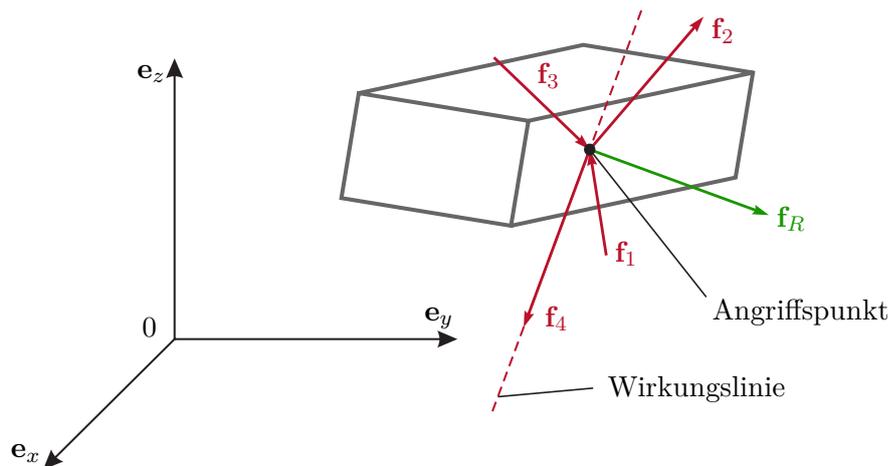


Abbildung 2.6: Zentrales Kräftesystem.

mit den orthonormalen Basisvektoren  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$  aus, d. h.  $\mathbf{f}_i = f_{i,x}\mathbf{e}_x + f_{i,y}\mathbf{e}_y + f_{i,z}\mathbf{e}_z$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dann ergibt sich (2.28) zu

$$\mathbf{f}_R = \sum_{i=1}^n (f_{i,x}\mathbf{e}_x + f_{i,y}\mathbf{e}_y + f_{i,z}\mathbf{e}_z) = \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{i,x}\mathbf{e}_x}_{f_{R,x}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{i,y}\mathbf{e}_y}_{f_{R,y}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{i,z}\mathbf{e}_z}_{f_{R,z}} . \quad (2.29)$$

Ein zentrales Kräftesystem ist nun im *Gleichgewicht*, wenn die resultierende Kraft verschwindet

$$\mathbf{f}_R = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad f_{R,x} = 0, f_{R,y} = 0 \text{ und } f_{R,z} = 0. \quad (2.30)$$

Das *dritte Newtonsche Gesetz (Wechselwirkungsgesetz)* besagt, dass zu jeder Kraft immer eine gleich große entgegengesetzt wirkende Gegenkraft existiert (*actio gleich reactio*). Wenn man beispielsweise mit der Hand eine Kraft auf die Tischplatte ausübt, dann wirkt eine gleich große entgegengesetzte Kraft von der Tischplatte auf unsere Hand. Dies kann man dadurch darstellen, dass man an der Kontaktstelle Hand/Tischplatte die beiden Körper auseinanderschneidet und die zugehörigen Kräfte einzeichnet (*Schnittprinzip*), siehe Abbildung 2.7. Ein anderes Beispiel ist in Abbildung 2.8 zu sehen. Nimmt man an, dass das Gewicht des Seils vernachlässigbar ist und die Rolle reibungsfrei gelagert ist, dann wirkt auf die Masse  $m$  die Seilkraft  $f_S$  und auch der Mensch muss die Kraft  $f_S$  aufbringen, um die Last zu halten.

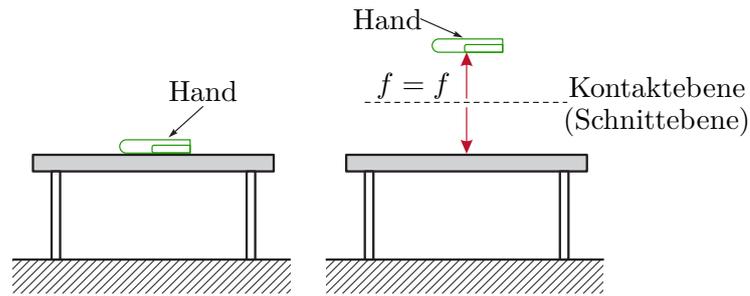


Abbildung 2.7: Kräfte zwischen der Tischplatte und der darauf drückenden Hand.

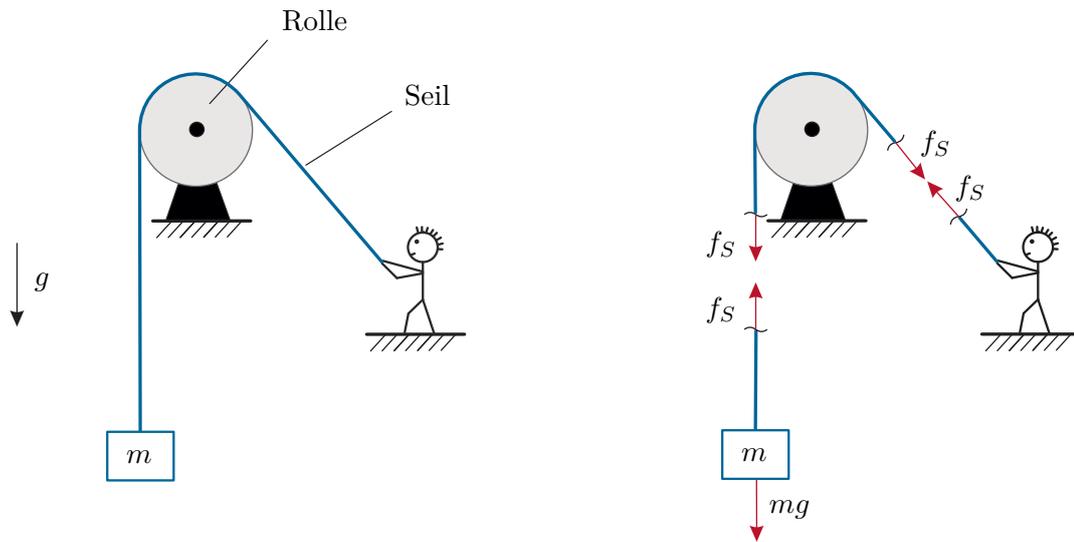


Abbildung 2.8: Kraft in einem Seil.

**Beispiel 2.2.** Ein Zylinder der Masse  $m$  mit dem Radius  $r$  wird durch ein im Mittelpunkt befestigtes Seil mit der Länge  $l$  auf einer glatten Ebene gehalten, siehe Abbildung 2.9(a). Die Kräfte, die auf den freigeschnittenen Zylinder wirken, sind in Abbildung 2.9(b) dargestellt.

Da das zentrale Kräftesystem im Gleichgewicht ist, muss nach (2.29) gelten

$$\mathbf{e}_x : f_N - f_S \sin(\alpha) = 0 \quad (2.31a)$$

$$\mathbf{e}_z : f_S \cos(\alpha) - mg = 0 \quad (2.31b)$$

mit der Erdbeschleunigung  $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$  und dem Winkel  $\alpha = \arcsin(r/l)$ . Aus (2.31) lassen sich nun die Kräfte  $f_S$  und  $f_N$  in der Form

$$f_S = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \quad \text{und} \quad f_N = mg \tan(\alpha) \quad (2.32)$$

berechnen.

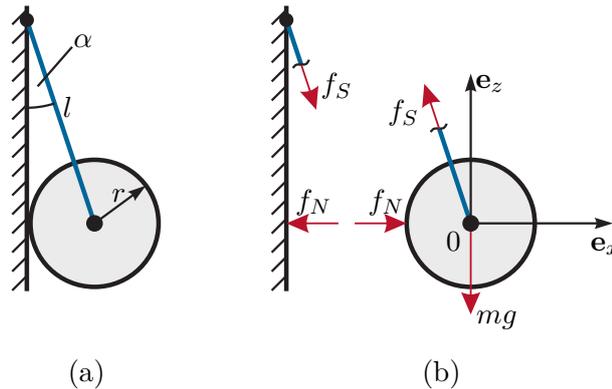


Abbildung 2.9: Zylinder am Seil.

**Aufgabe 2.3.** Ein vertikaler Mast  $M$  wird gemäß Abbildung 2.10 durch Seile abgesehen.

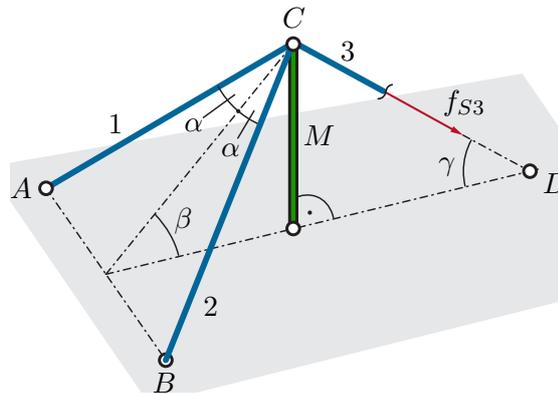


Abbildung 2.10: Vertikaler Mast mit drei Seilen.

Wie groß sind die Kräfte  $f_{S1}$  und  $f_{S2}$  in den Seilen 1 und 2 und die Kraft  $f_M$  im Mast, wenn am Seil 3 die Zugkraft  $f_{S3}$  aufgebracht wird?

**Lösung von Aufgabe 2.3.**

$$f_{S1} = f_{S2} = f_{S3} \frac{\cos(\gamma)}{2 \cos(\alpha) \cos(\beta)} \quad \text{und} \quad f_M = -f_{S3} \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\cos(\beta)}$$

Bei einem *allgemeinen Kräftesystem* wirken die einzelnen Kräfte nicht an einem einzigen Angriffspunkt und können daher auch nicht mehr zu einer einzigen resultierenden Kraft zusammengefasst werden, siehe Abbildung 2.11. In diesem Fall bedingen die Kräfte – falls sie nicht im Gleichgewicht sind – nicht nur eine translatorische Verschiebung des Starrkörpers sondern sie werden diesen auch verdrehen. Im einfachsten Fall betrachte man den Starrkörper von Abbildung 2.12, bei dem die beiden Kräfte  $f_{z,1}\mathbf{e}_z$  und  $f_{z,2}\mathbf{e}_z$  ein resultierendes *Moment* um die Drehachse  $\mathbf{e}_y$  erzeugen und damit den Starrkörper um diese Achse rotieren, falls das *Hebelgesetz*  $f_{z,1}l_1 = f_{z,2}l_2$  (Kraft mal Kraftarm ist gleich

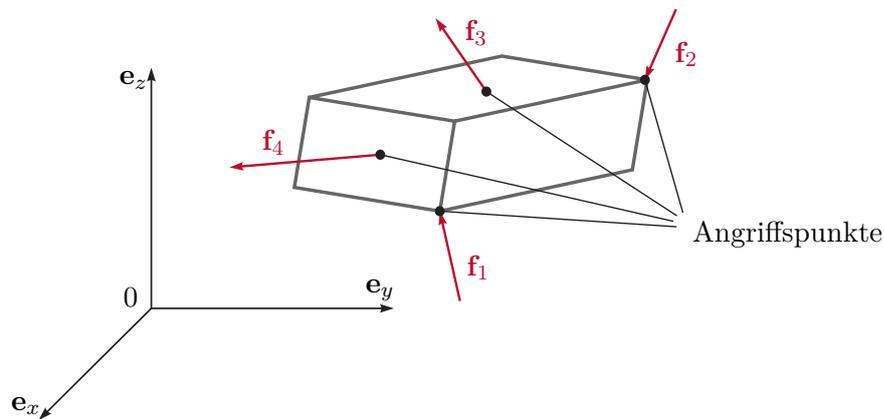


Abbildung 2.11: Allgemeines Kräftesystem.

Last mal Lastarm) nicht erfüllt ist. Das Moment bezüglich der Drehachse wird positiv

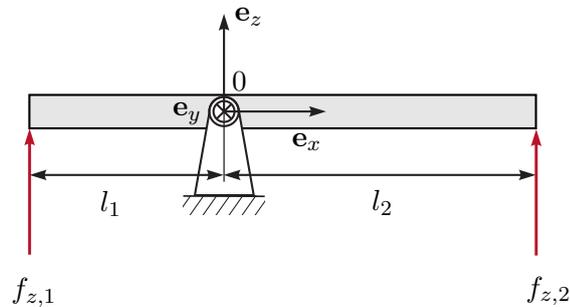


Abbildung 2.12: Drehbar gelagerter Balken.

gezählt, wenn die Wirkung des Moments im Sinne einer Rechtsschraube in Richtung des zur Achse gehörigen Richtungsvektors liegt. Für positive Kraftkomponenten  $f_{z,1}$  und  $f_{z,2}$  ist für Abbildung 2.12 das Moment  $\tau_{y,1}^{(0)} = f_{z,1}l_1$  bezüglich der Drehachse  $e_y$  positiv und das Moment  $\tau_{y,2}^{(0)} = -f_{z,2}l_2$  negativ. Die SI Einheit des Moments ist Newton-Meter (Nm = kg m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>).

Das Moment

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \tau_x^{(0)} \mathbf{e}_x + \tau_y^{(0)} \mathbf{e}_y + \tau_z^{(0)} \mathbf{e}_z \quad (2.33)$$

der Kraft

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z \quad (2.34)$$

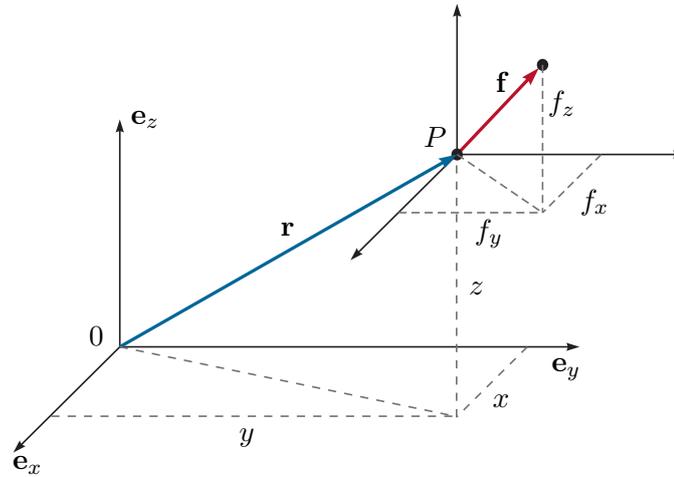
bezüglich des Punktes 0 im kartesischen Koordinatensystem (0xyz) mit dem Ortsvektor vom Punkt 0 zum Kraftangriffspunkt  $P$ , siehe Abbildung 2.13,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (2.35)$$

lautet

$$\tau_x^{(0)} = (yf_z - zf_y), \quad \tau_y^{(0)} = (zf_x - xf_z), \quad \tau_z^{(0)} = (xf_y - yf_x). \quad (2.36)$$

Man erkennt damit unmittelbar, dass das Moment in der Form

Abbildung 2.13: Zum Moment der Kraft  $\mathbf{f}$  bezüglich des Punktes 0.

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yf_z - zf_y \\ zf_x - xf_z \\ xf_y - yf_x \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

geschrieben werden kann<sup>1</sup>. Wirken nun auf einen Starrkörper mehrere Momente  $\boldsymbol{\tau}_i^{(A)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  bezüglich des selben Punktes  $A$ , dann errechnet sich das resultierende Moment  $\boldsymbol{\tau}_R^{(A)}$  zu

$$\boldsymbol{\tau}_R^{(A)} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\tau}_i^{(A)} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \tau_{i,x}^{(A)}}_{\boldsymbol{\tau}_{R,x}^{(A)}} \mathbf{e}_x + \underbrace{\sum_{i=1}^n \tau_{i,y}^{(A)}}_{\boldsymbol{\tau}_{R,y}^{(A)}} \mathbf{e}_y + \underbrace{\sum_{i=1}^n \tau_{i,z}^{(A)}}_{\boldsymbol{\tau}_{R,z}^{(A)}} \mathbf{e}_z. \quad (2.38)$$

Ein allgemeines Kräftesystem gemäß Abbildung 2.11 lässt sich stets bezüglich eines *beliebig gewählten* Bezugspunktes  $A$  durch eine resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R$  am Angriffspunkt  $A$  und ein resultierendes Moment  $\boldsymbol{\tau}_R^{(A)}$  bezüglich dieses Punktes  $A$  reduzieren. Ein allgemeines Kräftesystem ist nun im *Gleichgewicht*, wenn sowohl die resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R$  als auch das resultierende Moment  $\boldsymbol{\tau}_R^{(A)}$  verschwinden, d. h.

$$\text{Kräftebilanz: } \mathbf{f}_R = \mathbf{0} \quad \text{bzw. } f_{R,x} = 0, f_{R,y} = 0 \text{ und } f_{R,z} = 0 \quad (2.39a)$$

$$\text{Momentenbilanz: } \boldsymbol{\tau}_R^{(A)} = \mathbf{0} \quad \text{bzw. } \tau_{R,x}^{(A)} = 0, \tau_{R,y}^{(A)} = 0 \text{ und } \tau_{R,z}^{(A)} = 0. \quad (2.39b)$$

<sup>1</sup>Zur vereinfachten und kompakteren Schreibweise werden hier und im Folgenden häufig die Komponenten der vektoriellen Größen einfach in einem Vektor zusammengefasst, d. h. mit  $\mathbf{f}^T = [f_x \ f_y \ f_z]$  bzw.  $\mathbf{r}^T = [x \ y \ z]$  ist gemeint  $\mathbf{f} = f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z$  bzw.  $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ .

*Beispiel 2.3.* Man betrachte den Starrkörper von Abbildung 2.14 mit den Kräften

$$\mathbf{f}_A = \begin{bmatrix} f_{A,x} \\ f_{A,y} \\ f_{A,z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} f_{B,x} \\ f_{B,y} \\ f_{B,z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_C = \begin{bmatrix} f_{C,x} \\ f_{C,y} \\ f_{C,z} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

an den Angriffspunkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  sowie den Bezugspunkt  $D$  mit den zugehörigen Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_{0A} = \begin{bmatrix} a_x/2 \\ 0 \\ a_z/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{0B} = \begin{bmatrix} a_x/2 \\ a_y/2 \\ a_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{0C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{0D} = \begin{bmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

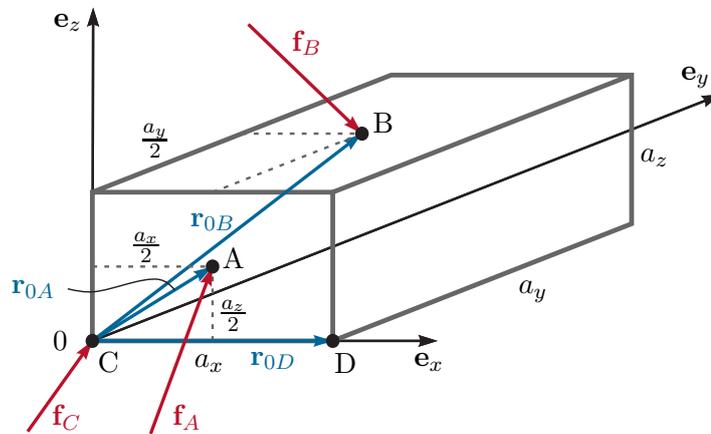


Abbildung 2.14: Zur Reduktion eines allgemeinen Kräftesystems.

Für den Bezugspunkt  $D$  folgen die Momente zu

$$\boldsymbol{\tau}_A^{(D)} = \underbrace{(\mathbf{r}_{0A} - \mathbf{r}_{0D})}_{\mathbf{r}_{DA}} \times \mathbf{f}_A = \begin{bmatrix} -a_x/2 \\ 0 \\ a_z/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{A,x} \\ f_{A,y} \\ f_{A,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{A,y}a_z/2 \\ f_{A,z}a_x/2 + f_{A,x}a_z/2 \\ -f_{A,y}a_x/2 \end{bmatrix} \quad (2.42a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_B^{(D)} = \underbrace{(\mathbf{r}_{0B} - \mathbf{r}_{0D})}_{\mathbf{r}_{DB}} \times \mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} -a_x/2 \\ a_y/2 \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{B,x} \\ f_{B,y} \\ f_{B,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{B,z}a_y/2 - f_{B,y}a_z \\ f_{B,z}a_x/2 + f_{B,x}a_z \\ -f_{B,y}a_x/2 - f_{B,x}a_y/2 \end{bmatrix} \quad (2.42b)$$

$$\boldsymbol{\tau}_C^{(D)} = \underbrace{(\mathbf{r}_{0C} - \mathbf{r}_{0D})}_{\mathbf{r}_{DC}} \times \mathbf{f}_C = \begin{bmatrix} -a_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{C,x} \\ f_{C,y} \\ f_{C,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_x f_{C,z} \\ -a_x f_{C,y} \end{bmatrix} \quad (2.42c)$$

und das allgemeine Kräftesystem  $\mathbf{f}_A$ ,  $\mathbf{f}_B$  und  $\mathbf{f}_C$  kann durch die resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B + \mathbf{f}_C$  und durch das resultierende Moment  $\boldsymbol{\tau}_R^{(D)} = \boldsymbol{\tau}_A^{(D)} + \boldsymbol{\tau}_B^{(D)} + \boldsymbol{\tau}_C^{(D)}$  ersetzt

werden. Damit ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen aus der Kräftebilanz ( $\mathbf{f}_R = \mathbf{0}$ )

$$\mathbf{e}_x : f_{A,x} + f_{B,x} + f_{C,x} = 0 \quad (2.43a)$$

$$\mathbf{e}_y : f_{A,y} + f_{B,y} + f_{C,y} = 0 \quad (2.43b)$$

$$\mathbf{e}_z : f_{A,z} + f_{B,z} + f_{C,z} = 0 \quad (2.43c)$$

und der Momentenbilanz ( $\tau_R^{(D)} = \mathbf{0}$ )

$$\mathbf{e}_x : -f_{A,y}a_z/2 + f_{B,z}a_y/2 - f_{B,y}a_z = 0 \quad (2.44a)$$

$$\mathbf{e}_y : f_{A,z}a_x/2 + f_{A,x}a_z/2 + f_{B,z}a_x/2 + f_{B,x}a_z + f_{C,z}a_x = 0 \quad (2.44b)$$

$$\mathbf{e}_z : -f_{A,y}a_x/2 - f_{B,y}a_x/2 - f_{B,x}a_y/2 - f_{C,y}a_x = 0. \quad (2.44c)$$

**Aufgabe 2.4.** Geben Sie die Momentenbilanz für das Beispiel von Abbildung 2.14 um den Bezugspunkt  $C$  an.

*Lösung von Aufgabe 2.4.*

$$\tau_A^{(C)} = \begin{bmatrix} -f_{A,y}a_z/2 \\ -f_{A,z}a_x/2 + f_{A,x}a_z/2 \\ f_{A,y}a_x/2 \end{bmatrix}, \quad \tau_B^{(C)} = \begin{bmatrix} f_{B,z}a_y/2 - f_{B,y}a_z \\ -f_{B,z}a_x/2 + f_{B,x}a_z \\ f_{B,y}a_x/2 - f_{B,x}a_y/2 \end{bmatrix}, \quad \tau_C^{(C)} = \mathbf{0}$$

**Beispiel 2.4.** Der Mechanismus gemäß Abbildung 2.15(a) ist im Punkt  $A$  drehbar gelagert und wird an den Punkten  $B$  und  $C$  über ein Seil gehalten. Es wird angenommen, dass die Seilrollen reibungsfrei gelagert sind und die Seilmasse sowie die Dicke der einzelnen Balken vernachlässigt werden können. Schneidet man den Mechanismus frei, so erhält man die in Abbildung 2.15(b) gezeigten Kräfte.

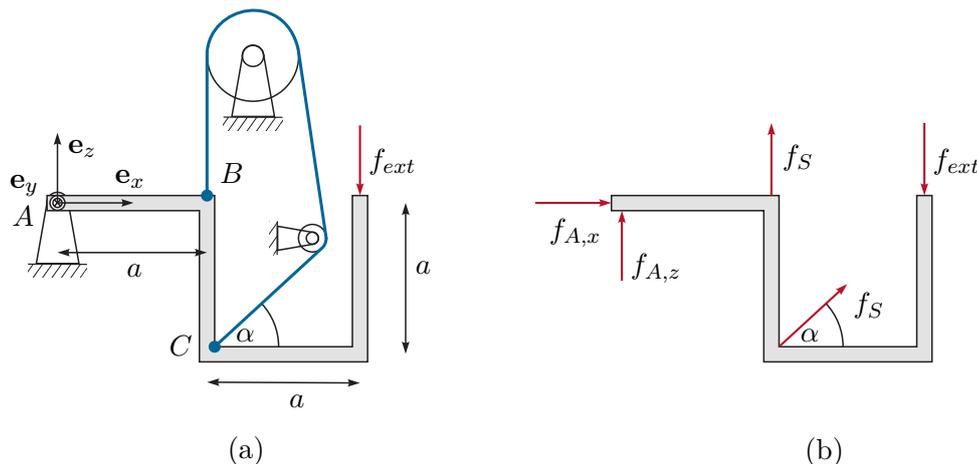


Abbildung 2.15: Einfacher Mechanismus.

Im Gleichgewicht müssen nun die Kräftebilanz

$$\mathbf{e}_x : f_{A,x} + f_S \cos(\alpha) = 0 \quad (2.45a)$$

$$\mathbf{e}_z : f_{A,z} + f_S + f_S \sin(\alpha) - f_{ext} = 0 \quad (2.45b)$$

und die Momentenbilanz (gewählter Bezugspunkt  $A$ )

$$\mathbf{e}_y : -af_S + 2af_{ext} - af_S(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) = 0 \quad (2.46)$$

erfüllt sein.

### 2.2.2 Schwerpunkt

Die bisherigen Überlegungen erlauben nun die Definition des sogenannten *Schwerpunktes* eines Starrkörpers. Dazu betrachte man in einem ersten Schritt eine masselose starre Stange, die die Punktmassen  $m_i, i = 1, \dots, n$  gemäß Abbildung 2.16 miteinander verbindet. Zuzufolge der Erdbeschleunigung  $g$  in negativer  $\mathbf{e}_z$ -Richtung wirken auf die Stange die

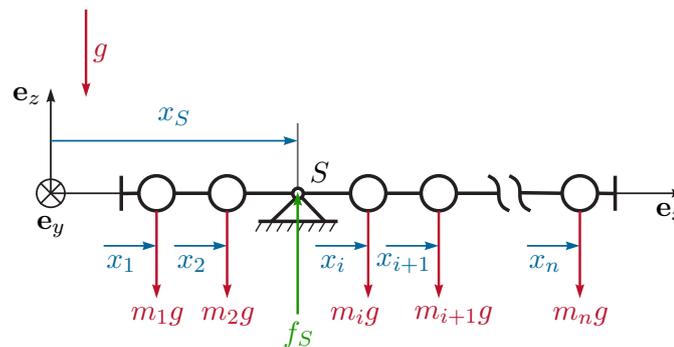


Abbildung 2.16: Zur Definition des Schwerpunktes: Masselose Stange mit Punktmassen.

Gravitationskräfte  $\mathbf{f}_i = -m_i g \mathbf{e}_z, i = 1, \dots, n$ . Man weiß nun, dass die Kräfte  $\mathbf{f}_i, i = 1, \dots, n$  bezüglich eines *beliebig gewählten* Bezugspunktes  $A$  durch eine resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R$  am Angriffspunkt  $A$  und ein resultierendes Moment  $\boldsymbol{\tau}_R^{(A)}$  bezüglich dieses Punktes  $A$  ersetzt werden können. Der Schwerpunkt beschreibt nun jenen Angriffspunkt  $S$ , bei dem das resultierende Moment  $\boldsymbol{\tau}_R^{(S)}$  verschwindet und damit die Stange allein durch Aufhängen im Punkt  $S$  mit der Haltekraft  $f_S$  im Gleichgewicht gehalten werden kann. Aus der Momentenbilanz

$$\mathbf{e}_y : \sum_{i=1}^n m_i g x_i - f_S x_S = 0 \quad (2.47)$$

und der Kräftebilanz

$$\mathbf{e}_z : -\sum_{i=1}^n m_i g + f_S = 0 \quad (2.48)$$

lässt sich  $x_S$  in der Form

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.49)$$

berechnen.

**Aufgabe 2.5.** Zeigen Sie, dass sich für ein allgemeines System, bestehend aus  $n$  starr gekoppelten Massepunkten mit den Massen  $m_i$  und den Ortsvektoren  $\mathbf{r}_i$  vom Ursprung  $0$  des Koordinatensystems ( $0xyz$ ) zu den Massepunkten, der Ortsvektor  $\mathbf{r}_S$  zum Schwerpunkt wie folgt

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.50)$$

errechnet.

Dies lässt sich nun direkt auf einen allgemeinen Starrkörper übertragen. Dazu nehme man an, dass der Starrkörper das Volumen  $\mathcal{V}$  und die (ortsabhängige) Dichte  $\rho(x, y, z)$  besitze, weshalb sich die Masse  $m$  des Starrkörpers zu

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho(x, y, z) d\mathcal{V} \quad (2.51)$$

ergibt. Der Schwerpunkt  $S$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_S$  gemessen im Koordinatensystem ( $0xyz$ ) ist nun jener Punkt, an dem der Körper aufgehängt werden müsste (Haltekraft  $f_S$ ), damit sich der Körper im Gleichgewicht befindet unabhängig von der Richtung der Erdbeschleunigung  $g$ . Angenommen, die Erdbeschleunigung wirkt in Richtung  $\mathbf{e}_g$ , dann wirkt auf das Volumenelement  $d\mathcal{V}$  die Gravitationskraft  $g\rho(x, y, z) d\mathcal{V}\mathbf{e}_g$  und bezüglich des Koordinatenursprungs  $0$  das Moment  $\mathbf{r} \times g\rho(x, y, z) d\mathcal{V}\mathbf{e}_g = \mathbf{r}g\rho(x, y, z) d\mathcal{V} \times \mathbf{e}_g$ , siehe Abbildung 2.17. Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich durch Integration über das

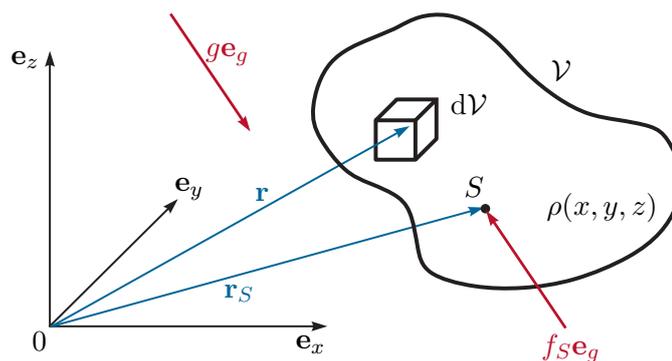


Abbildung 2.17: Zur Definition des Schwerpunktes eines Starrkörpers.

Starrkörpervolumen  $\mathcal{V}$  wiederum aus der Kräftebilanz

$$-f_S \mathbf{e}_g + g \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho(x, y, z) d\mathcal{V}}_m \mathbf{e}_g = \mathbf{0} \quad (2.52)$$

und der Momentenbilanz

$$-(\mathbf{r}_S \times f_S \mathbf{e}_g) + g \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \rho(x, y, z) d\mathcal{V} \times \mathbf{e}_g = \mathbf{0} . \quad (2.53)$$

Setzt man  $f_S = mg$  aus (2.52) in (2.53) ein, so folgt

$$\left\{ -mg \mathbf{r}_S + g \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \rho(x, y, z) d\mathcal{V} \right\} \times \mathbf{e}_g = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

und da  $\mathbf{e}_g$  beliebig ist, muss der Ausdruck in der geschwungenen Klammer identisch verschwinden, d. h.

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \rho(x, y, z) d\mathcal{V}}{m} \quad (2.55)$$

bzw. in Komponentenschreibweise  $\mathbf{r}_S = r_{S,x} \mathbf{e}_x + r_{S,y} \mathbf{e}_y + r_{S,z} \mathbf{e}_z$

$$r_{S,x} = \frac{\int_{\mathcal{V}} x \rho(x, y, z) d\mathcal{V}}{m}, \quad r_{S,y} = \frac{\int_{\mathcal{V}} y \rho(x, y, z) d\mathcal{V}}{m}, \quad r_{S,z} = \frac{\int_{\mathcal{V}} z \rho(x, y, z) d\mathcal{V}}{m} . \quad (2.56)$$

Wenn sich ein Körper aus mehreren Teilkörpern  $j = 1, \dots, N$  mit den Volumina  $\mathcal{V}_j$  und der Dichte  $\rho_j(x, y, z)$  zusammensetzt, dann errechnen sich die Ortsvektoren  $\mathbf{r}_{Sj}$  zu den Schwerpunkten der Teilkörper gemessen im gleichen Koordinatensystem  $(0xyz)$  zu

$$\mathbf{r}_{Sj} = \frac{\int_{\mathcal{V}_j} \mathbf{r} \rho_j(x, y, z) d\mathcal{V}_j}{m_j} \quad \text{mit} \quad m_j = \int_{\mathcal{V}_j} \rho_j(x, y, z) d\mathcal{V}_j . \quad (2.57)$$

Daraus erkennt man unmittelbar, dass sich der Schwerpunkt des gesamten Körpers gemäß (2.55) in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_S &= \frac{\int_{\mathcal{V}_1} \mathbf{r} \rho_1(x, y, z) d\mathcal{V}_1 + \dots + \int_{\mathcal{V}_j} \mathbf{r} \rho_j(x, y, z) d\mathcal{V}_j + \dots + \int_{\mathcal{V}_N} \mathbf{r} \rho_N(x, y, z) d\mathcal{V}_N}{m} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{r}_{Sj} m_j}{\sum_{j=1}^N m_j} \end{aligned} \quad (2.58)$$

berechnen lässt.

**Beispiel 2.5.** Für den homogenen Starrkörper (Dichte  $\rho$  ist konstant) von Abbildung 2.18 ist der Ortsvektor zum Schwerpunkt gesucht.

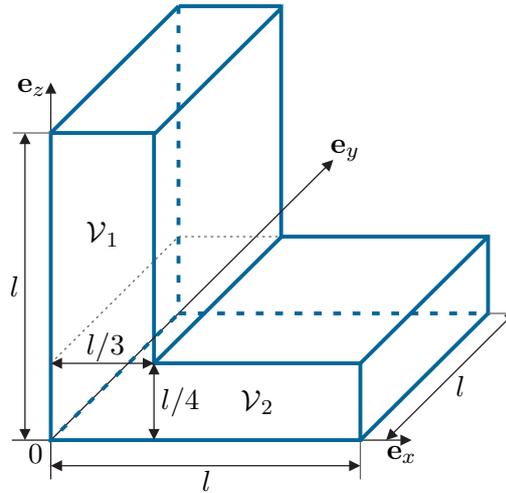


Abbildung 2.18: Zur Schwerpunktberechnung zusammengesetzter Teilkörper.

Dazu werden vorerst gemäß (2.57) die Schwerpunkte getrennt für die beiden Volumina  $\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{V}_2$  berechnet. Für den ersten Teilkörper mit dem Volumen  $\mathcal{V}_1$  folgt damit

$$\begin{aligned} r_{S1,x} &= \frac{\rho}{m_1} \int_{l/4}^l \int_0^l \int_0^{l/3} x \, dx \, dy \, dz = \frac{\rho}{\rho \frac{l}{3} l} \frac{l^4}{24} = \frac{l}{6} \\ r_{S1,y} &= \frac{\rho}{m_1} \int_{l/4}^l \int_0^l \int_0^{l/3} y \, dx \, dy \, dz = \frac{4}{l^3} \frac{l^4}{8} = \frac{l}{2} \\ r_{S1,z} &= \frac{\rho}{m_1} \int_{l/4}^l \int_0^l \int_0^{l/3} z \, dx \, dy \, dz = \frac{4}{l^3} \frac{5l^4}{32} = \frac{5l}{8} \end{aligned}$$

und für den zweiten Teilkörper  $\mathcal{V}_2$  ergibt sich

$$\begin{aligned} r_{S2,x} &= \frac{\rho}{m_2} \int_0^{l/4} \int_0^l \int_0^l x \, dx \, dy \, dz = \frac{\rho}{\rho \frac{l}{4} l^2} \frac{l^4}{8} = \frac{l}{2} \\ r_{S2,y} &= \frac{\rho}{m_2} \int_0^{l/4} \int_0^l \int_0^l y \, dx \, dy \, dz = \frac{4}{l^3} \frac{l^4}{8} = \frac{l}{2} \\ r_{S2,z} &= \frac{\rho}{m_2} \int_0^{l/4} \int_0^l \int_0^l z \, dx \, dy \, dz = \frac{4}{l^3} \frac{l^4}{32} = \frac{l}{8} . \end{aligned}$$

Damit lautet nach (2.58) der Ortsvektor des Schwerpunktes des gesamten Körpers

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \mathbf{r}_{S1} + m_2 \mathbf{r}_{S2}) = \frac{1}{\frac{\rho}{4} l^3 + \frac{\rho}{4} l^3} \left( \frac{\rho}{4} l^3 \begin{bmatrix} \frac{l}{6} \\ \frac{l}{2} \\ \frac{5l}{8} \end{bmatrix} + \frac{\rho}{4} l^3 \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \\ \frac{l}{8} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{l}{3} \\ \frac{l}{2} \\ \frac{3l}{8} \end{bmatrix} . \quad (2.59)$$

**Aufgabe 2.6.** Berechnen Sie den Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel gemäß Abbildung 2.19.

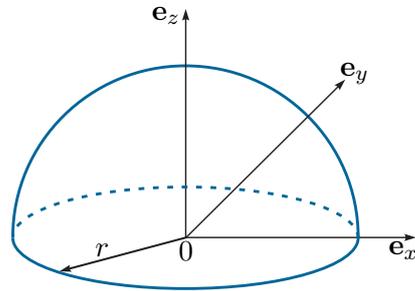


Abbildung 2.19: Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel.

*Lösung von Aufgabe 2.6.*

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{8}r \end{bmatrix}$$

### 2.2.3 Impulserhaltung

Das *zweite Newtonsche Gesetz (Impulserhaltungssatz)* formuliert für eine Punktmasse besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses  $\mathbf{p}$  gleich der auf die Punktmasse wirkenden Kraft  $\mathbf{f}$  ist, d. h.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{f} \quad (2.60)$$

mit der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ . Man beachte, dass die Formulierung (2.60) nur bezüglich eines ruhenden Bezugskoordinatensystems (*Inertialsystem*) gültig ist. Für die in dieser Vorlesung betrachteten Systeme kann die Erde als Inertialsystem angesehen werden.

**Beispiel 2.6.** Ein Ball der Masse  $m$  wird aus der Höhe  $h$  gegenüber dem Erdboden mit der Geschwindigkeit  $v(0) = v_0 > 0$  abgeschossen, siehe Abbildung 2.20.

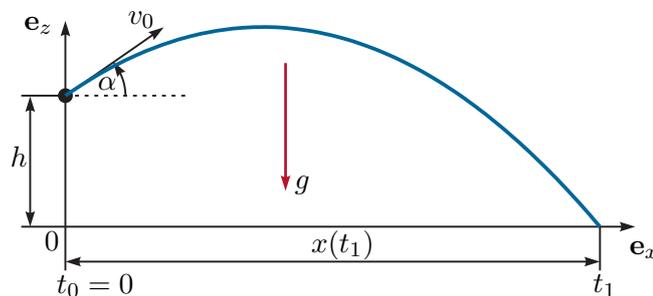


Abbildung 2.20: Wurfparkabel.

Im Weiteren soll berechnet werden, unter welchem Winkel  $\alpha$  der Ball abgeschossen werden muss, damit die Wurfweite unter der Annahme verschwindender Luftreibung maximiert wird. Da die Masse  $m$  konstant ist, lautet der Impulserhaltungssatz im Inertialsystem  $(0xyz)$

$$m\ddot{x} = 0 \quad \text{und} \quad m\ddot{z} = -mg \quad (2.61)$$

mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha)$ ,  $z(0) = h$ ,  $\dot{z}(0) = v_0 \sin(\alpha)$ . Aus (2.61) erhält man mit  $\dot{x}(t) = v_x(t)$  und  $\dot{z}(t) = v_z(t)$

$$v_x(t) = \dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha) \quad (2.62a)$$

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \quad (2.62b)$$

$$v_z(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha) \quad (2.62c)$$

$$z(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha)t + h. \quad (2.62d)$$

Die Zeit  $t$  kann nun in der zweiten Gleichung eliminiert und in die letzte Gleichung eingesetzt werden, woraus die bekannte Wurfparabel

$$z = -g\frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x + h \quad (2.63)$$

resultiert. Der Zeitpunkt  $t_1$ , zu dem der Ball auf dem Boden trifft, ergibt sich aus der Bedingung  $z(t_1) = 0$  zu

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gh}}{g} \quad (2.64)$$

und damit lautet die Wurfweite

$$x(t_1) = v_0 \cos(\alpha) \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gh}}{g}. \quad (2.65)$$

Um die Wurfweite zu maximieren, leitet man  $x(t_1)$  nach  $\alpha$  ab und setzt den Ausdruck gleich Null. Als Ergebnis erhält man

$$\alpha_{max} = \arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right). \quad (2.66)$$

Man kann sich einfach davon überzeugen, dass für  $h = 0$  der Winkel  $\alpha_{max} = 45^\circ$  und die maximale Weite  $x_{max}(t_1) = v_0^2/g$  beträgt.

**Aufgabe 2.7.** Zeigen Sie die Gültigkeit von (2.66).

Abbildung 2.21 zeigt zwei Punktmassen  $m_i$  und  $m_j$ , die über eine masselose Stange starr miteinander verbunden sind. Wenn man die Stange aufschneidet, so folgt nach dem Schnittprinzip  $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$ . Der Impulserhaltungssatz getrennt für jede Punktmasse

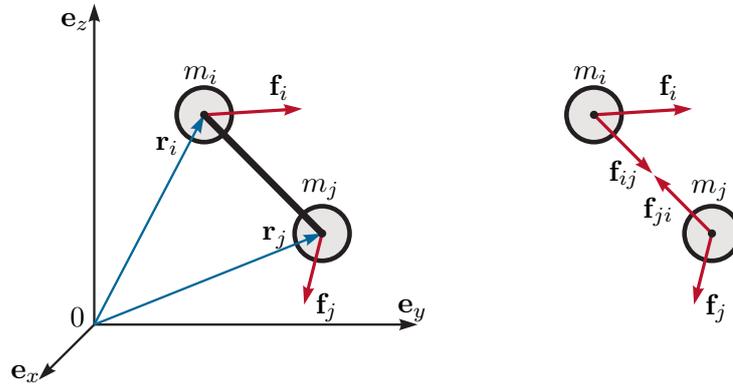


Abbildung 2.21: Zwei mit einer masselosen Stange verbundene Punktmassen.

angeschrieben lautet

$$m_i \frac{d}{dt} \mathbf{v}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{ij} \quad \text{und} \quad m_j \frac{d}{dt} \mathbf{v}_j = \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_{ji} \quad (2.67)$$

bzw. erhält man durch Summation

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_i + m_j \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_j = \underbrace{\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j}_{\mathbf{f}_R} + \underbrace{\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji}}_{=0} . \quad (2.68)$$

Setzt man die Beziehung für den Schwerpunkt gemäß (2.50)

$$\mathbf{r}_S = \frac{m_i \mathbf{r}_i + m_j \mathbf{r}_j}{m_i + m_j} \quad (2.69)$$

in (2.68) ein, vereinfacht sich (2.68) zu

$$\underbrace{(m_i + m_j)}_m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_S = \underbrace{\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j}_{\mathbf{f}_R} . \quad (2.70)$$

Man kann sich unmittelbar davon überzeugen, dass dies auch für einen Starrkörper mit dem Volumen  $\mathcal{V}$ , der Masse  $m$  nach (2.51) und dem Ortsvektor zum Schwerpunkt  $\mathbf{r}_S$  gemäß (2.55) gilt, siehe dazu Abbildung 2.17. Schreibt man nämlich den Impulserhaltungssatz (2.60) für ein Massenelement  $dm = \rho(x, y, z) d\mathcal{V}$  mit dem zugehörigen Ortsvektor  $\mathbf{r}$  an und integriert über das Volumen  $\mathcal{V}$ , so folgt

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} \rho(x, y, z) d\mathcal{V} = \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \rho(x, y, z) d\mathcal{V}}_{m \mathbf{r}_S} = m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_S = \mathbf{f}_R . \quad (2.71)$$

Die Gleichung (2.71) ist in der Literatur unter dem Namen *Schwerpunktsatz* bekannt und besagt, dass der Schwerpunkt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_S$  eines Systems von Körpern sich wie eine Punktmasse verhält, deren Masse  $m$  die Summe der Massen aller einzelnen Körper ist, und auf den die vektorielle Summe  $\mathbf{f}_R$  aller von außen an den einzelnen Körpern angreifenden Kräfte wirkt.

**Beispiel 2.7.** Abbildung 2.22 zeigt einen einfachen Flaschenzug mit zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$ , die über reibungsfreie masselose Rollen durch ein masseloses Seil miteinander verbunden sind.

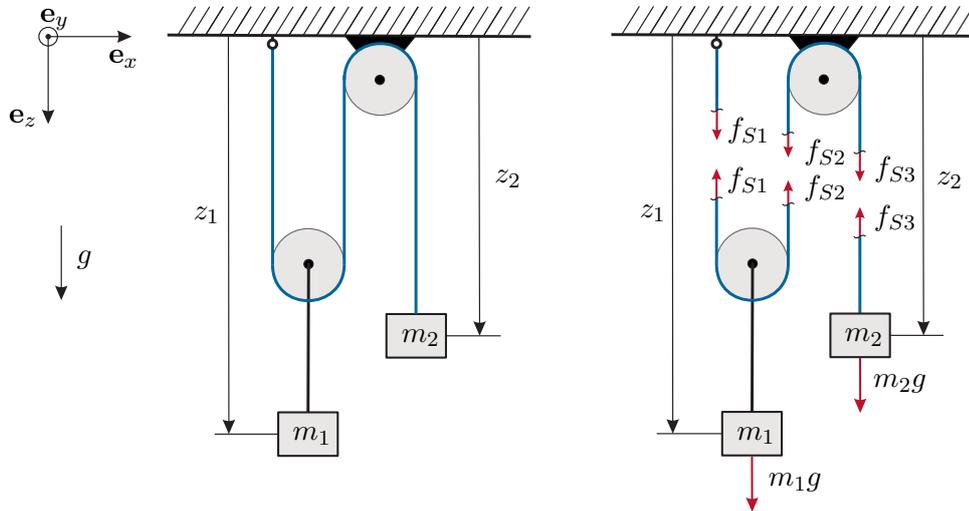


Abbildung 2.22: Flaschenzug mit zwei Massen.

Die zugehörigen Bewegungsgleichungen lauten

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g - f_{S1} - f_{S2} \quad (2.72a)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - f_{S3} . \quad (2.72b)$$

Aufgrund der obigen Annahmen ist die Kraft im gesamten Seil gleich groß, d. h.

$$f_{S1} = f_{S2} = f_{S3} = f_S . \quad (2.73)$$

Bezeichnet man mit  $z_{10}$  und  $z_{20}$  die Position der Masse  $m_1$  und  $m_2$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , dann bedingt eine Änderung von  $z_2$  um  $\Delta z_2$  eine Verschiebung der Masse  $m_1$  um  $-\Delta z_2/2$  (Flaschenzug), d. h.

$$z_2(t) = z_{20} + \Delta z_2(t), \quad z_1(t) = z_{10} - \frac{\Delta z_2(t)}{2} . \quad (2.74)$$

Setzt man (2.73) und (2.74) in (2.72) ein, erhält man

$$-\frac{m_1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \Delta z_2 = m_1 g - 2f_S \quad (2.75a)$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} \Delta z_2 = m_2 g - f_S , \quad (2.75b)$$

woraus sich unmittelbar die Bewegungsgleichung des gekoppelten Systems und die Seilkraft  $f_S$  in der Form

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta z_2 = 2g \frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2} \quad (2.76a)$$

$$f_S = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_2 + m_1} \quad (2.76b)$$

berechnen lassen.

### 2.2.4 Translatorische kinetische Energie und potentielle Energie

Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen ist eine Punktmasse mit der Masse  $m$ , dem Ortsvektor  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  vom Ursprung 0 des Inertialsystems  $(0xyz)$ , der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z$  und der Summe der auf die Punktmasse wirkenden Kräfte  $\mathbf{f}_R = f_{R,x}\mathbf{e}_x + f_{R,y}\mathbf{e}_y + f_{R,z}\mathbf{e}_z$ . Damit gilt nach (2.60) der Impulserhaltungssatz

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{f}_R . \quad (2.77)$$

Die durch die Kraft  $\mathbf{f}_R$  zum Zeitpunkt  $t$  pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit wird als *Leistung* (SI Einheit Watt W = N m/s)

$$P = \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} \quad (2.78)$$

bezeichnet<sup>2</sup>. Die zugehörige im Zeitintervall  $[t_0, t]$  transferierte *Energie*  $E$  lautet (SI Einheit Joule J = N m)

$$E(t) - E(t_0) = \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} d\tau . \quad (2.79)$$

Setzt man nun die linke Seite von (2.77) in (2.79) ein, so erhält man die zum Zeitpunkt  $t$  in der Masse  $m$  gespeicherte *kinetische Energie* zu

$$\begin{aligned} T(t) &= T(t_0) + \int_{t_0}^t \left( m \frac{d}{d\tau} \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v} d\tau = T(t_0) + m \int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} \cdot d\tilde{\mathbf{v}} \\ &= T(t_0) + m \left( \int_{v_{0x}}^{v_x} \tilde{v}_x d\tilde{v}_x + \int_{v_{0y}}^{v_y} \tilde{v}_y d\tilde{v}_y + \int_{v_{0z}}^{v_z} \tilde{v}_z d\tilde{v}_z \right) \\ &= T(t_0) - \underbrace{\frac{m}{2} (v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2)}_{=0} + \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} , \end{aligned} \quad (2.80)$$

wobei sämtliche Integrale entlang einer Lösungskurve des Systems im Zeitintervall  $[t_0, t]$  mit der zugehörigen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 = [v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}]^T$  und  $\mathbf{v}(t) = [v_x, v_y, v_z]^T$  ausgewertet werden.

Der *translatorische Anteil der kinetischen Energie eines Starrkörpers* errechnet sich zu (Schwerpunktsatz)

<sup>2</sup>Hier und im Folgenden bezeichnet  $\mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v}$  das innere Produkt  $\mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f}_R^T \mathbf{v} = f_{R,x} v_x + f_{R,y} v_y + f_{R,z} v_z$ .

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_S^T \dot{\mathbf{r}}_S \quad (2.81)$$

mit der Gesamtmasse  $m$  und dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_S$  zum Schwerpunkt gemessen im Inertialsystem  $(0xyz)$ .

Im nächsten Schritt soll für die Klasse der *Potentialkräfte*  $\mathbf{f}_R$  die zugehörige *potentielle Energie*  $V$  berechnet werden. Dazu formuliert man (2.79) mit  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  in der Form

$$\begin{aligned} V(t) &= V(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} \, d\tau = V(t_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}} \\ &= V(t_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} [f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \, d\tilde{x} + f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \, d\tilde{y} + f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \, d\tilde{z}] \end{aligned} \quad (2.82)$$

um, wobei die Integrale wiederum entlang einer Lösungskurve des Systems im Zeitintervall  $[t_0, t]$  mit der zugehörigen Position  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0]^T$  und  $\mathbf{r}(t) = [x \ y \ z]^T$  zu verstehen sind. Das Integral in (2.82) ist genau dann<sup>3</sup> *wegunabhängig*, wenn die *Integrabilitätsbedingungen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) , \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) , \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \end{aligned} \quad (2.83)$$

erfüllt sind bzw. die Jacobimatrix von  $\mathbf{f}_R = [f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \ f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \ f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})]^T$  bezüglich  $\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z}]^T$  *symmetrisch* ist, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{r}}} \mathbf{f}_R = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,x} & \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,x} & \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,x} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,y} & \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,y} & \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,y} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f_{R,z} & \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f_{R,z} & \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f_{R,z} \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{r}}} \mathbf{f}_R \right)^T . \quad (2.84)$$

In diesem Fall sagt man auch, die Kraft  $\mathbf{f}_R$  ist *konservativ* und besitzt ein *Potential* (potentielle Energie) gemäß (2.82). Nimmt man nun an, dass  $\mathbf{r}_I$  jene Position bezeichnet, an der  $V(\mathbf{r}_I) = 0$  ist (Bezugspunkt), dann gilt

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_I) + \underbrace{\int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}}}_{=V(\mathbf{r}_0)} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}} = \int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}_R(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}} . \quad (2.85)$$

Damit hängt die potentielle Energie  $V$  ausschließlich vom Endwert  $\mathbf{r}$  der Lösungskurve und vom Bezugspunkt  $\mathbf{r}_I$  ab und ist unabhängig davon, wie man zu diesem Endwert gelangt<sup>4</sup>. Wenn  $\mathbf{f}_R = [f_{R,x}(x, y, z) \ f_{R,y}(x, y, z) \ f_{R,z}(x, y, z)]^T$  konservativ ist und damit

<sup>3</sup>Genau genommen gilt dies nur in einer sternförmigen Menge (Lemma von Poincaré für Differentialformen).

<sup>4</sup>Man beachte, dass eine Änderung des Bezugspunktes  $\mathbf{r}_I$  lediglich eine konstante Verschiebung in  $V$  bewirkt.

die Integrabilitätsbedingungen (2.83) erfüllt sind, ist der Integrationsweg frei wählbar und das zugehörige Potential lässt sich z. B. wie folgt

$$V(\mathbf{r}) = \int_{x_I}^x f_{r,x}(\tilde{x}, y_I, z_I) d\tilde{x} + \int_{y_I}^y f_{r,y}(x, \tilde{y}, z_I) d\tilde{y} + \int_{z_I}^z f_{r,z}(x, y, \tilde{z}) d\tilde{z} \quad (2.86)$$

mit  $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$  und  $\mathbf{r}_I = [x_I \ y_I \ z_I]^T$  berechnen.

**Beispiel 2.8.** Ein anschauliches Beispiel bildet die potentielle Energie zufolge der Gravitationskraft. Wenn eine Person der Masse  $m$  einen Berg der Höhe  $h$  besteigt, dann hat diese Person am Berggipfel die potentielle Energie<sup>a</sup>  $V = mgh$ , unabhängig davon, von welchem Ort sie die Bergtour gestartet und auf welchem Weg sie den Berggipfel erreicht hat.

<sup>a</sup>Hier wird angenommen, dass als Bezugspunkt das Niveau des Meeresspiegels gewählt wurde.

Wenn  $V(x, y, z)$  die potentielle Energie bezeichnet, dann kann  $V$  auch in der Form

$$V = \int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}} \frac{dV}{d\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_I}^{\mathbf{r}} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{x} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{z} \right] \quad (2.87)$$

geschrieben werden und durch Vergleich mit (2.86) folgen aus der Unabhängigkeit der Ortsvariablen  $x$ ,  $y$  und  $z$  die Beziehungen

$$f_{R,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad f_{R,y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad f_{R,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \quad (2.88)$$

bzw.

$$\mathbf{f}_R = \text{grad}(V) = \nabla V \quad (2.89)$$

**Aufgabe 2.8.** Zeigen Sie, dass die Kraft, die aus einem Potential berechnet werden kann, immer *wirbelfrei* ist, d. h.  $\text{rot}(\mathbf{f}_R) = \nabla \times \mathbf{f}_R = \mathbf{0}$ .

**Beispiel 2.9.** Die Abbildung 2.23 zeigt eine mechanische Feder und deren nichtlineare Kraft-Weg Kennlinie. Im unbelasteten Fall (Federkraft  $f_F = 0$ ) hat das Federelement die Länge  $s_0$ , welche auch als *entspannte Länge der Feder* bezeichnet wird.

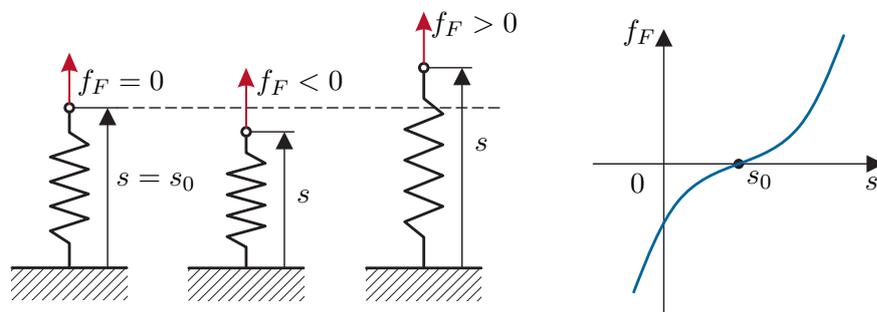


Abbildung 2.23: Das Federelement.

Die potentielle Energie der Feder mit der Federkraft  $f_F(s)$ ,  $f_F(s_0) = 0$ , berechnet sich nach (2.85) zu

$$V(s) = \int_{s_0}^s f_F(\bar{s}) d\bar{s} . \quad (2.90)$$

Im linearen Fall, d. h.  $f_F(s) = c(s - s_0)$  mit der *Federkonstanten*  $c > 0$ , vereinfacht sich die potentielle Energie zu

$$V(s) = \frac{1}{2}c(s - s_0)^2 . \quad (2.91)$$

*Aufgabe 2.9.* Abbildung 2.24 zeigt die Serien- und Parallelschaltung zweier linearer Federelemente mit den Federkonstanten  $c_1$  und  $c_2$  und den zugehörigen entspannten Längen  $s_{01}$ ,  $s_{02}$ .

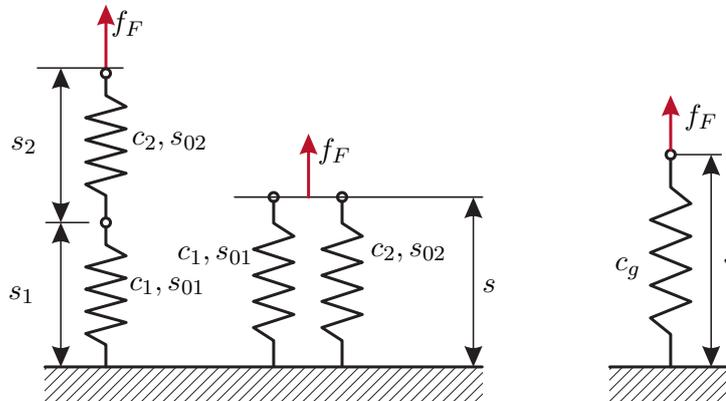


Abbildung 2.24: Zur Serien- und Parallelschaltung von linearen Federelementen.

Berechnen Sie jeweils die Gesamtsteifigkeit  $c_g$  sowie die zugehörige entspannte Länge  $s_{0g}$  der Ersatzschaltung gemäß Abbildung 2.24.

*Lösung von Aufgabe 2.9.*

$$\text{Serienschaltung: } s_{0g} = s_{01} + s_{02}, \quad c_g = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

$$\text{Parallelschaltung: } s_{0g} = \frac{c_1 s_{01} + c_2 s_{02}}{c_1 + c_2}, \quad c_g = c_1 + c_2$$

*Beispiel 2.10.* Gegeben ist das System in Abbildung 2.25 bestehend aus den zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  sowie den beiden linearen Federelementen mit der Federsteifigkeit  $c_1 > 0$  und  $c_2 > 0$  und den zugehörigen entspannten Längen  $s_{01}$  und  $s_{02}$ . Im Weiteren bezeichne  $z_1$  und  $z_2$  die Auslenkung der Masse  $m_1$  bzw.  $m_2$  aus der Gleichgewichtslage, d. h.  $z_1 = s_1 - s_{01}$  und  $z_2 = s_2 - s_{02}$ . Wie in Abbildung 2.25 dargestellt, sind die beiden Massen über eine Blattfeder miteinander verbunden. Diese bewirkt eine Federkraft  $f_{12} = c_{12}(z_1 - z_2)$ ,  $c_{12} > 0$ , zufolge einer Relativverschiebung von  $m_1$  und  $m_2$ .

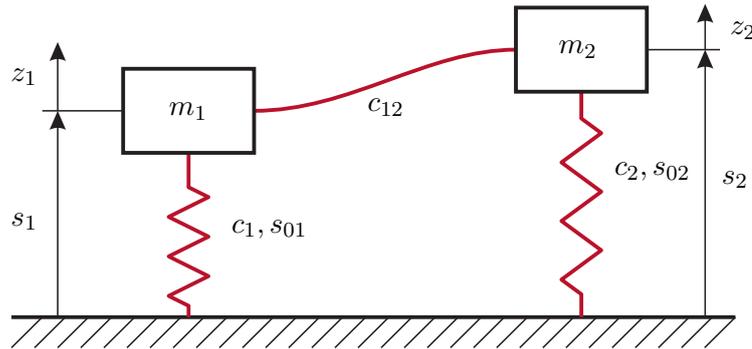


Abbildung 2.25: Massen mit Blattfeder.

Aufgrund des Schnittprinzips muss diese Kraft mit unterschiedlichem Vorzeichen an den beiden Enden der Feder auftreten, d.h.  $f_{21} = -f_{12}$ . Nimmt man an, dass für  $z_1 = z_2 = 0$  die in den Federn gespeicherte potentielle Energie  $V$  gleich Null ist und fasst man die Kräfte der Federn entsprechend der Verschiebungen in einen Vektor  $\mathbf{f}_F$  zusammen

$$\mathbf{f}_F = \begin{bmatrix} f_{F1}(z_1, z_2) \\ f_{F2}(z_1, z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 z_1 + c_{12}(z_1 - z_2) \\ c_2 z_2 + c_{12}(z_2 - z_1) \end{bmatrix}, \quad (2.92)$$

so errechnet sich  $V$  mit  $\mathbf{z} = [z_1 \quad z_2]^T$  in der Form

$$V = \int_0^{\mathbf{z}} \mathbf{f}_F \cdot d\tilde{\mathbf{z}} = \int_0^{\tilde{z}_1} \underbrace{[c_1 \tilde{z}_1 + c_{12}(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2)]}_{f_{F1}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)} d\tilde{z}_1 + \int_0^{\tilde{z}_2} \underbrace{[c_2 \tilde{z}_2 + c_{12}(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1)]}_{f_{F2}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)} d\tilde{z}_2. \quad (2.93)$$

Analog zu (2.82) ist die Wegunabhängigkeit der Integration von (2.93) gegeben, da die Integrabilitätsbedingung

$$c_{12} = \frac{\partial f_{F1}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)}{\partial \tilde{z}_2} = \frac{\partial f_{F2}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)}{\partial \tilde{z}_1} = c_{12} \quad (2.94)$$

erfüllt ist. Die potentielle Energie  $V$  der Kraft  $\mathbf{f}_F = \mathbf{C}\mathbf{z}$  folgt damit zu

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{z_1} f_{F1}(\tilde{z}_1, 0) d\tilde{z}_1 + \int_0^{z_2} f_{F2}(z_1, \tilde{z}_2) d\tilde{z}_2 \\ &= \int_0^{z_1} [c_1 \tilde{z}_1 + c_{12} \tilde{z}_1] d\tilde{z}_1 + \int_0^{z_2} [c_2 \tilde{z}_2 + c_{12} \tilde{z}_2 - c_{12} z_1] d\tilde{z}_2 \\ &= (c_1 + c_{12}) \frac{z_1^2}{2} + (c_2 + c_{12}) \frac{z_2^2}{2} - c_{12} z_1 z_2 \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_2 + c_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Die Matrix  $\mathbf{C}$  ist *symmetrisch* und *positiv definit* und wird auch als *Steifigkeitsmatrix* bezeichnet. Die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix impliziert damit die Integrabilitätsbedingung, womit für  $\mathbf{f}_F$  eine potentielle Energie existiert.

### 2.2.5 Dissipative Kräfte

Unter einer *dissipativen Kraft*  $\mathbf{f}_D$  versteht man eine Kraft, deren Arbeit irreversibel in Wärme umgewandelt (dissipiert) wird, d. h.  $\mathbf{f}_D(t) \cdot \mathbf{v}(t) \leq 0$  für alle Zeiten  $t$ . Dies können volumenhaft verteilt wirkende Kräfte sein, wie beispielsweise bei der Wirbelstrombremse, oder flächenhaft verteilt wirkende Kräfte, wie dies bei der Bewegung eines starren Körpers durch ein (flüssiges) Medium zufolge der Reibung auftritt.

#### Bewegung eines starren Körpers durch ein fluides Medium

Betrachtet man einen Starrkörper, der sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  ohne Rotation durch ein (ruhend)es fluides Medium bewegt, so können die vom Fluid auf den Körper ausgeübten flächenhaft verteilten Kräfte durch eine resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R$  und ein resultierendes Moment  $\boldsymbol{\tau}_R^{(Z)}$  bezüglich eines beliebig gewählten Punktes  $Z$  ausgedrückt werden (siehe dazu auch die bisherigen Ausführungen zum Thema *allgemeines Kräftesystem*). Die resultierende Kraft  $\mathbf{f}_R$  kann man in einen Anteil  $\mathbf{f}_A$  (*Ablenkungskraft*)

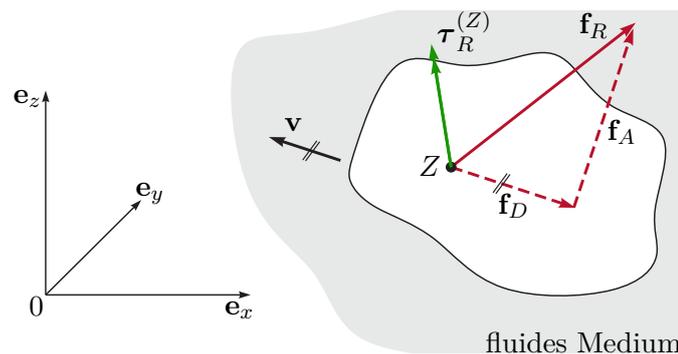


Abbildung 2.26: Bewegter Starrkörper in einem fluiden Medium.

senkrecht zu  $\mathbf{v}$  und einen Anteil  $\mathbf{f}_D$  (*Widerstandskraft*), der parallel in entgegengesetzter Richtung von  $\mathbf{v}$  wirkt, zerlegen, siehe Abbildung 2.26. Die Ablenkungskraft  $\mathbf{f}_A$  wird auch als dynamische Auftriebskraft bezeichnet und ist bedingt durch die Geometrie des Starrkörpers. Ein einfacher Zusammenhang für die Widerstandskraft  $\mathbf{f}_D$  in einem weiten Geschwindigkeitsbereich unter der Schallgeschwindigkeit ist durch

$$\mathbf{f}_D = f_D \mathbf{e}_v = -c_W A \frac{\rho_f}{2} v^2 \mathbf{e}_v \quad (2.96)$$

mit  $v = \|\mathbf{v}\|_2$  und dem Richtungsvektor der Geschwindigkeit  $\mathbf{e}_v$  gegeben. Dabei bezeichnet  $c_W > 0$  den (dimensionslosen) Widerstandsbeiwert,  $A$  eine geeignete Bezugsfläche und  $\rho_f$  die Dichte des fluiden Mediums.

### Reibung zwischen festen Körpern

Wenn zwei feste Körper, die sich berühren, Relativbewegungen ausführen, dann entstehen *zufolge der Rauheit der Oberflächen* in der Berührungsfläche flächenhaft wirkende tangentielle Reibungskräfte. Im Folgenden betrachte man eine Masse  $m$ , die durch eine externe horizontale Kraft  $f_e$  auf einer rauen Oberfläche bewegt wird, siehe Abbildung 2.27. Schneidet man die Masse frei, so wirken auf die Masse neben  $f_e$  die Normalkraft

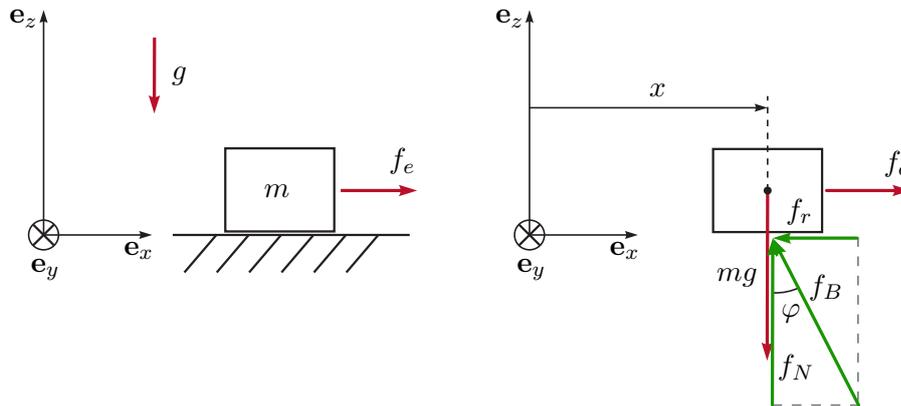


Abbildung 2.27: Zur Haftreibung.

$f_N$  und die Reibkraft  $f_r$ . Aus Erfahrung weiß man, dass die Masse  $m$  sich erst bewegt, wenn die Kraft  $f_e$  einen bestimmten Wert  $f_H$  überschreitet, d. h. solange die Ungleichung<sup>5</sup>  $|f_e| \leq f_H$  erfüllt ist, gelten die statischen Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathbf{e}_x : f_e - f_r = 0 \quad (2.97a)$$

$$\mathbf{e}_z : f_N - mg = 0 \quad (2.97b)$$

und die Masse bleibt an der Stelle haften. In diesem Zusammenhang wird  $f_r$  deshalb als *Haftreibungskraft* bezeichnet und stellt eine Reaktionskraft dar, wie dies zufolge des Schnittprinzips bereits bekannt ist. In einer ersten Näherung lässt sich  $f_H$  in der Form

$$f_H = \mu_H f_N, \quad \text{für } f_N > 0, \quad (2.98)$$

ausdrücken, wobei der *Haftreibungskoeffizient*  $\mu_H > 0$  lediglich von der Rauheit der sich berührenden Oberflächen abhängt. Wird die externe Kraft  $f_e$  soweit erhöht, dass die Haftreibung überwunden wird, dann beginnt sich die Masse zu bewegen und die Reibkraft  $f_r = f_C$  zufolge der *trockenen Gleitreibung* lautet

$$f_C = \mu_C f_N \operatorname{sgn}(\dot{x}), \quad \text{für } f_N > 0, \quad (2.99)$$

mit dem *Gleitreibungskoeffizienten*  $\mu_C > 0$ . In diesem Fall gilt für die  $\mathbf{e}_z$ -Richtung nach wie vor die Gleichgewichtsbedingung  $f_N = mg$  und in  $\mathbf{e}_x$ -Richtung folgt der Impulserhaltungssatz (2.60) zu

$$m\ddot{x} = f_e - \mu_C mg \operatorname{sgn}(\dot{x}). \quad (2.100)$$

<sup>5</sup>Man beachte, dass im Allgemeinen  $f_H$  für unterschiedliche Vorzeichen von  $f_e$  auch unterschiedliche Werte annehmen kann, was hier nicht betrachtet wird.

Das mathematische Modell der Masse von Abbildung 2.27 ist demnach durch eine *Strukturumschaltung* charakterisiert, d. h.

$$\mathbf{Haften:} \text{ wenn } |f_e| \leq f_H \text{ und } \dot{x} = 0 \quad \begin{cases} \dot{x} &= 0 \\ \dot{v} &= 0 \end{cases} \quad (2.101a)$$

$$\mathbf{Gleiten:} \text{ sonst } \begin{cases} \dot{x} &= v \\ m\dot{v} &= f_e - \mu_C mg \operatorname{sign}(v) . \end{cases} \quad (2.101b)$$

Das Reibungsgesetz (2.98), (2.99) ist auch als *Coulombsches Reibungsgesetz* bekannt und gilt im Wesentlichen als elementare Näherungstheorie für trockene Reibung zwischen festen Körpern. Die Reibungskoeffizienten  $\mu_H$  und  $\mu_C$  müssen im Allgemeinen aus experimentellen Versuchen ermittelt werden. Typische Werte für einige Materialpaarungen findet man in Tabellenbüchern, siehe beispielsweise Tabelle 2.1.

Tabelle 2.1: Typische Reibungskoeffizienten.

Materialpaarung	Haftreibung $\mu_H$	Gleitreibung $\mu_C$
Bronze auf Bronze	0,18	0,2
Grauguß auf Bronze	0,28	0,2
Stahl auf Stahl	0,15	0,12
Luftreifen auf Asphalt	0,55	0,3
Eiche auf Eiche	0,54	0,34

Im Haftzustand kann man gemäß Abbildung 2.27 einen Winkel  $\varphi$  in der Form

$$\tan(\varphi) = \frac{f_r}{f_N} \quad (2.102)$$

einführen. Setzt man für  $f_r$  den Grenzwert  $f_H = \mu_H f_N$  ein, so erhält man den Zusammenhang

$$\tan(\varphi_H) = \mu_H \quad (2.103)$$

mit dem Haftungswinkel  $\varphi_H$ . Dies erlaubt eine anschauliche geometrische Interpretation der Haftreibung: Wird ein Körper einer beliebig gerichteten Belastung unterworfen, so bleibt er in Ruhe, solange die Reaktionskraft  $\mathbf{f}_B$  an der Kontaktfläche innerhalb des so genannten *Haftkegels* liegt. Der Haftkegel beschreibt dabei den Rotationskegel um die Normale  $\mathbf{e}_n$  der Kontaktflächen mit dem Öffnungswinkel  $2\varphi_H$ , siehe Abbildung 2.28.

**Aufgabe 2.10.** Eine Masse  $m$  liegt auf einer schiefen Ebene und wird von einer Person mit der Kraft  $f_S$  nach oben gezogen (siehe Abbildung 2.29).

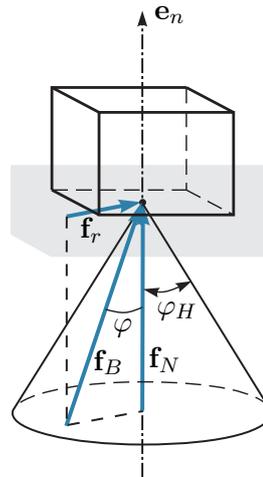


Abbildung 2.28: Haftkegel.

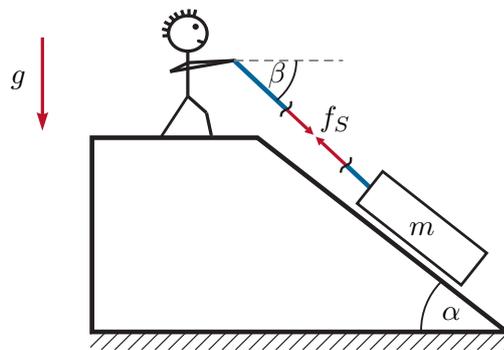


Abbildung 2.29: Masse auf schiefer Ebene.

Berechnen Sie die notwendige Zugkraft  $f_S$  als Funktion der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  sowie der Masse  $m$  und des Haftreibungskoeffizienten  $\mu_H$ , damit die Masse bewegt werden kann.

*Lösung von Aufgabe 2.10.*

$$f_S > \frac{mg(\mu_H \cos(\alpha) + \sin(\alpha))}{\cos(\beta - \alpha) + \mu_H \sin(\beta - \alpha)}$$

**Aufgabe 2.11.** Eine Person der Masse  $m$  steigt auf eine 21-stufige Leiter der Länge  $l$ , die an einer Wand angelehnt ist, siehe Abbildung 2.30. Wie viele Stufen darf die Person auf die Leiter steigen ohne dass die Leiter wegrutscht, wenn der Haftreibungskoeffizient zwischen Leiter und Wand Null und zwischen Leiter und Boden gleich  $\mu_H = 1/10$  ist?

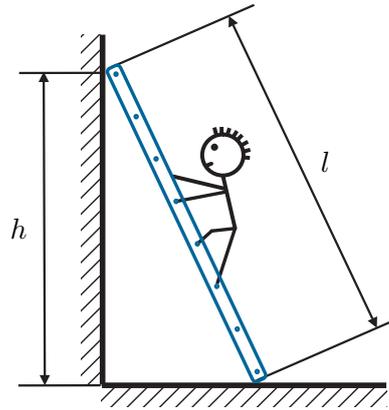


Abbildung 2.30: Person auf einer Leiter.

*Lösung von Aufgabe 2.11.* Die Anzahl der Stufen entspricht der auf die nächst kleinere ganze Zahl abgerundeten Zahl

$$\frac{20\mu_H}{\sqrt{\left(\frac{l}{h}\right)^2 - 1}} + 1 .$$

Befindet sich zwischen den beiden festen Körpern eine ununterbrochene Schmiermittelschicht, so hängen die zwischen den Körpern wirkenden Kräfte im Wesentlichen von der sich einstellenden Strömung im Spalt zwischen den beiden Körpern ab. Sehr häufig verwendet man in diesem Zusammenhang für die Reibkraft  $f_r$  ein einfaches Modell der Form

$$f_r = \mu_V \Delta v \quad (2.104)$$

mit dem *viskosen Reibungskoeffizienten*  $\mu_V > 0$  und der Relativgeschwindigkeit  $\Delta v$  der beiden sich berührenden Oberflächen der Starrkörper. Im allgemeinen Fall einer Mischreibung werden die Coulombsche Reibung (2.98), (2.99) und die viskose Reibung (2.104) kombiniert.

Es gibt nun Bauelemente, sogenannte *Dämpfer*, die eine vorgegebene (nichtlineare) Kraft-Geschwindigkeit Kennlinie  $f_D(\Delta v)$  mit  $f_D(\Delta v)\Delta v > 0$  gemäß Abbildung 2.31 realisieren. Im linearen Fall gilt für die Dämpferkraft  $f_D = d\Delta v$  mit dem *geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskoeffizienten*  $d > 0$ .

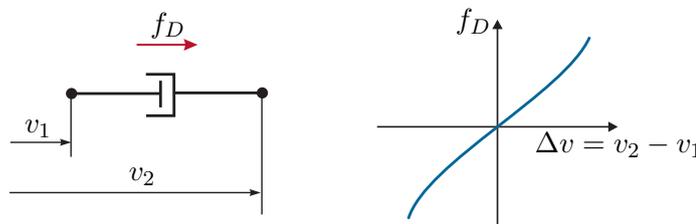


Abbildung 2.31: Nichtlinearer Dämpfer.

**Beispiel 2.11.** Ein masseloses Seil ist unter dem Umschlingungswinkel  $\alpha$  gemäß Abbildung 2.32 um einen feststehenden Zylinder geführt, wobei gilt  $f_{S2} > f_{S1}$ .

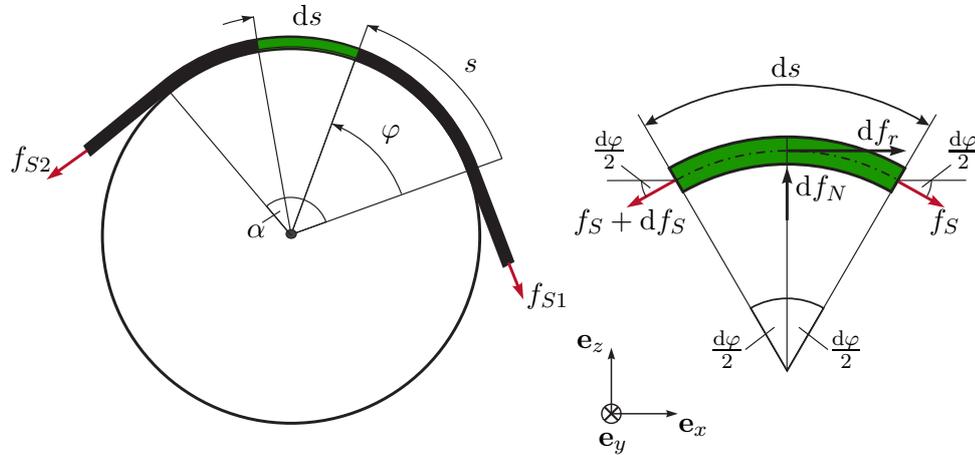


Abbildung 2.32: Zur Reibung eines Seils.

Nimmt man nun ein infinitesimales Seilelement heraus, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen unter der Annahme hinreichend kleiner Winkel  $d\varphi/2$  (d. h.  $\sin(d\varphi/2) \approx d\varphi/2$ ,  $\cos(d\varphi/2) \approx 1$ )

$$\mathbf{e}_x : f_S + df_r - (f_S + df_S) = 0 \quad (2.105a)$$

$$\mathbf{e}_z : df_N - f_S \frac{d\varphi}{2} - (f_S + df_S) \frac{d\varphi}{2} = 0 \quad (2.105b)$$

bzw. unter Vernachlässigung von  $df_S d\varphi/2$  folgt

$$df_r = df_S \quad \text{und} \quad df_N = f_S d\varphi . \quad (2.106)$$

Mit dem Coulombschen Reibungsgesetz gemäß (2.98), (2.99), im Speziellen  $df_r = \mu df_N$ , erhält man

$$\frac{df_S}{d\varphi} = \mu f_S \quad (2.107)$$

bzw. durch Integration über den Umschlingungswinkel von  $\varphi = 0$  nach  $\varphi = \alpha$  ergibt sich die *Seilreibungsgleichung* zu

$$\int_{f_{S1}}^{f_{S2}} \frac{1}{f_S} df_S = \int_0^\alpha \mu d\varphi \quad \text{bzw.} \quad f_{S2} = f_{S1} \exp(\mu\alpha) . \quad (2.108)$$

Für den Fall  $f_{S1} > f_{S2}$  kann auf analoge Art und Weise die Beziehung  $f_{S1} = f_{S2} \exp(\mu\alpha)$  hergeleitet werden. Bezeichnet nun  $\mu = \mu_H$  den Haftreibungskoeffizienten, dann ist das System im Gleichgewicht solange die Ungleichung

$$f_{S1} \exp(-\mu_H\alpha) \leq f_{S2} \leq f_{S1} \exp(\mu_H\alpha) \quad (2.109)$$

erfüllt ist. Das Seil rutscht nach rechts für  $f_{S1} > f_{S2} \exp(\mu_H \alpha)$  und nach links für  $f_{S2} > f_{S1} \exp(\mu_H \alpha)$ .

**Aufgabe 2.12.** Eine Masse mit der Gewichtskraft  $mg$  hängt an einem (masselosen) Seil, welches einmal um einen feststehenden Zylinder (Umschlingungswinkel  $360^\circ$ ) gewickelt wurde und mit der Kraft von 10 N gerade im Gleichgewicht gehalten werden kann. Wie oft muss man das Seil um den Zylinder wickeln, damit die 10 fache Masse durch die Seilhaftreibung ebenfalls mit einer Kraft von 10 N im Gleichgewicht gehalten werden kann?

**Lösung von Aufgabe 2.12.** Der gesuchte Umschlingungswinkel  $\alpha$  lautet

$$\alpha = 2\pi \frac{\ln\left(\frac{10mg}{10}\right)}{\ln\left(\frac{mg}{10}\right)}.$$

### Rollreibung

Wenn ein starres Rad auf einer starren Unterlage rollt ohne dabei zu gleiten, dann gibt es theoretisch keinen *Rollwiderstand*. In der Realität kommt es jedoch bei jedem Rollvorgang zu Deformationen, die mit partiellen Gleitvorgängen in der Kontaktfläche verbunden sind. Abbildung 2.33 zeigt die jeweiligen Kräfteverhältnisse bei einem Laufrad und einem Treibrad. Beim Laufrad muss die horizontal wirkende Kraft  $f_H$  über die

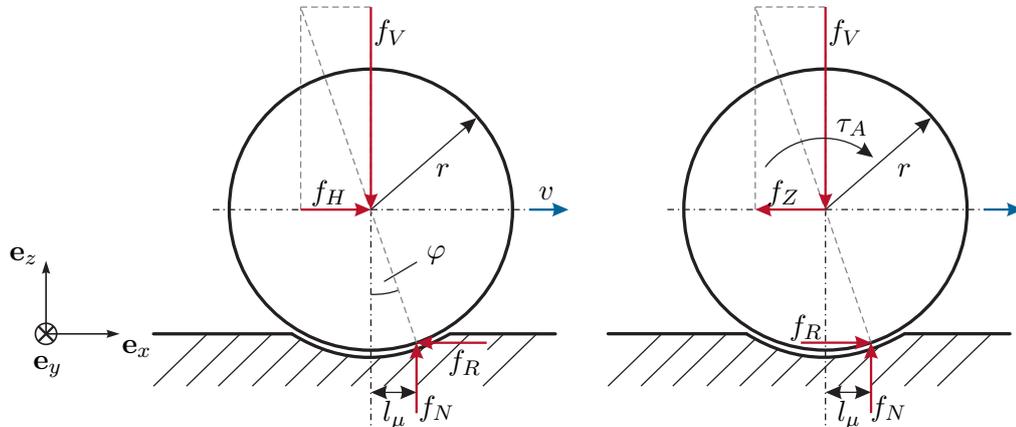


Abbildung 2.33: Lauf- und Treibrad.

Achse in das Rad eingeleitet werden, um den Rollwiderstand auszugleichen. Aus den Gleichgewichtsbedingungen für sehr kleine Winkel  $\varphi = \arctan(f_H/f_V)$

$$f_H - f_R = 0, \quad f_N - f_V = 0 \quad \text{und} \quad r f_R - l_\mu f_N = 0 \quad (2.110)$$

folgt die Rollwiderstandskraft  $f_R$  zu

$$f_R = \frac{l_\mu}{r} f_N = \mu_R f_V \quad (2.111)$$

mit dem Rollreibungskoeffizienten  $\mu_R = l_\mu/r > 0$ . Bei gleicher Materialpaarung ist der Rollreibungskoeffizient deutlich kleiner als der Gleitreibungskoeffizient.

**Aufgabe 2.13.** Zeigen Sie, dass beim Treibrad das Antriebsmoment  $\tau_A = l_\mu f_V$  aufgebracht werden muss, um den Rollwiderstand zu überwinden und dass sich die Zugkraft zu  $f_Z = \tau_A/r - \mu_R f_V$  errechnet.

**Hinweis:** Die Gleichgewichtsbedingungen für das Treibrad unter der Annahme sehr kleiner Winkel  $\varphi = \arctan(f_Z/f_V)$  lauten

$$f_Z - f_R = 0, \quad f_N - f_V = 0 \quad \text{und} \quad \tau_A - r f_R - l_\mu f_N = 0 .$$

### 2.2.6 Feder-Masse-Dämpfer System

Auf Basis der bisherigen Ergebnisse lassen sich bereits die Bewegungsgleichungen von Feder-Masse-Dämpfer Systemen herleiten. Dazu betrachte man folgendes Beispiel.

**Beispiel 2.12.** Gegeben ist das Feder-Masse-Dämpfer System von Abbildung 2.34 mit den Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$ , den linearen Dämpferelementen mit den positiven Dämpfungskonstanten  $d_{11}$ ,  $d_{22}$  und  $d_{13}$  sowie den linearen Federelementen mit den positiven Federkonstanten  $c_{11}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{13}$  und  $c_{23}$  und den entspannten Längen  $s_{011}$ ,  $s_{022}$ ,  $s_{013}$  und  $s_{023}$ . Im Weiteren wirke auf die Masse  $m_3$  die Kraft  $f_L$  und  $g$  bezeichne die Erdbeschleunigung.

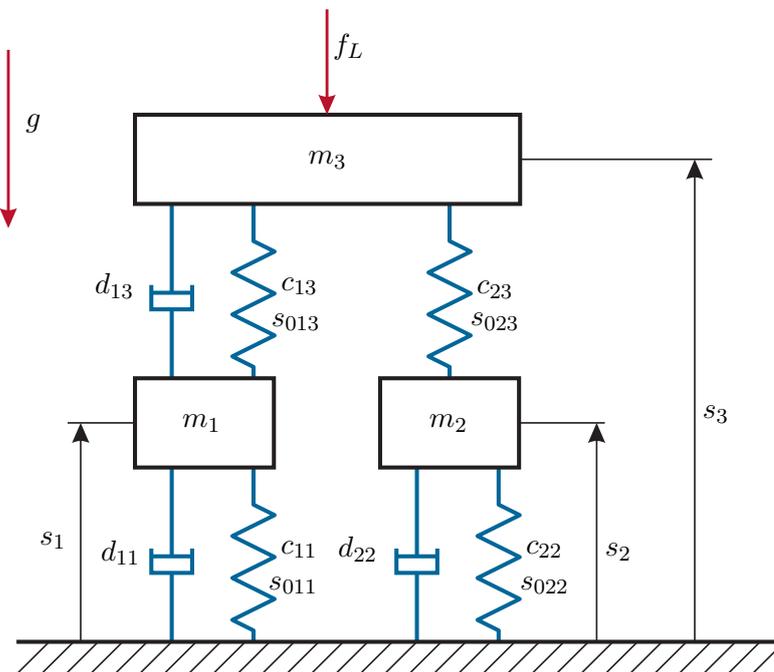


Abbildung 2.34: Feder-Masse-Dämpfer System mit drei Massen.

Wendet man den Impulserhaltungssatz (2.60) für jede Masse an, so erhält man drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$m_1 \ddot{s}_1 = -m_1 g - c_{11}(s_1 - s_{011}) - d_{11} \dot{s}_1 + c_{13}(s_3 - s_1 - s_{013}) - d_{13}(\dot{s}_1 - \dot{s}_3) \quad (2.112a)$$

$$m_2 \ddot{s}_2 = -m_2 g - c_{22}(s_2 - s_{022}) - d_{22} \dot{s}_2 + c_{23}(s_3 - s_2 - s_{023}) \quad (2.112b)$$

$$m_3 \ddot{s}_3 = -m_3 g - c_{13}(s_3 - s_1 - s_{013}) + d_{13}(\dot{s}_1 - \dot{s}_3) - c_{23}(s_3 - s_2 - s_{023}) - f_L. \quad (2.112c)$$

Das mathematische Modell (2.112c) lässt sich auch kompakter in *Matrixschreibweise* in der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{k} + \mathbf{b}f_L \quad (2.113)$$

schreiben, mit  $\mathbf{q} = [s_1 \ s_2 \ s_3]^T$ , der *symmetrischen, positiv definiten Massenmatrix*  $\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ , der *symmetrischen, positiv (semi-)definiten Dämpfungsmatrix*

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} + d_{13} & 0 & -d_{13} \\ 0 & d_{22} & 0 \\ -d_{13} & 0 & d_{13} \end{bmatrix}, \quad (2.114)$$

der *symmetrischen, positiv definiten Steifigkeitsmatrix*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} + c_{13} & 0 & -c_{13} \\ 0 & c_{22} + c_{23} & -c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & c_{13} + c_{23} \end{bmatrix}, \quad (2.115)$$

dem konstanten Vektor  $\mathbf{k}$  und dem konstanten Eingangsvektor  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -m_1 g + c_{11} s_{011} - c_{13} s_{013} \\ -m_2 g + c_{22} s_{022} - c_{23} s_{023} \\ -m_3 g + c_{13} s_{013} + c_{23} s_{023} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (2.116)$$

**Aufgabe 2.14.** Zeigen Sie die Definitheitseigenschaften der Matrizen  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$ .

Um nun die Gleichgewichtslage  $\mathbf{q}_R$  für  $f_L = 0$  zu berechnen, setzt man  $\dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  in (2.113) und löst das resultierende lineare Gleichungssystem  $\mathbf{C}\mathbf{q}_R = \mathbf{k}$  nach  $\mathbf{q}_R$  auf. Wegen der positiven Definitheit ist  $\mathbf{C}$  invertierbar und es folgt

$$\mathbf{q}_R = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{k}. \quad (2.117)$$

Führt man nun die Abweichung  $\Delta \mathbf{q}$  von  $\mathbf{q}$  aus der Gleichgewichtslage (Ruhelage)  $\mathbf{q}_R$  ein, also  $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_R$ , dann folgt die Bewegungsgleichung (2.113) in der Form

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\Delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\Delta\mathbf{q} + \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{q}_R}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + \mathbf{b}f_L . \quad (2.118)$$

Das Ergebnis des vorigen Beispiels lässt sich insofern verallgemeinern, als jedes lineare Feder-Masse-Dämpfer System in der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{f}_e \quad (2.119)$$

mit dem Vektor der Lagekoordinaten  $\mathbf{q}$  (relativ bezogen auf die Gleichgewichtslage), der *symmetrischen, positiv definiten Massenmatrix*  $\mathbf{M}$ , der *symmetrischen, positiv semi-definiten Dämpfungsmatrix*  $\mathbf{D}$ , der *symmetrischen, positiv definiten Steifigkeitsmatrix*  $\mathbf{C}$ , der Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  sowie dem Vektor der externen Kräfte  $\mathbf{f}_e$  geschrieben werden kann.

Die im System gespeicherte Energie setzt sich aus der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.120)$$

und der in den Federn gespeicherten potentiellen Energie

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (2.121)$$

zusammen. Berechnet man nun die zeitliche Änderung der Gesamtenergie  $E = T + V$  entlang einer Lösungskurve von (2.119), dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E &= \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T (-\mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C} \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{f}_e) + \mathbf{q}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \mathbf{f}_e . \end{aligned} \quad (2.122)$$

Dabei gibt der erste Term  $-\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \leq 0$  die in den Dämpferelementen dissipierte Leistung an und der zweite Term  $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \mathbf{f}_e$  beschreibt die Energieflüsse zum oder vom System zufolge der externen Kräfte  $\mathbf{f}_e$ .

**Aufgabe 2.15.** Zeigen Sie, dass sich die Änderung der Gesamtenergie auch für das Feder-Masse-Dämpfer System nach (2.113) wie in (2.122) errechnet.

### 2.2.7 Körper mit veränderlicher Masse

Der Impulserhaltungssatz (2.60) gilt auch für Körper mit veränderlicher Masse  $m(t)$ . Angenommen der Körper habe zum Zeitpunkt  $t$  die Masse  $m(t)$ , die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  und es wirke auf ihn die Kraft  $\mathbf{f}$ . Stößt nun der Körper während des Zeitintervalls  $dt$  die Masse  $d\bar{m}$  mit der Ausstoßgeschwindigkeit  $\mathbf{w}$  aus, so hat der Körper zum Zeitpunkt  $t + dt$  die Masse  $m(t + dt) = m(t) - d\bar{m}$  und die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t + dt)$ . Der Impuls zum Zeitpunkt  $t$  lautet  $\mathbf{p}(t) = m(t)\mathbf{v}(t)$  und der Gesamtimpuls zum Zeitpunkt  $t + dt$  errechnet sich zu

$$\mathbf{p}(t + dt) = \underbrace{(m(t) - d\bar{m})}_{m(t+dt)} \underbrace{(\mathbf{v}(t) + d\mathbf{v})}_{\mathbf{v}(t+dt)} + d\bar{m}(\mathbf{v}(t) + d\mathbf{v} + \mathbf{w}(t)) = \mathbf{p}(t) + d\mathbf{p} \quad (2.123)$$

bzw.

$$d\mathbf{p} = m(t) d\mathbf{v} + d\bar{m}\mathbf{w}(t) . \quad (2.124)$$

Der Impulserhaltungssatz (2.60) lautet also

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = m(t)\frac{d}{dt}\mathbf{v} + \mathbf{w}(t)\frac{d}{dt}\bar{m} = \mathbf{f} . \quad (2.125)$$

Dabei beschreibt  $\frac{d}{dt}\bar{m} = \gamma > 0$  die *Ausstoßrate* bzw. mit  $m(t+dt) = m(t) + dm$  und damit

$$\frac{d}{dt}m = -\frac{d}{dt}\bar{m} = -\gamma \quad (2.126)$$

die Masseabnahme des Körpers durch die ausgestoßene Masse und der Ausdruck

$$\mathbf{f}_s = -\gamma\mathbf{w}(t) \quad (2.127)$$

wird als *Schubkraft* bezeichnet. Die Differentialgleichungen eines Körpers mit der veränderlichen Masse  $m(t)$  und der Ausstoßrate  $\gamma > 0$  können demnach wie folgt zusammengefasst werden

$$m(t)\frac{d}{dt}\mathbf{v} = \mathbf{f} - \gamma\mathbf{w}(t) \quad (2.128a)$$

$$\frac{d}{dt}m = -\gamma . \quad (2.128b)$$

**Aufgabe 2.16.** Berechnen Sie das mathematische Modell einer einstufigen Rakete mit der zeitlich veränderlichen Masse  $m(t) = m_0 - m_f(t)$ , wobei  $m_0$  das Gewicht der Rakete vor dem Start (Eigenmasse + Traglast + Treibstoffmenge) und  $m_f(t)$  die verbrannte Treibstoffmasse bezeichnen. Nehmen Sie an, dass die verbrannte Treibstoffmasse  $m_f(t)$  mit der Treibstoffausstoßrate  $\dot{m}_f(t) = u(t)$  mit der Relativgeschwindigkeit  $w > 0$  von der Rakete ausgestoßen wird und die Rakete sich exakt gegen das Schwerfeld der Erde mit der Gravitationskonstanten  $g$  bewegt.

**Lösung von Aufgabe 2.16.** Das mathematische Modell lautet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h &= v \\ \frac{d}{dt}v &= -g + \frac{w}{m}u(t) \\ \frac{d}{dt}m &= -u(t) \end{aligned}$$

mit der Höhe  $h(t)$  der Rakete gemessen von der Erdoberfläche, der Raketengeschwindigkeit  $v(t)$  und der Raketenmasse  $m(t)$ .

### 2.2.8 Drehimpulserhaltung

In (2.37) wurde gezeigt, dass sich das Moment  $\boldsymbol{\tau}^{(0)}$  einer Kraft  $\mathbf{f}$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}$  in der Form  $\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$  berechnet. Betrachtet man nun eine Punktmasse mit der Masse  $m$ , dem Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  vom Ursprung des Inertialsystems ( $0xyz$ ) und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ , dann ist der *Drehimpuls* in der Form

$$\mathbf{l}^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (2.129)$$

definiert. Bildet man für beide Seiten des Impulserhaltungssatzes (2.60) das Kreuzprodukt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}$ , so erhält man

$$\mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \boldsymbol{\tau}^{(0)}. \quad (2.130)$$

Mit

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \underbrace{\frac{d}{dt}\mathbf{r} \times \mathbf{p}}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{p} \quad (2.131)$$

folgt aus (2.130) der *Drehimpulserhaltungssatz (Drallsatz)* zu

$$\frac{d}{dt}\mathbf{l}^{(0)} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}^{(0)}, \quad (2.132)$$

d. h., die zeitliche Änderung des Drehimpulses  $\mathbf{l}^{(0)}$  bezüglich eines *beliebigen raumfesten* Punktes 0 ist gleich dem Drehmoment  $\boldsymbol{\tau}^{(0)}$  der an der Punktmasse angreifenden Summenkraft  $\mathbf{f}$  bezüglich desselben Punktes 0.

*Beispiel 2.13.* Zeigt bei einer Bewegung der Kraftvektor stets auf einen Punkt 0 (das Zentrum) hin, dann spricht man von einer *Zentralbewegung*. Dies ist beispielsweise bei der Planetenbewegung der Fall, wobei die Sonne das Zentrum bildet. Da bei einer Zentralbewegung das Moment  $\boldsymbol{\tau}^{(0)}$  bezüglich des Zentrums verschwindet, muss nach (2.132) der Drehimpuls  $\mathbf{l}^{(0)}$  konstant sein.

Die vom Ortsvektor  $\mathbf{r}$  in der Zeit  $dt$  überstrichene Fläche kann mit dem Flächenvektor  $d\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{n}_A dA = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$  beschrieben werden, wobei  $\mathbf{n}_A$  den Normalvektor und  $dA = \frac{1}{2}\|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}\|_2$  die zugehörige Größe des Flächenelements beschreibt. Führt man nun die so genannte *vektorielle Flächengeschwindigkeit*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}^{(0)} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (2.133)$$

ein, so lässt sich der Drehimpuls (2.129) auch in der Form

$$\mathbf{l}^{(0)} = 2m \frac{d}{dt}\mathbf{A}^{(0)} \quad (2.134)$$

schreiben.

Aus  $\mathbf{l}^{(0)} = \text{konstant}$  folgt damit für eine Zentralbewegung nach (2.134), dass auch die Flächengeschwindigkeit  $\frac{d}{dt}\mathbf{A}^{(0)}$  konstant ist. Diese Aussage entspricht dem *zweiten*

*Keplerschen Gesetz.* Dieses besagt, dass ein von der Sonne zum Planeten gezogener „Fahrstrahl“ in gleichen Zeiten gleich große Flächen überstreicht, siehe Abbildung 2.35.

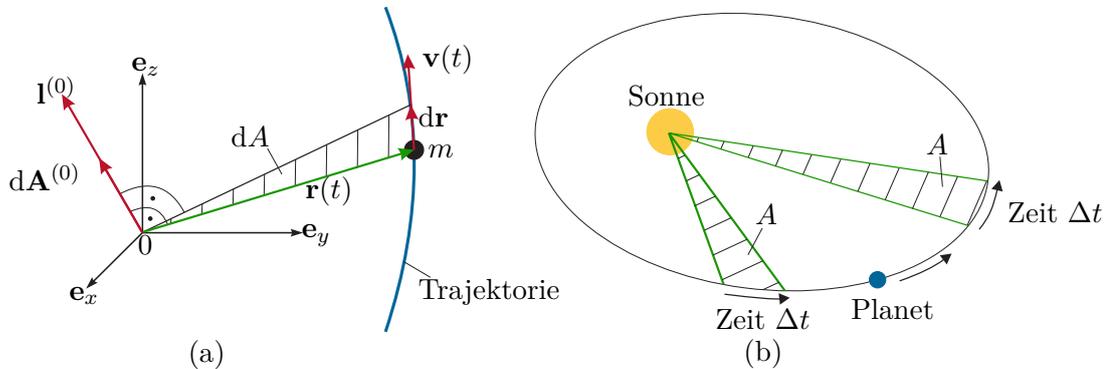


Abbildung 2.35: Zur Drehimpulserhaltung (a) und zum zweiten Keplerschen Gesetz (b).

*Beispiel 2.14.* Man betrachte das mathematische Pendel von Abbildung 2.36 mit der Punktmasse  $m$  und dem masselosen starren Pendel der Länge  $l$  unter dem Einfluss der Gravitation mit der Erdbeschleunigung  $g$  in negativer  $e_z$ -Richtung.

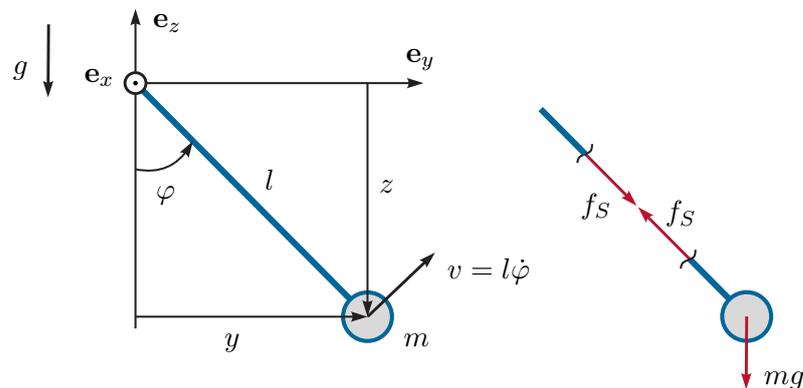


Abbildung 2.36: Mathematisches Pendel.

Schneidet man das Pendel auf und führt die Schnittkraft  $f_S$  ein, so lautet der Impulserhaltungssatz für die Masse  $m$

$$e_y : m\ddot{y} = -f_S \sin(\varphi) \quad (2.135a)$$

$$e_z : m\ddot{z} = -mg + f_S \cos(\varphi) . \quad (2.135b)$$

Setzt man nun die Beziehungen

$$y = l \sin(\varphi), \quad \dot{y} = l \cos(\varphi) \dot{\varphi}, \quad \ddot{y} = -l \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \cos(\varphi) \ddot{\varphi} \quad (2.136a)$$

$$z = -l \cos(\varphi), \quad \dot{z} = l \sin(\varphi) \dot{\varphi}, \quad \ddot{z} = l \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \sin(\varphi) \ddot{\varphi} \quad (2.136b)$$

in (2.135) ein, so erhält man

$$m(-l \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \cos(\varphi) \ddot{\varphi}) = -f_S \sin(\varphi) \quad (2.137a)$$

$$m(l \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + l \sin(\varphi) \ddot{\varphi}) = -mg + f_S \cos(\varphi). \quad (2.137b)$$

Aus den beiden Gleichungen (2.137) lassen sich nun eine Differentialgleichung für  $\varphi$

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin(\varphi) \quad (2.138)$$

und die Schnittkraft  $f_S$  in der Form

$$f_S = mg \cos(\varphi) + ml \dot{\varphi}^2 \quad (2.139)$$

berechnen. Die Differentialgleichung (2.138) kann man auch direkt über den Drehimpulserhaltungssatz (2.132) bezüglich des Ursprungs 0 des Koordinatensystems (0xyz) erhalten. Der zugehörige Drehimpuls  $\mathbf{l}^{(0)}$  gemäß (2.129) lautet (siehe auch Abbildung 2.36)

$$\mathbf{l}^{(0)} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ l \sin(\varphi) \\ -l \cos(\varphi) \end{bmatrix} \times m \begin{bmatrix} 0 \\ l \dot{\varphi} \cos(\varphi) \\ l \dot{\varphi} \sin(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml^2 \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

und damit folgt der Drehimpulserhaltungssatz bezüglich der  $\mathbf{e}_x$ -Achse zu

$$\frac{d}{dt} l_x^{(0)} = ml^2 \ddot{\varphi} = \tau_x^{(0)} = -mgl \sin(\varphi). \quad (2.141)$$

Die Größe

$$\theta^{(0)} = ml^2 \quad (2.142)$$

wird auch als *Massenträgheitsmoment* bezeichnet.

Das vorige Beispiel lässt sich nun einfach auf die Rotation eines Starrkörpers mit der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega = \dot{\varphi}$  um eine feste Drehachse  $\mathbf{e}_\omega$  (im vorliegenden Fall  $\mathbf{e}_\omega = \mathbf{e}_z$ ) erweitern, siehe Abbildung 2.37. Schreibt man für ein Massenelement  $dm = \rho(x, y, z) dV$  mit dem Volumenelement  $dV$  und der Dichte  $\rho(x, y, z)$ , welches sich im Abstand  $r(x, y, z)$  von der Drehachse befindet, die zeitliche Änderung des Drehimpulses um die Drehachse mit

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -r \sin(\varphi) \omega \\ r \cos(\varphi) \omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

an, so erhält man

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times dm\mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -z dm r \cos(\varphi) \omega \\ -z dm r \sin(\varphi) \omega \\ r^2 dm \omega \end{bmatrix}. \quad (2.144)$$

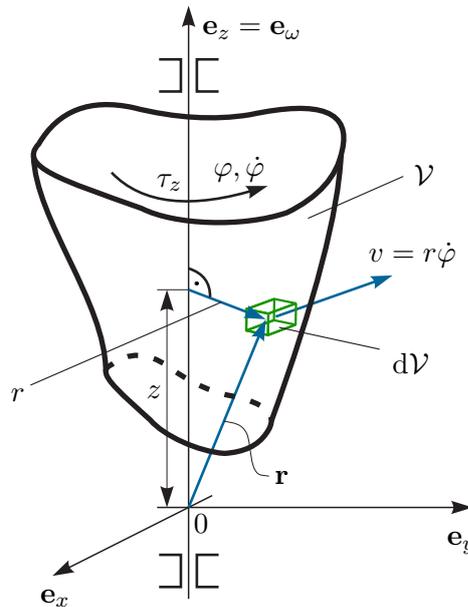


Abbildung 2.37: Zum Massenträgheitsmoment.

Für die Beschreibung der Drehung um die Drehachse  $\mathbf{e}_\omega$  ist im Weiteren nur der entsprechende Anteil von (2.144) um diese Achse von Interesse, d. h. der Anteil

$$\mathbf{e}_\omega \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times d\mathbf{m}\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}r^2 dm\omega. \quad (2.145)$$

Durch Integration von (2.145) über das gesamte Starrkörpervolumen  $\mathcal{V}$  folgt der *Momentensatz* zu

$$\theta_{zz}\dot{\omega} = \theta_{zz}\dot{\varphi} = \tau_z \quad (2.146)$$

mit dem um die  $\mathbf{e}_z$ -Achse wirkenden äußeren Gesamtdrehmoment  $\tau_z$  und dem Massenträgheitsmoment

$$\theta_{zz} = \int_{\mathcal{V}} r^2 dm = \int_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2) dm. \quad (2.147)$$

Die in der rotierenden Masse gespeicherte *rotatorische kinetische Energie* lautet

$$T_r = \frac{1}{2}\theta_{zz}\dot{\varphi}^2. \quad (2.148)$$

**Beispiel 2.15.** Das Massenträgheitsmoment eines Zylinders mit dem Radius  $R$ , der konstanten Dichte  $\rho$  und der Länge  $l$  lautet (siehe Abbildung 2.38)

$$\theta_{zz} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \rho r dr d\varphi dz = \rho \frac{R^4 \pi}{2} l = \frac{1}{2} m R^2. \quad (2.149)$$

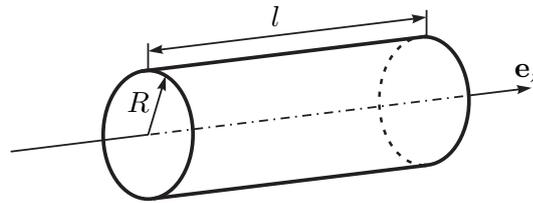


Abbildung 2.38: Zum Massenträgheitsmoment eines Zylinders.

**Aufgabe 2.17.** Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment  $\theta$  einer homogenen Kugel mit dem Radius  $R$  und der Dichte  $\rho$  bezüglich einer Achse durch den Kugelmittelpunkt.

**Lösung von Aufgabe 2.17.**

$$\theta = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5}mR^2 \quad (2.150)$$

Im Weiteren betrachte man den Starrkörper von Abbildung 2.39. Der Ursprung  $S$  des

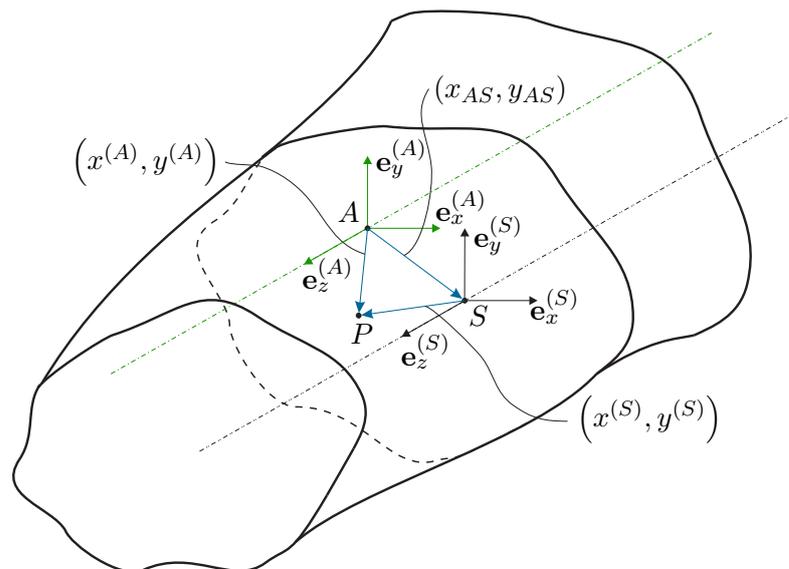


Abbildung 2.39: Zum Satz von Steiner.

Koordinatensystems  $(Sx^{(S)}y^{(S)}z^{(S)})$  beschreibt dabei den Schwerpunkt des Körpers (siehe auch (2.55)) und über die Beziehung

$$\theta_{zz}^{(S)} = \int_{\mathcal{V}} (r^{(S)})^2 dm = \int_{\mathcal{V}} \left( (x^{(S)})^2 + (y^{(S)})^2 \right) dm \quad (2.151)$$

kann das Massenträgheitsmoment um die  $\mathbf{e}_z^{(S)}$ -Achse errechnet werden. Möchte man nun das Massenträgheitsmoment  $\theta_{zz}^{(A)}$  desselben Körpers bezüglich der parallelen  $\mathbf{e}_z^{(A)}$ -Achse

des Koordinatensystems  $(Ax^{(A)}y^{(A)}z^{(A)})$  berechnen (siehe Abbildung 2.39), dann folgt

$$\theta_{zz}^{(A)} = \int_{\mathcal{V}} (r^{(A)})^2 dm = \int_{\mathcal{V}} \left( (x^{(A)})^2 + (y^{(A)})^2 \right) dm \quad (2.152)$$

bzw. mit  $x^{(A)} = x_{AS} + x^{(S)}$  und  $y^{(A)} = y_{AS} + y^{(S)}$  erhält man

$$\begin{aligned} \theta_{zz}^{(A)} &= \int_{\mathcal{V}} \left( (x_{AS})^2 + (y_{AS})^2 \right) dm + 2 \int_{\mathcal{V}} \left( x_{AS}x^{(S)} + y_{AS}y^{(S)} \right) dm \\ &\quad + \int_{\mathcal{V}} \left( (x^{(S)})^2 + (y^{(S)})^2 \right) dm \\ &= \left( (x_{AS})^2 + (y_{AS})^2 \right) m + 2x_{AS} \underbrace{\int_{\mathcal{V}} x^{(S)} dm}_{=0} + 2y_{AS} \underbrace{\int_{\mathcal{V}} y^{(S)} dm}_{=0} + \theta_{zz}^{(S)}. \end{aligned} \quad (2.153)$$

Gleichung (2.153) zeigt, dass sich das Massenträgheitsmoment  $\theta_{zz}^{(A)}$  bezüglich der  $\mathbf{e}_z^{(A)}$ -Achse aus der Summe des Massenträgheitsmoments  $\theta_{zz}^{(S)}$  um die  $\mathbf{e}_z^{(S)}$ -Achse durch den Schwerpunkt  $S$  und der Multiplikation aus der Gesamtmasse  $m$  mit dem quadratischen Abstand  $(x_{AS})^2 + (y_{AS})^2$  von der Achse  $\mathbf{e}_z^{(A)}$  zur Achse  $\mathbf{e}_z^{(S)}$  ergibt. Dieser Zusammenhang ist in der Literatur auch unter dem Namen *Satz von Steiner* zu finden.

*Beispiel 2.16.* Abbildung 2.40 zeigt einen Starrkörper bestehend aus vier symmetrisch angeordneten Vollzylindern jeweils mit der Masse  $m$  und dem Radius  $R$ , deren Mittelpunkte sich im Abstand  $H$  von der Drehachse  $\mathbf{e}_z$  befinden.

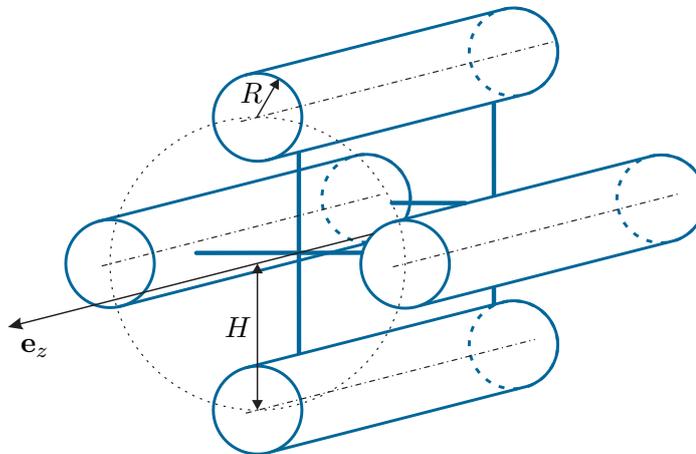


Abbildung 2.40: Starrkörper aus vier symmetrischen Zylindern.

Es sei angenommen, dass die Verbindungsstege zwischen den Zylindern masselos sind. Das Massenträgheitsmoment eines Vollzylinders bezüglich der  $\mathbf{e}_z$ -Achse durch den Schwerpunkt lautet gemäß (2.149)  $\theta_{zz}^{(S)} = \frac{1}{2}mR^2$ . Nach dem Satz von Steiner erhält

man somit für das Massenträgheitsmoment des Gesamtkörpers

$$\theta_{zz} = 4\frac{1}{2}mR^2 + 4H^2m = 2m(R^2 + 2H^2). \quad (2.154)$$

*Beispiel 2.17.* Abbildung 2.41 zeigt einen reibungsfrei gelagerten, quaderförmigen Pendelstab mit der homogenen Dichte  $\rho_S$  und den geometrischen Abmessungen Länge  $l_S$ , Breite  $b_S$  und Höhe  $h_S$ .

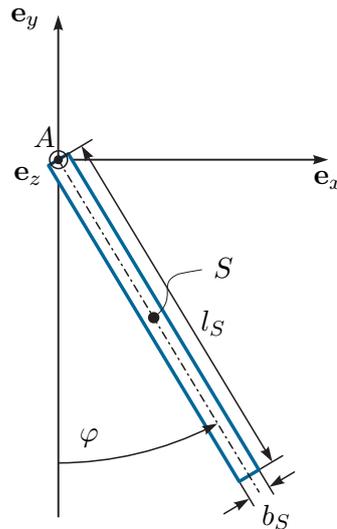


Abbildung 2.41: Pendelstab.

Zur Berechnung der kinetischen Energie sollen in weiterer Folge zwei Varianten vorgestellt werden. In der ersten Variante berechnet man das Massenträgheitsmoment des Pendelstabes  $\theta_{S,zz}^{(A)}$  um die Drehachse ( $e_z$ -Achse)

$$\theta_{S,zz}^{(A)} = \rho_S \int_{-h_S/2}^{h_S/2} \int_{-l_S}^0 \int_{-b_S/2}^{b_S/2} (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho_S \left( \frac{1}{3} l_S^3 b_S h_S + \frac{1}{12} b_S^3 l_S h_S \right) \quad (2.155)$$

und damit errechnet sich die kinetische Energie gemäß (2.148) zu

$$T = \frac{1}{2} \theta_{S,zz}^{(A)} \dot{\varphi}^2. \quad (2.156)$$

Bei der zweiten Variante stellt man vorerst den Ortsvektor  $\mathbf{r}_S$  vom Ursprung 0 des Inertialsystems ( $Oxyz$ ) zum Schwerpunkt  $S$  des Pendelstabes auf

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} l_S/2 \sin(\varphi) \\ -l_S/2 \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

und berechnet den translatorischen Anteil der kinetischen Energie gemäß (2.81) zu

$$T_t = \frac{1}{2} m_S \dot{\mathbf{r}}_S^T \dot{\mathbf{r}}_S = \frac{1}{2} m_S \frac{l_S^2}{4} \dot{\varphi}^2 \quad (2.158)$$

mit der Pendelmasse  $m_S = \rho_S l_S b_S h_S$ . Wenn man nun den translatorischen Anteil der kinetischen Energie  $T_t$  um den rotatorischen Anteil der kinetischen Energie gemäß (2.148) ergänzt, muss man beachten, dass nun das Massenträgheitsmoment  $\theta_{S,zz}^{(S)}$  bezüglich des Schwerpunktes  $S$  (also bezüglich einer Drehachse parallel zur  $\mathbf{e}_z$ -Achse durch den Schwerpunkt  $S$ ) berechnet werden muss

$$\theta_{S,zz}^{(S)} = \rho_S \int_{-h_S/2}^{h_S/2} \int_{-l_S/2}^{l_S/2} \int_{-b_S/2}^{b_S/2} (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho_S \left( \frac{1}{12} l_S^3 b_S h_S + \frac{1}{12} b_S^3 l_S h_S \right) \quad (2.159)$$

und damit der rotatorische Anteil der kinetischen Energie zu

$$T_r = \frac{1}{2} \theta_{S,zz}^{(S)} \dot{\varphi}^2 \quad (2.160)$$

folgt. Die kinetische Energie des Pendelstabes lautet demnach

$$\begin{aligned} T &= T_t + T_r \\ &= \frac{1}{8} \rho_S b_S h_S l_S^3 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \rho_S \left( \frac{1}{12} l_S^3 b_S h_S + \frac{1}{12} b_S^3 l_S h_S \right) \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left( \frac{1}{3} \rho_S b_S h_S l_S^3 + \frac{1}{12} \rho_S b_S^3 l_S h_S \right)}_{=\theta_{S,zz}^{(A)}} \dot{\varphi}^2 . \end{aligned} \quad (2.161)$$

Es sei angemerkt, dass der Zusammenhang

$$\theta_{S,zz}^{(A)} = \theta_{S,zz}^{(S)} + m_S \frac{l_S^2}{4} \quad (2.162)$$

gerade dem Satz von Steiner entspricht, siehe (2.153).

Generell ist zu beachten, dass bei der Berechnung der kinetischen Energie als Summe aus einem translatorischen und einem rotatorischen Anteil das Massenträgheitsmoment immer bezüglich der in den Schwerpunkt parallel verschobenen Drehachse zu verwenden ist. Dies ist insbesondere in weiterer Folge bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichungen von essentieller Bedeutung!

*Beispiel 2.18.* Als Beispiel betrachte man den Antriebsstrang von Abbildung 2.42.

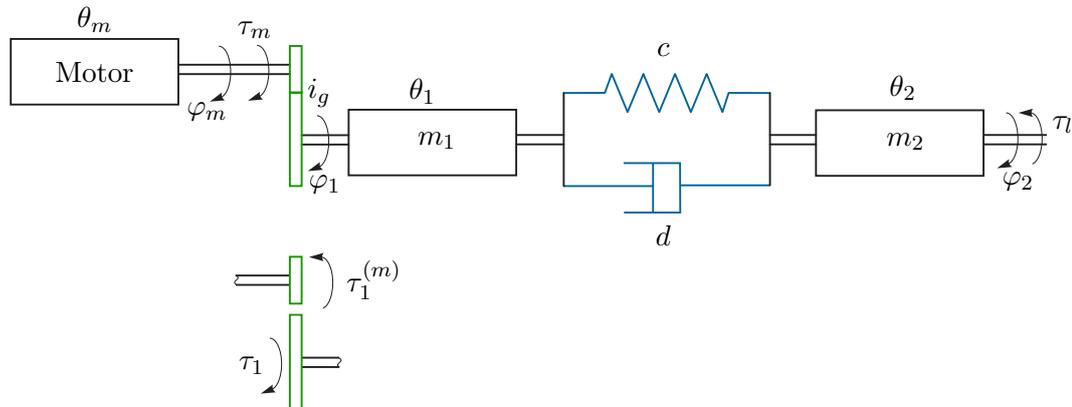


Abbildung 2.42: Antriebsstrang.

Ein Motor mit dem Massenträgheitsmoment  $\theta_m$  erzeugt ein Drehmoment  $\tau_m$  und treibt über ein verlustloses Getriebe mit der Getriebeübersetzung  $i_g$  (Verhältnis von Antriebsdrehzahl zu Abtriebsdrehzahl)

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{i_g} \dot{\varphi}_m, \quad (2.163)$$

eine Masse mit dem Massenträgheitsmoment  $\theta_1$  an.

Diese Masse ist über eine lineare Drehfeder mit der Federkonstanten  $c > 0$  und einem drehwinkelgeschwindigkeitsproportionalen Drehdämpfer mit der Dämpferkonstanten  $d > 0$  mit einer weiteren Masse mit dem Massenträgheitsmoment  $\theta_2$  verbunden, auf die das Lastmoment  $\tau_l$  wirkt. Schneidet man das Getriebe auf (siehe Abbildung 2.42), so wirkt auf der Primärseite das Drehmoment  $\tau_1^{(m)}$ . Da das Getriebe als verlustlos angenommen wurde, wirkt zufolge der Getriebeübersetzung auf der Abtriebsseite das Drehmoment

$$\tau_1 \dot{\varphi}_1 = \tau_1^{(m)} \dot{\varphi}_m \quad \text{bzw.} \quad \tau_1 = \tau_1^{(m)} i_g. \quad (2.164)$$

Wendet man nun für die beiden Massen und den Motor getrennt den Drehimpulserhaltungssatz (2.132) an, so folgt

$$\theta_m \ddot{\varphi}_m = \tau_m - \tau_1^{(m)} \quad (2.165a)$$

$$\theta_1 \ddot{\varphi}_1 = \tau_1 - c(\varphi_1 - \varphi_2) - d(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \quad (2.165b)$$

$$\theta_2 \ddot{\varphi}_2 = c(\varphi_1 - \varphi_2) + d(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \tau_l \quad (2.165c)$$

bzw. durch Elimination von  $\tau_1^{(m)}$ ,  $\tau_1$  und  $\varphi_m$  folgt

$$\tau_1 = \tau_1^{(m)} i_g = \tau_m i_g - \theta_m i_g^2 \ddot{\varphi}_1 \quad (2.166)$$

und

$$(\theta_1 + i_g^2 \theta_m) \ddot{\varphi}_1 = \tau_m i_g - c(\varphi_1 - \varphi_2) - d(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \quad (2.167a)$$

$$\theta_2 \ddot{\varphi}_2 = c(\varphi_1 - \varphi_2) + d(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \tau_l. \quad (2.167b)$$

In Matrixschreibweise lässt sich (2.167) gemäß (2.119) kompakt in der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{b}_e \tau_l + \mathbf{b}_u \tau_m \quad (2.168)$$

mit  $\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2]^T$ ,  $\mathbf{M} = \text{diag}(\theta_1 + i_g^2 \theta_m, \theta_2)$  und

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d & -d \\ -d & d \end{bmatrix}, \mathbf{b}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_u = \begin{bmatrix} i_g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.169)$$

angeben.

**Aufgabe 2.18.** Eine Kugel der Masse  $m$  mit dem Radius  $R$  rollt eine schiefe Ebene hinab, siehe Abbildung 2.43. Geben Sie die Bewegungsgleichung für  $\varphi$  unter Vernachlässigung der Rollreibung an und bestimmen Sie den Haftreibungskoeffizienten  $\mu_H$ , für den ein Rollen möglich ist.

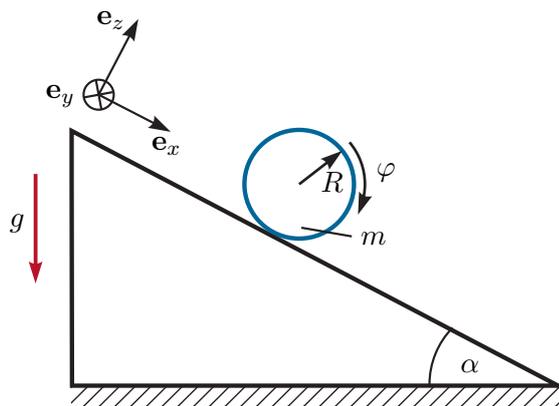


Abbildung 2.43: Rollende Kugel.

*Lösung von Aufgabe 2.18.*

$$\ddot{\varphi} = \frac{5}{7R} g \sin(\alpha) \quad \text{für} \quad \mu_H \geq \frac{2}{7} \tan(\alpha)$$

**Hinweis:** Schneiden Sie die Kugel frei und stellen Sie den Impulserhaltungssatz in  $\mathbf{e}_x$ - und  $\mathbf{e}_z$ -Richtung des eingezeichneten Koordinatensystems sowie den Drehimpulserhaltungssatz um den Kugelmittelpunkt auf.

## 2.3 Euler-Lagrange Gleichungen

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das zweite Newtonsche Gesetz (2.60) angewandt auf ein Teilchen der Masse (Punktmasse)  $m$  in dem kartesischen Inertialkoordinatensystem  $(0xyz)$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}, \quad (2.170)$$

wobei  $\mathbf{f} = [f_x \ f_y \ f_z]^T$  die Summe aller auf die Punktmasse wirkenden Kräfte und  $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$  den Positionsvektor vom Koordinatenursprung  $0$  zum Teilchen bezeichnet. Die Lage einer Punktmasse, deren Bewegung keinen Zwängen unterliegt, ist durch die Angabe der drei translatorischen Verschiebungen bezüglich des Inertialkoordinatensystems eindeutig bestimmt. Man sagt dann auch, die *Punktmasse besitzt 3 Freiheitsgrade*. Im Gegensatz dazu wird die Konfiguration eines frei beweglichen *Starrkörpers* durch *6 Freiheitsgrade* beschrieben, nämlich 3 Freiheitsgrade für die translatorische Verschiebung und 3 Freiheitsgrade der Rotation zur Beschreibung der Orientierung des Starrkörpers zum Inertialsystem. Nun unterliegt die Bewegung eines Starrkörpersystems im Allgemeinen *Zwangsbedingungen*, die mit in Betracht gezogen werden müssen. Man betrachte dazu beispielsweise die Bewegung einer Masse auf einer schiefen Ebene gemäß Abbildung 2.44(a) mit der Zwangsbedingung  $y = a(1 - x/b)$  oder das sphärische Pendel gemäß Abbildung 2.44(b) mit der Zwangsbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \quad (2.171)$$

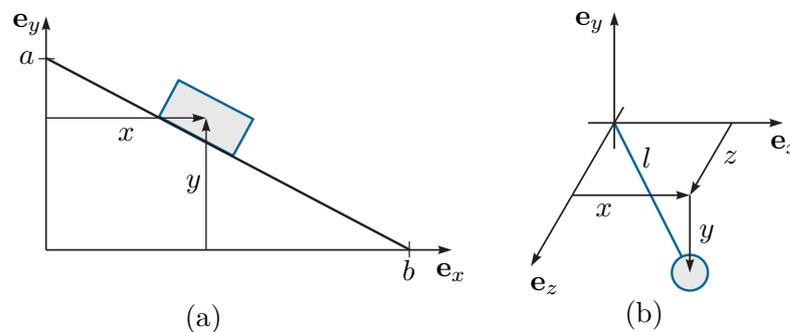


Abbildung 2.44: Zu den Zwangsbedingungen.

Zwei Masseteilchen  $i$  und  $j$  eines Starrkörpers, die durch eine Linie der festen Länge  $l_{ij}$  miteinander verbunden werden können, erfüllen die Zwangsbedingung  $\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|_2^2 = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = l_{ij}^2$ . Lässt sich eine Zwangsbedingung in der Form

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0 \quad (2.172)$$

ausdrücken, dann spricht man von einer *holonomen* Zwangsbedingung. Zwangsbedingungen, die nicht in dieser Art darstellbar sind, werden als *nichtholonom* bezeichnet. Dazu zählen unter anderem Ungleichungsbedingungen

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) \geq 0, \quad (2.173)$$

wie sie beispielsweise bei der Bewegung eines Partikels in einer Hohlkugel mit dem Radius  $a$  in der Form  $a^2 - \|\mathbf{r}\|_2^2 \geq 0$  auftreten. Auch Zwangsbedingungen, die explizit von der Geschwindigkeit abhängen und nicht integrabel sind, d. h.,

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, t) = 0, \quad (2.174)$$

sind nichtholonom. In manchen Literaturstellen werden Zwangsbedingungen gemäß (2.172) und (2.174) auch als *geometrische* und *kinematische Zwangsbedingungen* klassifiziert. Ein typischer Fall für eine nichtholonome (kinematische) Zwangsbedingung ist das Rollen einer Scheibe auf einer Ebene.

Man überzeugt sich nun leicht, dass ein System von  $N$  Punktmassen, das frei von Zwang ist,  $3N$  unabhängige Koordinaten oder Freiheitsgrade besitzt. Existieren nun beispielsweise  $(3N - n)$  holonome Zwangsbedingungen der Form

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad j = 1, \dots, (3N - n), \quad (2.175)$$

dann ist unmittelbar einsichtig, dass

- (A) die Koordinaten nicht mehr linear unabhängig voneinander sind und
- (B) zur Einhaltung der Zwangsbedingungen entsprechende Zwangskräfte auftreten müssen, die a priori nicht bekannt sind.

Mit Hilfe der  $(3N - n)$  holonomen Zwangsbedingungen ist es nun möglich,  $(3N - n)$  der  $3N$  Koordinaten zu eliminieren bzw.  $n$  neue unabhängige Koordinaten  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  einzuführen, durch die sämtliche (alte) Koordinaten in der Form

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = \mathbf{r}_j(\mathbf{q}, t), \quad j = 1, \dots, N \quad (2.176)$$

ausgedrückt werden können. Man sagt dann auch, das System besitzt  $n$  *Freiheitsgrade* und die  $n$  neuen unabhängigen Koordinaten  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  bzw.  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$  werden als *generalisierte Koordinaten* bezeichnet.

Zerlegt man gemäß (B) die auf die Masseteilchen wirkenden Kräfte  $\mathbf{f}_i$  in *eingeprägte Kräfte*  $\mathbf{f}_i^{(e)}$  und *Zwangskräfte*  $\mathbf{f}_i^{(z)}$ , dann lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen (2.170) für das System von  $N$  Punktmassen

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i^{(e)} + \mathbf{f}_i^{(z)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.177)$$

Man beachte, dass durch (2.175) und (2.177) lediglich  $(6N - n)$  Gleichungen zur Bestimmung der  $6N$  Unbekannten  $\mathbf{r}_i$  und  $\mathbf{f}_i^{(z)}$ ,  $i = 1, \dots, N$  zur Verfügung stehen. Betrachtet man beispielsweise die reibungsfrei gleitende Masse auf der schiefen Ebene gemäß Abbildung 2.45(a), dann hat man für die unbekanntenen Größen  $x$ ,  $y$  sowie  $f_x^{(z)}$ ,  $f_y^{(z)}$  zwei Bewegungsgleichungen und eine Zwangsbedingung. Die fehlende Gleichung ist durch die Tatsache gegeben, dass die Zwangskraft  $\mathbf{f}^{(z)}$  senkrecht zur schiefen Ebene steht. Generell erhält man die fehlenden Gleichungen aus dem *Prinzip der virtuellen Arbeit*, welches besagt, dass die *Summe der durch die Zwangskräfte verrichteten Arbeit gleich Null ist*. Man beachte aber, dass diese Aussage nicht gültig ist, wenn die Zwangsbedingungen zeitabhängig sind, also

z. B. die schiefe Ebene sich mit der Zeit verändert. Aus diesem Grund führt man den Begriff der *virtuellen Verschiebung* eines Systems ein. Dabei wird das System zu einem Zeitpunkt  $t$  festgehalten und in diesem festgehaltenen Zustand wird anschließend eine willkürliche infinitesimale Verschiebung  $\delta \mathbf{r}_i$ , die mit den Zwangsbedingungen (2.172) konsistent ist, durchgeführt. Beispielsweise für das sphärische Pendel von Abbildung 2.45(b) bedeutet dies, dass folgende Beziehung

$$(x + \delta x)^2 + (y + \delta y)^2 + (z + \delta z)^2 = l^2 \quad (2.178)$$

erfüllt sein muss. Unter Berücksichtigung von (2.171) und unter Vernachlässigung von Termen zweiter Ordnung, d. h.  $(\delta x)^2 = (\delta y)^2 = (\delta z)^2 = 0$ , folgt (2.178) zu

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0. \quad (2.179)$$

Das *Prinzip der virtuellen Arbeit* besagt nun, dass die Summe der durch die Zwangskräfte

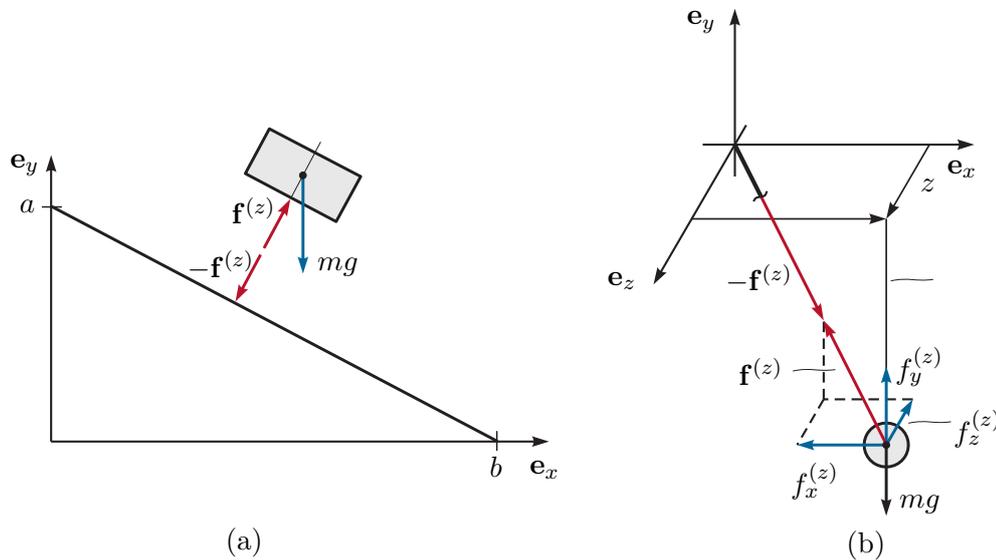


Abbildung 2.45: Zu den Zwangskräften.

$\mathbf{f}_i^{(z)}$  verrichteten Arbeit  $\delta W^{(z)}$  bei einer virtuellen Verschiebung gleich Null ist, d. h. für das System von  $N$  Punktmassen gilt

$$\delta W^{(z)} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i^{(z)})^T \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (2.180)$$

Betrachtet man wiederum das sphärische Pendel von Abbildung 2.45(b), so muss gemäß (2.180) offensichtlich die Bedingung

$$f_x^{(z)} \delta x + f_y^{(z)} \delta y + f_z^{(z)} \delta z = 0 \quad (2.181)$$

erfüllt sein. Löst man nun unter der Annahme  $z \neq 0$  (2.179) nach  $\delta z$  auf und setzt dies in (2.181) ein, so folgt

$$\left( f_x^{(z)} - \frac{x}{z} f_z^{(z)} \right) \delta x + \left( f_y^{(z)} - \frac{y}{z} f_z^{(z)} \right) \delta y = 0 \quad (2.182)$$

bzw. wegen der linearen Unabhängigkeit von  $\delta x$  und  $\delta y$  müssen die Bedingungen

$$f_x^{(z)} = \frac{x}{z} f_z^{(z)} \quad \text{und} \quad f_y^{(z)} = \frac{y}{z} f_z^{(z)} \quad (2.183)$$

gelten. Dies bedeutet aber, dass die Zwangskraft  $\mathbf{f}^{(z)} = \begin{bmatrix} f_x^{(z)} & f_y^{(z)} & f_z^{(z)} \end{bmatrix}^T$  in Richtung des masselosen Stabes der Länge  $l$  zeigen muss, vergleiche dazu Abbildung 2.45(b). Auf analoge Art und Weise kann man zeigen, dass die Zwangskraft bei der reibungsfrei gleitenden Masse auf der schiefen Ebene senkrecht auf die Ebene steht (Abbildung 2.45(a)).

Häufig ist man an den Zwangskräften nicht interessiert, weshalb man diese aus (2.177) berechnet und in (2.180) einsetzt. Man erhält dann das sogenannte *D'Alembertsche Prinzip* in der Form

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{f}_i^{(e)})^T \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (2.184)$$

Nimmt man nun an, dass das System  $n$  Freiheitsgrade besitzt und gemäß (2.176) durch die generalisierten Koordinaten  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  beschrieben werden kann, dann gilt für die virtuelle Verschiebung (man beachte, dass bei der virtuellen Verschiebung die Zeit  $t$  konstant gehalten wird)

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.185)$$

und (2.184) folgt zu

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n f_{q,j} \delta q_j \quad (2.186)$$

mit

$$f_{q,j} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i^{(e)})^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.187)$$

Dabei bezeichnet  $f_{q,j}$ ,  $j = 1, \dots, n$  eine Komponente der *generalisierten Kraft*  $\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} f_{q,1} & f_{q,2} & \dots & f_{q,n} \end{bmatrix}^T$ , die nicht notwendigerweise die Dimension einer Kraft aufweisen muss, da auch die zugehörige generalisierte Koordinate  $q_j$  nicht unbedingt die Dimension einer Länge hat (deshalb auch der Name generalisiert). Das Produkt  $\dot{q}_j f_{q,j}$  muss aber auf jeden Fall eine Leistung ergeben.

Wendet man die Produktregel der Differentiation auf die linke Seite von (2.186) an, so erhält man

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{d}{dt} \left[ m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] - m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right). \quad (2.188)$$

Unter Verwendung der Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_i$

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (2.189)$$

bzw.

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \quad (2.190)$$

folgt (2.188) zu

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{d}{dt} \left[ m_i \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] - m_i \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (2.191)$$

mit der *kinetischen Energie*  $T$  gemäß (2.80)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i . \quad (2.192)$$

Setzt man (2.191) in (2.186) ein, dann ergibt sich

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - f_{q,j} \right) \delta q_j = 0 . \quad (2.193)$$

Da die virtuellen Verschiebungen  $\delta q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  unabhängig voneinander sind, erhält man unmittelbar  $n$  gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung (*Euler-Lagrange Gleichungen*), die die Bewegung des Systems beschreiben

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = f_{q,j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.194)$$

mit den *generalisierten Koordinaten*  $q_j$  und den *generalisierten Geschwindigkeiten*  $\dot{q}_j$ . Schreibt man die generalisierten Kräfte  $\mathbf{f}_q$  als Summe von generalisierten Kräften, die aus einer *skalaren Potentialfunktion*  $V(\mathbf{q})$  hergeleitet werden können (siehe (2.88) und (2.89)), und aus extern eingepprägten generalisierten Kräften sowie dissipativen generalisierten Kräften (siehe Abschnitt 2.2.5), zusammengefasst im Vektor  $\mathbf{f}_{np}$ , d. h.

$$f_{q,j} = f_{np,j} - \frac{\partial}{\partial q_j} V , \quad (2.195)$$

dann können die Euler-Lagrange Gleichungen (2.194) in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = f_{np,j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.196)$$

mit der *Lagrange-Funktion*  $L = T - V$  (Lagrange-Funktion = kinetische Energie minus potentielle Energie) formuliert werden.

Für  $f_{np,j} = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  in (2.196) spricht man auch von einem *konservativen System*, ein System, bei dem sich die Gesamtenergie  $E = T + V$  zufolge der Bewegung nicht ändert bzw. keine Dissipation im System auftritt.

**Bemerkung 2.1.** Die Euler-Lagrange Gleichungen (2.196) führen auch dann noch zu den richtigen Bewegungsgleichungen, wenn die generalisierten Kräfte nicht aus einem Potential der Form  $V(\mathbf{q})$  herrühren, sondern aus einem generalisierten Potential  $\bar{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , das folgende Bedingung

$$f_{q,j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} \bar{V} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \bar{V} \right) \quad (2.197)$$

erfüllt. Dies ist beispielsweise der Fall bei der Beschreibung elektromagnetischer Kräfte auf bewegte Ladungen.

**Bemerkung 2.2.** Die Euler-Lagrange Gleichungen (2.194) lassen sich auch über ein Variationsprinzip, dem *Hamiltonschen Prinzip*, herleiten. Dieses besagt in seiner integralen Formulierung für konservative Systeme, dass die Bewegung eines Systems zwischen den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  so erfolgt, dass das Linienintegral  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$  mit  $L = T - V$  für die durchlaufene Bahn ein Extremum ist bzw. die Variation des Integrals verschwindet. Wenngleich an dieser Stelle nicht näher darauf eingegangen wird sei darauf hingewiesen, dass diese Formulierung formal sehr elegant auf den Fall verteilt-parametrischer Systeme (Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden, beschrieben durch partielle Differentialgleichungen) erweitert werden kann.

**Beispiel 2.19.** Als einfaches Beispiel betrachte man das sphärische Pendel von Abbildung 2.46 mit der Punktmasse  $m$  und der Länge  $l$  sowie einer äußeren Kraft  $\mathbf{f}_e$ , die immer in Richtung der negativen  $\mathbf{e}_x$ -Achse wirke. Die Punktmasse hat drei Freiheitsgrade und über den starren Stab der Länge  $l$  ergibt sich eine holonome Zwangsbedingung  $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ . Damit hat das sphärische Pendel zwei Freiheitsgrade ( $n = 2$ ) und als generalisierte Koordinaten werden die beiden Winkel  $\theta$  und  $\varphi$  gewählt.

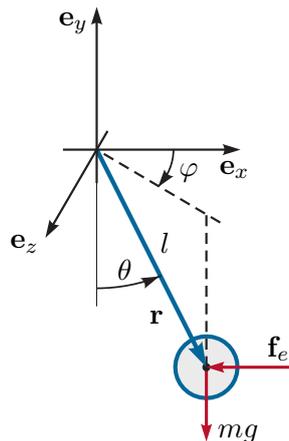


Abbildung 2.46: Sphärisches Pendel mit äußerer Kraft.

Die Berechnung der kinetischen Energie  $T$  kann sehr einfach dadurch erfolgen, dass man den Positionsvektor  $\mathbf{r}$  vom Ursprung 0 des Inertialkoordinatensystems ( $0xyz$ ) zur Punktmasse in der Form

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} l \sin(\theta) \cos(\varphi) & -l \cos(\theta) & l \sin(\theta) \sin(\varphi) \end{bmatrix}^T \quad (2.198)$$

aufstellt. Die kinetische Energie errechnet sich dann nach (2.192) zu

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)) . \quad (2.199)$$

Nimmt man an, dass für  $\theta = 0$  die potentielle Energie gleich Null ist, dann folgt mit der Erdbeschleunigung  $g$  die potentielle Energie zu

$$V = mgl(1 - \cos(\theta)) . \quad (2.200)$$

Die äußere Kraft lautet  $\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} -f_{e,x} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  und demnach folgt für die generalisierten Kräfte nach (2.186)

$$f_\theta = \mathbf{f}_e^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -f_{e,x} l \cos(\theta) \cos(\varphi) \quad , \quad f_\varphi = \mathbf{f}_e^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = f_{e,x} l \sin(\theta) \sin(\varphi) . \quad (2.201)$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen (2.196) lassen sich nun mit Hilfe der Lagrange-Funktion  $L = T - V$  in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} L - \frac{\partial}{\partial \theta} L = f_\theta \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L - \frac{\partial}{\partial \varphi} L = f_\varphi \quad (2.202)$$

bzw.

$$m l^2 \ddot{\theta} - m l^2 \dot{\varphi}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + mgl \sin(\theta) = -f_{e,x} l \cos(\theta) \cos(\varphi) \quad (2.203a)$$

$$m l^2 (\ddot{\varphi} \sin^2(\theta) + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\theta)) = f_{e,x} l \sin(\theta) \sin(\varphi) \quad (2.203b)$$

berechnen. Dabei ergeben sich immer gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die im Allgemeinen die zweiten Zeitableitungen der generalisierten Koordinaten implizit beinhalten. Für eine *Zustandsdarstellung* der Form  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  mit dem Zustand  $\mathbf{x}$  und dem Eingang  $\mathbf{u}$  gemäß (1.5) wählt man typischerweise die generalisierten Koordinaten  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  und die generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  als Zustandsgrößen. Für das Beispiel des sphärischen Pendels sind die Zustandsgrößen durch  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} & \varphi & \dot{\varphi} \end{bmatrix}^T$  und die Eingangsgröße durch  $u = f_{e,x}$

gegeben. Das zu (2.203b) äquivalente System expliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung lautet dann

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.204a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{ml^2} \left( -ul \cos(x_1) \cos(x_3) + ml^2 x_4^2 \cos(x_1) \sin(x_1) - mgl \sin(x_1) \right) \quad (2.204b)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (2.204c)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{ml^2 \sin^2(x_1)} \left( ul \sin(x_1) \sin(x_3) - 2ml^2 x_4 x_2 \cos(x_1) \sin(x_1) \right). \quad (2.204d)$$

**Beispiel 2.20.** Abbildung 2.47 zeigt eine Kugel mit der Masse  $m_K$  und dem Radius  $r_K$ , die auf einem drehbar gelagerten Balken rollt. Das Massenträgheitsmoment des Balkens bezüglich der Drehachse ( $\mathbf{e}_z$ -Achse) sei  $\theta_{B,zz}$  und die Eingangsgröße ist durch das externe Drehmoment  $\tau_e^{(0)}$  um die Drehachse gegeben. Das System besitzt zwei mechanische Freiheitsgrade und als generalisierte Koordinaten wird der Balkenwinkel  $\varphi_1$  sowie der Abstand  $r$  des Kugelmittelpunktes von der  $\bar{\mathbf{e}}_y$ -Achse des balkenfesten Koordinatensystems ( $0\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ) gewählt.

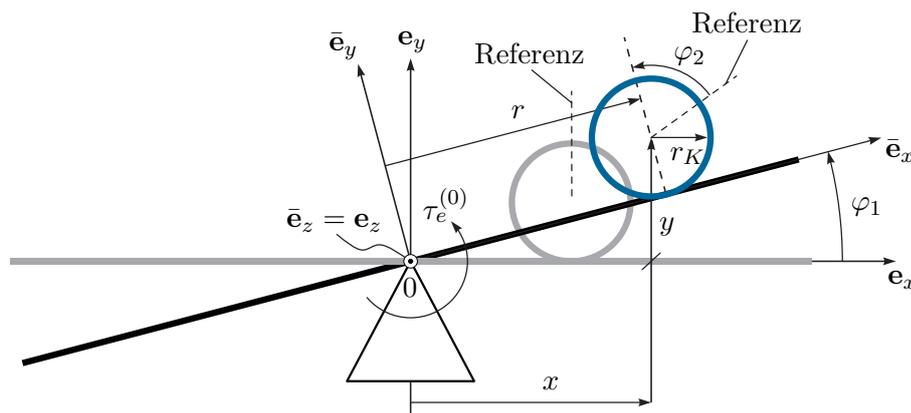


Abbildung 2.47: Kugel auf Balken.

Die kinetische Energie setzt sich aus dem translatorischen Anteil  $T_{t,K}$  und dem rotatorischen Anteil  $T_{r,K}$  der Kugel sowie dem rotatorischen Anteil  $T_{r,B}$  des Balkens zusammen. Zur Berechnung von  $T_{t,K}$  wird zuerst der Vektor vom Ursprung 0 des Inertialkoordinatensystems ( $0xyz$ ) zum Kugelmittelpunkt (Schwerpunkt) in der Form

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi_1) - r_K \sin(\varphi_1) \\ r \sin(\varphi_1) + r_K \cos(\varphi_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.205)$$

aufgestellt. Der translatorische Anteil der kinetischen Energie der Kugel  $T_{t,K}$  errechnet

sich dann gemäß (2.192) zu

$$T_{t,K} = \frac{1}{2} m_K \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} m_K \left( r^2 \dot{\varphi}_1^2 + (\dot{r} - r_K \dot{\varphi}_1)^2 \right). \quad (2.206)$$

Für den rotatorischen Anteil der kinetischen Energie der Kugel  $T_{r,K}$  beachte man vorerst, dass das Massenträgheitsmoment der Kugel  $\theta_{K,zz}$  bezüglich der Drehachse (parallel zur  $\mathbf{e}_z$ -Achse durch den Kugelmittelpunkt) gemäß (2.150) wie folgt lautet

$$\theta_{K,zz} = \frac{2}{5} m_K r_K^2. \quad (2.207)$$

Um nun (2.148) anwenden zu können, muss man die Drehwinkelgeschwindigkeit der Kugel bezüglich der Drehachse ( $\mathbf{e}_z$ -Achse) berechnen. Zuzufolge der Rollbewegung der Kugel gilt die Beziehung

$$\dot{r} = -r_K \dot{\varphi}_2, \quad (2.208)$$

d. h., bezüglich des balkenfesten Koordinatensystems ( $0\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ) dreht sich die Kugel mit der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_2$  um die  $\mathbf{e}_z$ -Achse. Da sich aber auch der Balken mit der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_1$  um die  $\mathbf{e}_z$ -Achse dreht, ergibt sich die effektive Drehwinkelgeschwindigkeit der Kugel aus der Summe beider Drehungen zu  $\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2$  und der rotatorische Anteil der kinetischen Energie lautet

$$T_{r,K} = \frac{1}{2} \theta_{K,zz} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 = \frac{1}{2} \theta_{K,zz} \left( \dot{\varphi}_1 - \frac{\dot{r}}{r_K} \right)^2. \quad (2.209)$$

Der rotatorische Anteil der kinetischen Energie des Balkens errechnet sich zu

$$T_{r,B} = \frac{1}{2} \theta_{B,zz} \dot{\varphi}_1^2. \quad (2.210)$$

Nimmt man an, dass für  $\varphi_1 = 0$  die potentielle Energie gleich Null ist, dann folgt mit der Erdbeschleunigung  $g$  die potentielle Energie zu

$$V = m_K g (r \sin(\varphi_1) + r_K \cos(\varphi_1)) - m_K g r_K. \quad (2.211)$$

Mit der Lagrange-Funktion

$$L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) = T_{t,K} + T_{r,K} + T_{r,B} - V \quad (2.212)$$

ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu (siehe (2.196))

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{r}} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) \right) - \frac{\partial}{\partial r} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) = 0 \quad (2.213a)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_1} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} L(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, r, \dot{r}) = \tau_e^{(0)} \quad (2.213b)$$

bzw.

$$\left(m_K + \frac{\theta_{K,zz}}{r_K^2}\right)\ddot{r} - \left(\frac{\theta_{K,zz}}{r_K} + m_K r_K\right)\ddot{\varphi}_1 - m_K r \dot{\varphi}_1^2 + m_K g \sin(\varphi_1) = 0 \quad (2.214a)$$

$$\begin{aligned} & - \left(m_K r_K + \frac{\theta_{K,zz}}{r_K}\right)\ddot{r} + \left(\theta_{K,zz} + \theta_{B,zz} + m_K(r^2 + r_K^2)\right)\ddot{\varphi}_1 \\ & + 2m_K r \dot{r} \dot{\varphi}_1 + m_K g(r \cos(\varphi_1) - r_K \sin(\varphi_1)) = \tau_e^{(0)}. \end{aligned} \quad (2.214b)$$

*Aufgabe 2.19.* Bringen Sie das System (2.214b) in Zustandsdarstellung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  mit dem Zustand  $\mathbf{x} = [\varphi_1 \ \dot{\varphi}_1 \ r \ \dot{r}]^T$  und dem Eingang  $u = \tau_e^{(0)}$ . Berechnen Sie weiters die stationären Ruhelagen des Systems.

*Lösung von Aufgabe 2.19.* Die Ruhelagen des Systems lauten  $\varphi_{1,R} = 0$ ,  $\dot{\varphi}_{1,R} = 0$ ,  $r_R$  ist beliebig,  $\dot{r}_R = 0$  und  $\tau_{e,R}^{(0)} = g m_K r_R$ .

*Aufgabe 2.20.* Gegeben ist das mechanische System von Abbildung 2.48. Der Wagen hat die Masse  $m_W$ , wird über eine Antriebskraft  $f_e$  angetrieben und ist mit einer linearen Feder mit der Federkonstanten  $c_W > 0$  sowie der entspannten Länge  $s_{W0}$  gegenüber dem Inertialsystem befestigt. Im Weiteren sei angenommen, dass die Reibung näherungsweise durch eine geschwindigkeitsproportionale Kraft  $f_R = -d_R \dot{s}$ ,  $d_R > 0$  ausgedrückt werden kann. Der reibungsfrei gelagerte Pendelstab sei homogen mit der Dichte  $\rho_S$  und quaderförmig mit der Länge  $l_S$ , der Breite  $b_S$  und der Höhe  $h_S$ . Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichungen (2.196).

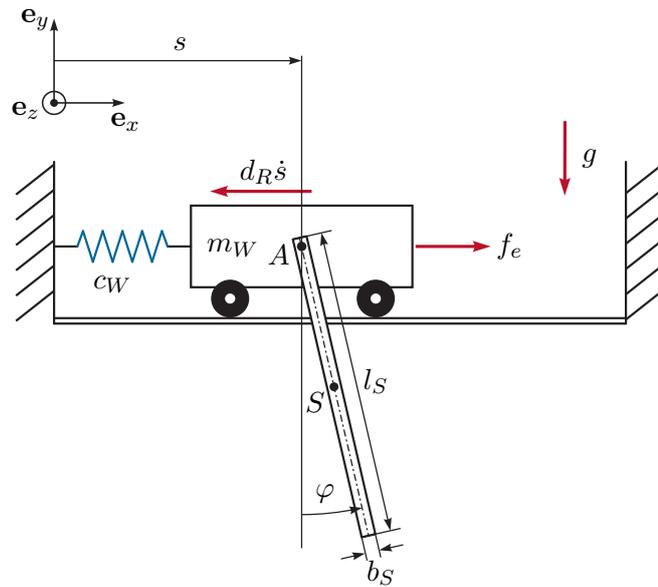


Abbildung 2.48: Wagen mit Pendel.

*Lösung von Aufgabe 2.20.* Die Masse des Pendels errechnet sich zu  $m_S = \rho s l_S b_S h_S$  und das Massenträgheitsmoment um den Schwerpunkt  $S$  (vergleiche Beispiel 2.17) lautet  $\theta_{S,zz}^{(S)} = \frac{1}{12} m_S (l_S^2 + b_S^2)$ . Die Bewegungsgleichungen ergeben sich zu

$$(m_W + m_S)\ddot{s} + \frac{1}{2} m_S l_S \cos(\varphi) \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} m_S l_S \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + c_W (s - s_{W0}) = f_e - d_R \dot{s} \quad (2.215a)$$

$$\frac{1}{2} m_S l_S \cos(\varphi) \ddot{s} + \left( \theta_{S,zz}^{(S)} + \frac{1}{4} m_S l_S^2 \right) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} m_S g l_S \sin(\varphi) = 0 . \quad (2.215b)$$

## 2.4 Literatur

- [2.1] J. Simmonds, *A Brief on Tensor Analysis*, S. Axler, F. Gehring und K. Ribet, Hrsg. New York: Springer, 1994.
- [2.2] O. Bruhns und T. Lehmann, *Elemente der Mechanik I: Einführung, Statik*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1993.
- [2.3] ———, *Elemente der Mechanik II: Elastostatik*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1994.
- [2.4] ———, *Elemente der Mechanik III: Kinetik*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1994.
- [2.5] M. Calkin, *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*. Singapore: World Scientific, 1996.
- [2.6] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und W. A. Wall, *Technische Mechanik 1: Statik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
- [2.7] ———, *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.
- [2.8] ———, *Technische Mechanik 3: Kinetik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [2.9] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und E. A. Werner, *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [2.10] D. Gross, W. Ehlers und P. Wriggers, *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 1: Statik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [2.11] ———, *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 2: Elastostatik, Hydrostatik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.
- [2.12] ———, *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3: Kinetik, Hydromechanik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.
- [2.13] H. Goldstein, *Klassische Mechanik*. Wiesbaden: AULA-Verlag, 1991.
- [2.14] H. Hahn, *Rigid Body Dynamics of Mechanisms: Part 1: Theoretical Basis*. Berlin: Springer, 2002.
- [2.15] ———, *Rigid Body Dynamics of Mechanisms: Part 2: Applications*. Berlin: Springer, 2002.
- [2.16] B. Heimann, W. Gerth und K. Popp, *Mechatronik: Komponenten - Methoden - Beispiele*. Leipzig: Fachbuchverlag, 2003.
- [2.17] R. Isermann, *Mechatronische Systeme: Grundlagen*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [2.18] L. Meirovitch, *Dynamics and Control of Structures*. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- [2.19] A. Shabana, *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

- 
- [2.20] W. Schiehlen und P. Eberhard, *Technische Dynamik: Modelle für Regelung und Simulation*. Wiesbaden: Teubner, 2004.
- [2.21] M. Spong und M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [2.22] P. Wellstead, *Physical System Modelling*. London: Academic Press, 1979.
- [2.23] F. Ziegler, *Mechanics of Solids and Fluids*. New York: Springer, 1995.

# 3 Wärmeübertragung

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen zur Modellierung von Wärmeübertragungsprozessen diskutiert. Unter Wärmeübertragung soll hier der Energietransport in und zwischen Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen zufolge von Temperaturunterschieden verstanden werden. Die Temperatur ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie zufolge der ungeordneten mikroskopischen Bewegung der Atome und Moleküle eines Stoffes.

Gemäß dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik [3.1, 3.2] wird bei Wärmeübertragung Energie vom Ort höherer Temperatur zum Ort geringerer Temperatur transferiert, d. h. es findet ein Temperatenausgleich statt. Besitzen zwei Körper die gleiche Temperatur, so befinden sie sich im thermischen Gleichgewicht und es findet kein weiterer Temperatenausgleich statt.

Wärme kann auf drei verschiedene Arten übertragen werden [3.3–3.6]:

## 1. Wärmeleitung

Der Energietransport durch *Wärmeleitung* stellt eine Interaktion zwischen benachbarten Atomen oder Molekülen eines Stoffes dar. Die von der Temperatur abhängige innere Energie fließt dabei von Atomen oder Molekülen mit höherem Energieniveau zu solchen mit kleinerem Energieniveau, wobei es durch zufällige mikroskopische Bewegungen und Vibrationen fortwährend zu Diffusions- und Kollisionsvorgängen kommt. Wärmeleitung tritt in Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen auf. In festen elektrischen Nichtleitern erfolgt die Interaktion ausschließlich durch Gitterschwingungen; in elektrischen Leitern trägt auch die translatorische Bewegung von Elektronen zur Wärmeleitung bei. Wärmeleitung erfolgt ohne einen makroskopischen Materialstrom.

## 2. Konvektion

In Fluiden (Flüssigkeiten und Gase) erfolgt der Transport von innerer Energie zusätzlich zu den zufälligen molekularen Diffusionsbewegungen (Wärmeleitung) durch makroskopische Materialströme, d. h. durch Massentransport. Strenggenommen ist Konvektion daher kein eigener Wärmeübertragungstyp sondern eine Kombination anderer Formen von Wärmeübertragung. Wird bei Konvektion der makroskopische Materialstrom durch eine äußere Einwirkung verursacht (z. B. durch ein Gebläse, eine Pumpe oder die Bewegung eines Fahrzeuges), so spricht man von *erzwungener Konvektion*. Bei *freier Konvektion* hingegen wird die Strömung durch den von temperaturbedingten lokalen Dichteunterschieden hervorgerufenen Auftrieb verursacht. Eine spezielle Form von Konvektion tritt bei Siede- oder Kondensationsvorgängen auf. Hierbei führen Temperaturunterschiede nicht nur zu veränderter Dichte sondern auch zu Übergängen zwischen flüssigem und gasförmigem Aggregatzustand des Fluids.

### 3. Wärmestrahlung

Unter Wärmestrahlung versteht man den Energietransport mittels elektromagnetischer Wellen die durch die innere Energie von Materie, die sich im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht befindet, ausgelöst wurden. Diese Merkmale unterscheiden Wärmestrahlung von anderen elektromagnetischen Wellen. Wärmestrahlen haben eine Wellenlänge im Bereich von  $0.1 \mu\text{m}$  bis  $0.1 \text{mm}$  und transportieren Energie mit Lichtgeschwindigkeit. Wärmestrahlung kann in Festkörpern, Flüssigkeiten, Gasen und im Vakuum auftreten.

Abbildung 3.1 zeigt die drei Arten von Wärmeübertragung am Beispiel einer Gebäudewand mit Radiatorheizung. Der Radiator arbeitet als Wärmequelle und gibt durch thermische Strahlung und freie Konvektion Wärme an die Raumluft und die Gebäudewand ab. In der Wand selbst fließt die Energie hauptsächlich durch Wärmeleitung zur äußeren Gebäudeoberfläche, wo die von einer Windströmung erzwungene Konvektion und gegebenenfalls auch Wärmestrahlung die Energie an die Umgebung abführt. Natürlich können die beteiligten Materialien und Medien auch thermische Energie speichern oder abgeben, was zu einer zeitlichen Änderung ihrer lokalen Temperatur führt (transiente Wärmeübertragung). In diesem Beispiel treten, wie auch in vielen anderen praktischen Anwendungen, mehrere Wärmeübertragungsmechanismen in Kombination auf.

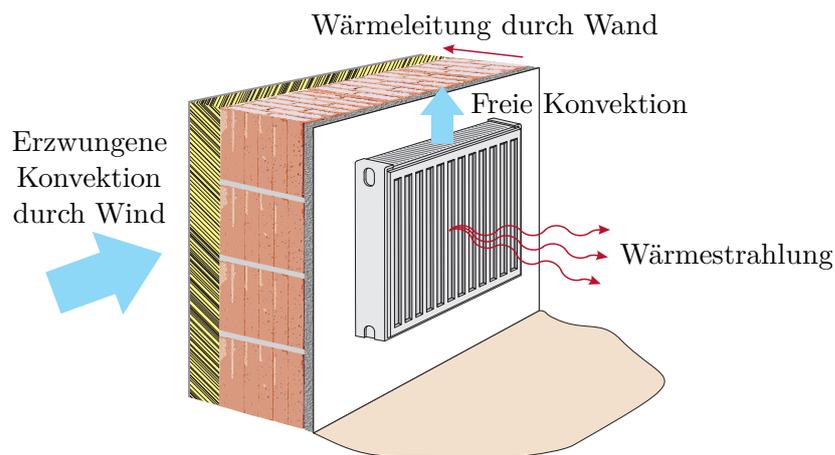


Abbildung 3.1: Arten der Wärmeübertragung.

Abschließend sei erwähnt, dass der Peltier-Effekt, ein thermo-elektrischer Effekt, einen Wärmestrom verursachen kann selbst wenn kein Temperaturunterschied vorhanden ist. Beim Peltier-Effekt wird der Wärmestrom ausschließlich durch die von einer elektrischen Potentialdifferenz ausgelösten Elektronenbewegungen, d. h. durch den Stromfluss, erzeugt.

In der vorliegenden Vorlesung werden Wärmeleitung in Festkörpern und einfache Formulierungen für die Wärmeübertragung an deren Rändern diskutiert. Es werden sowohl transiente als auch stationäre Wärmeübertragungsprobleme untersucht.

### 3.1 Wärmeleitung

Wärmeleitung erfolgt ohne einen makroskopischen Materialstrom, kann in allen drei Aggregatzuständen eines Stoffes auftreten und wird auch als Wärmediffusion bezeichnet. Wie Jean Baptiste Joseph Fourier 1822 herausfand, ist bei Wärmeleitung die Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x})$  in  $\text{W}/\text{m}^2$  im Punkt  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  proportional zum lokalen Temperaturgradienten [3.3–3.5], d. h.

$$\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T)\nabla T(t, \mathbf{x}) . \quad (3.1)$$

Hierbei ist  $T(t, \mathbf{x})$  die Temperatur in K zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $\mathbf{x}$  und die symmetrische Matrix  $\mathbf{\Lambda}$  die im Allgemeinen orts- und temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit in  $\text{W}/(\text{mK})$ . In *isotropen* Materialien ist die Wärmeleitfähigkeit unabhängig von der Raumrichtung der Wärmestromdichte, d. h. es gilt  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T) = \lambda(\mathbf{x}, T)\mathbf{E}$  und die Wärmeleitfähigkeit kann durch die skalare positive Größe  $\lambda(\mathbf{x}, T)$  beschrieben werden. In *homogenen* Materialien ist  $\mathbf{\Lambda}$  unabhängig vom Ort.

Für ein festes Kontrollvolumen  $\mathcal{V}$  und ohne Materialbewegung kann für inkompressible Stoffe oder für Situationen mit konstantem Druck aus dem Energieerhaltungssatz (siehe Anhang A.3) die Beziehung

$$\int_{\mathcal{V}} \rho c_p(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} d\mathcal{V} = - \underbrace{\int_{\partial\mathcal{V}} \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dA}_{=\dot{Q}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} g(t, \mathbf{x}, T) d\mathcal{V}}_{=P} \quad (3.2)$$

hergeleitet werden. Hierbei bezeichnet  $\rho$  die Dichte und  $c_p(\mathbf{x}, T)$  die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck (siehe auch Anhang A.4) des im Kontrollvolumen  $\mathcal{V}$  befindlichen Stoffes. Eine Herleitung von (3.2) ausgehend vom Energieerhaltungssatz, eine Begründung für die Verwendung von  $c_p$  (statt  $c_v$ ) und analoge Beziehungen für andere Situationen (z. B. bewegte Fluide) finden sich in [3.7, 3.8].

Da sich das Material nicht bewegt, spielen kinetische und potentielle Energie in (3.2) keine Rolle.  $\dot{Q}$  beschreibt den Wärmestrom der in das Kontrollvolumen hineinfließt, wobei  $\mathbf{n}$  den Flächennormalvektor der Berandung  $\partial\mathcal{V}$  darstellt.  $P$  beschreibt die in das System durch Arbeit eingebrachte Leistung, welche mangels Volumenänderung direkt in Wärme umgewandelt wird und hier durch die volumetrische Wärmequelle  $g(t, \mathbf{x}, T)$  ausgedrückt wird. Ein Beispiel für  $g$  ist die Wärmeentwicklung in einem Ohmschen Widerstand (siehe auch Abschnitt 3.3).

Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (A.1) auf (3.2) liefert

$$\int_{\mathcal{V}} \rho c_p(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} -\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) + g(t, \mathbf{x}, T) d\mathcal{V} . \quad (3.3)$$

Aus der Überlegung, dass diese Beziehung für beliebig gewählte Kontrollvolumina  $\mathcal{V}$  erfüllt sein muss, und durch Einsetzen von (3.1) erhält man die *Fouriersche Wärmeleitgleichung*

$$\rho c_p(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, T)\nabla T(t, \mathbf{x})) + g(t, \mathbf{x}, T) . \quad (3.4)$$

Diese parabolische Differentialgleichung wird gelegentlich auch als Wärmediffusionsgleichung bezeichnet und stellt ein *Anfangs-Randwert-Problem* dar. Sie ist also noch mit Anfangs- und Randbedingungen zu versehen. Randbedingungen werden in Abschnitt 3.2 diskutiert. Anfangsbedingungen sind häufig in der Form  $T(0, \mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x})$  gegeben. Schwieriger aber praktisch gelegentlich bedeutend ist der Fall, dass  $T_0(\mathbf{x})$  unbekannt ist und aus dem Zeitverlauf von Messwerten (z. B. Oberflächentemperaturen) rekonstruiert werden soll. Es handelt sich dabei um eine Beobachtungsaufgabe.

Bei *stationären* Problemstellungen gilt  $\partial T/\partial t = 0$  (vgl. Abschnitt 3.4), die Angabe von Anfangsbedingungen entfällt natürlich und (3.4) reduziert sich zu einem *Randwertproblem* in Form einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Im Fall  $g = 0$  ist für solche Differentialgleichungen bekannt, dass sowohl das Maximum als auch das Minimum der Lösung am Rand des Rechengebietes auftreten muss. Ähnliche weiterführende Aussagen auch für Fälle  $g \neq 0$  finden sich z. B. in [3.9]. Weiters folgt aus (3.4), dass  $\rho$  und  $c_p$  auf die Lösung stationärer Wärmeleitungsprobleme keinen Einfluss haben. Dies gilt allgemein für stationäre Wärmeübertragungsprobleme ohne Massenströme.

Für die nachfolgenden Spezialisierungen von (3.4) wird angenommen, dass es sich um isotropes, homogenes Material mit temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  handelt. In kartesischen Koordinaten gilt dann

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + g(t, x, y, z, T) \quad (3.5a)$$

für die Temperatur  $T = T(t, x, y, z)$  am Punkt  $(x, y, z)$ . In Zylinderkoordinaten (siehe

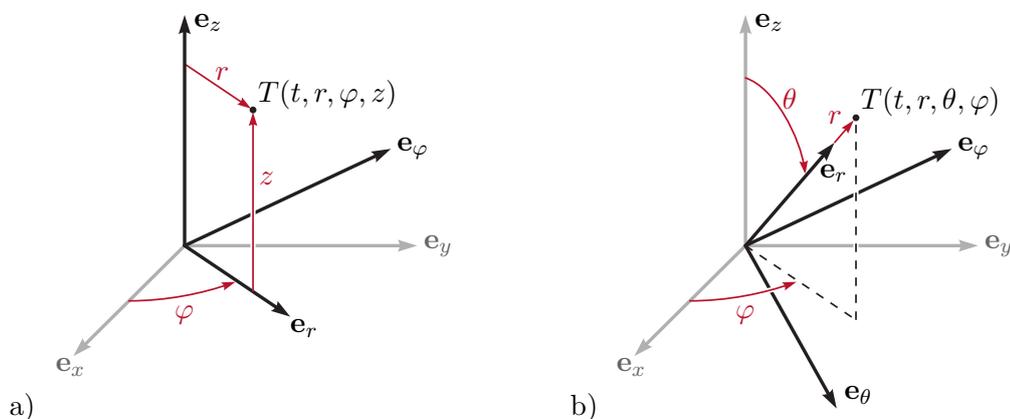


Abbildung 3.2: Koordinatensysteme, a) Zylinderkoordinaten, b) Kugelkoordinaten.

Abbildung 3.2a) gilt für die Temperatur  $T = T(t, r, \varphi, z)$  am Punkt  $(r, \varphi, z)$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + g(t, r, \varphi, z, T) \quad (3.5b)$$

und in Kugelkoordinaten (siehe Abbildung 3.2b) gilt für die Temperatur  $T = T(t, r, \theta, \varphi)$

am Punkt  $(r, \theta, \varphi)$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + g(t, r, \theta, \varphi, T) . \quad (3.5c)$$

Aus (3.5) lassen sich sofort weitere Spezialisierungen für den 1-dimensionalen Fall oder radialsymmetrische Fälle ableiten. Häufig wird in (3.5) statt der Parameter  $\rho$ ,  $c_p$  und  $\lambda$  die als *Temperaturleitfähigkeit* bezeichnete Abkürzung

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (3.6)$$

mit der Einheit  $\text{m}^2/\text{s}$  verwendet.

**Aufgabe 3.1 (Wärmeleitgleichung in Zylinderkoordinaten).** Beweisen Sie die Gültigkeit von (3.5b) unter Verwendung von

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.7)$$

und  $\partial \mathbf{e}_r / \partial \varphi = \mathbf{e}_\varphi$ .

**Aufgabe 3.2 (Wärmeleitgleichung in Kugelkoordinaten).** Beweisen Sie die Gültigkeit von (3.5c) unter Verwendung von

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} . \quad (3.8)$$

## 3.2 Randbedingungen

Zur vollständigen Definition und damit auch zur Lösbarkeit eines Wärmeleitproblems werden Randbedingungen im Randgebiet  $\partial \mathcal{V}$  benötigt [3.3, 3.4]. Diese können eine Ortsabhängigkeit aufweisen, z. B. können sie abschnittsweise definiert sein.

Bei einer *Randbedingung erster Art* (Dirichletsche Randbedingung) ist die Temperatur am jeweiligen Randabschnitt  $\partial \mathcal{V}_a \subseteq \partial \mathcal{V}$  in der Form

$$T(t, \mathbf{x}) = T_a(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{V}_a \quad (3.9a)$$

fest vorgegeben. Um eine solche Randbedingung herzustellen, kann z. B. eine Temperaturregelung verwendet werden. Ein weiteres Beispiel für diese Randbedingung ist die Temperatur eines Fluids bei Phasenumwandlungsvorgängen (z. B. Eiswasser). Die das Fluid einschließende Oberfläche wird dann konstant auf Phasenumwandlungstemperatur gehalten.

Bei einer *Randbedingung zweiter Art* (Neumannsche Randbedingung) ist die Wärmestromdichte  $\dot{q}_n(t, \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$  in Richtung der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  am jeweiligen Randabschnitt  $\partial \mathcal{V}_a \subseteq \partial \mathcal{V}$  in der Form

$$\dot{q}_n(t, \mathbf{x}) = \dot{q}_a(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}_a \quad (3.9b)$$

fest vorgegeben. Dem Wärmeleitgesetz (3.1) folgend ist daher der Temperaturgradient entlang von  $\mathbf{n}$  festgelegt. Von einer *adiabaten* Randbedingung spricht man im Fall  $\dot{q}_n = 0$ .

Bei einer *Randbedingung dritter Art* (Newtonsche, Robinsche oder gemischte Randbedingung) gilt

$$\dot{q}_n(t, \mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})(T(t, \mathbf{x}) - T_a(t, \mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}_a \quad (3.9c)$$

mit einem Proportionalitätsfaktor  $\alpha \in \mathbb{R}$ , der auch Wärmeübergangskoeffizient genannt wird. Diese Art von Randbedingung wird in den Abschnitten 3.2.1 bis 3.2.3 zur Beschreibung von Konvektion und Wärmeleitung verwendet. Man beachte noch, dass (3.9c) für  $\alpha \rightarrow \infty$  wieder auf (3.9a) führt.

Eine allgemeinere Randbedingung ist durch die nichtlineare Beziehung

$$\dot{q}_n(t, \mathbf{x}) = \dot{q}_a(t, \mathbf{x}, T(t, \mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}_a \quad (3.9d)$$

gegeben. Diese Struktur tritt z. B. in Abschnitt 3.2.4 bei der Beschreibung von Wärmestrahlung auf.

Die Randbedingungen (3.9) stellen oft idealisierte oder makroskopische Näherungen für in der Realität komplexere Wärmeübertragungsvorgänge dar. Um bei Verwendung der obigen Ansätze dennoch möglichst exakt zu rechnen, ist daher eine sorgfältige Bestimmung der in den Gleichungen verwendeten Parameter notwendig. Dies soll im Folgenden beispielhaft für praktisch bedeutende Randbedingungen erläutert werden.

### 3.2.1 Erzwungene Konvektion

Erzwungene Konvektion tritt in Fluiden an der Oberfläche von umgebenden Körpern auf, wenn die Strömung durch eine äußere Einwirkung, z. B. einen Druckunterschied, verursacht wird [3.3, 3.4, 3.6, 3.10]. Abbildung 3.3 zeigt ein Beispiel für erzwungene Konvektion; ein Fluid streicht mit einer Geschwindigkeit  $u_\infty$  und einer Temperatur  $T_\infty$  parallel über eine ruhende ebene Platte mit der Länge  $L$ . Für die Wärmeübertragung durch Konvektion sind die als homogen vorausgesetzte Oberflächentemperatur  $T_p$  der Platte sowie die Temperaturverteilung  $T(x, y)$  und die Geschwindigkeitsverteilung  $u(x, y)$  im Fluid nahe über der Plattenoberfläche ausschlaggebend. Direkt an der Plattenoberfläche ( $y = 0$ ) gilt die Haftbedingung, d. h. das Fluid hat eine verschwindende Geschwindigkeit ( $u(x, 0) = 0$ ) und die gleiche Temperatur wie die Plattenoberfläche ( $T(x, 0) = T_p$ ). Oberhalb der Plattenoberfläche bilden sich im Fluid Grenzschichten mit einem charakteristischen Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil aus. Das Wärmeübertragungsverhalten hängt unter anderem von der Dicke dieser Grenzschichten ( $\delta_T(x)$  für die thermische Grenzschicht und  $\delta_u(x)$  für die Strömungsgrenzschicht) ab und davon ob die Strömung in diesen Schichten laminar oder turbulent ist. Im Folgenden werden mögliche Berechnungsmethoden für den laminaren und turbulenten Bereiche der Strömung über die Platte separat vorgestellt und schließlich zur Bestimmung eines gemittelten Wärmeübertragungsverhaltens herangezogen. Transiente Effekte werden dabei nicht berücksichtigt, d. h. die Strömung über die Platte wird als voll ausgebildet und makroskopisch stationär betrachtet.

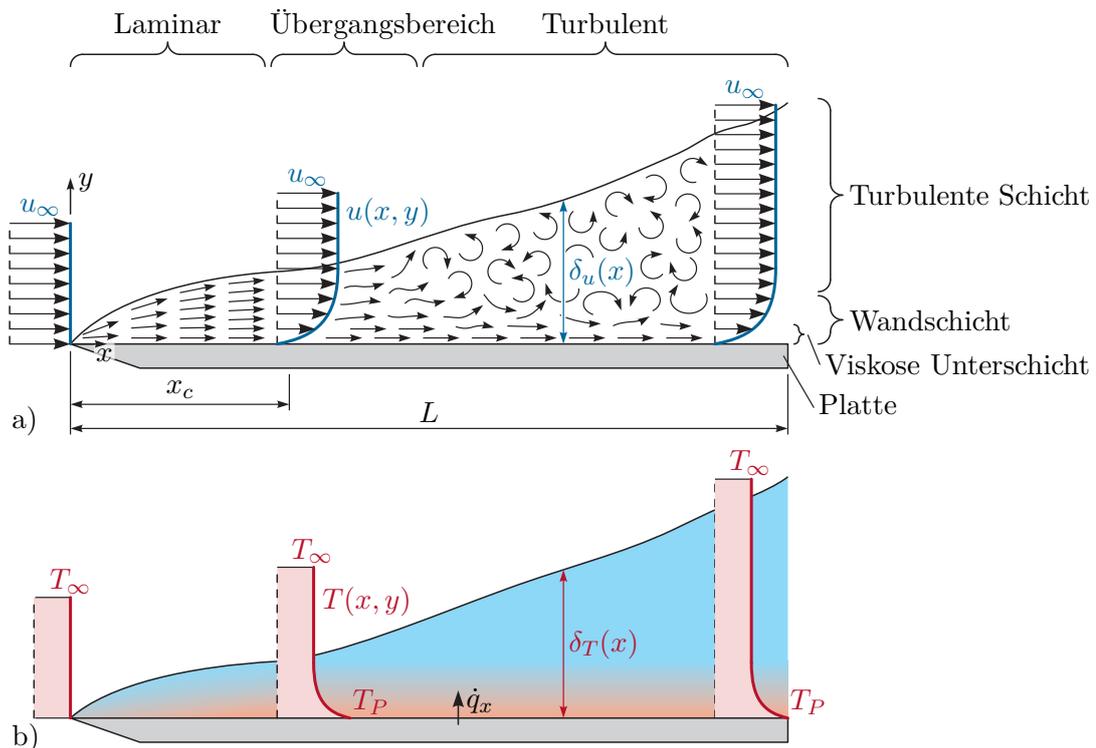


Abbildung 3.3: Grenzschichten bei erzwungener Konvektion an einer Platte, a) Strömungsgrenzschicht, b) thermische Grenzschicht.

### Laminarer Bereich

In vielen Fällen ist die Strömung am Einlauf der Platte (nahe der Vorderkante) laminar und etwas weiter von der Kante entfernt turbulent. Die Strömungsgrenzschicht habe eine lokale Dicke  $\delta_u(x)$ . Im laminaren Bereich, der sich von  $x = 0$  bis  $x = x_c$  erstreckt, ist die Strömung gleichmäßig und geordnet, so dass eindeutige Stromlinien identifiziert werden können. Die Geschwindigkeitsprofile sind in Abbildung 3.3a angedeutet. Direkt an der Plattenoberfläche gilt  $u(x, 0) = 0$  (Haftbedingung) und am oberen Rand der Grenzschicht gilt  $u(x, \delta_u(x)) = u_\infty$ . Da  $\delta_u(x)$  mit steigendem  $x$  zunimmt, nimmt  $\partial u / \partial y|_{y=0}$  ab. Dieser Gradient ist proportional zur viskosen Scherspannung im Fluid.

Ferner bildet sich eine thermische Grenzschicht mit der Dicke  $\delta_T(x)$  aus. Direkt an der Plattenoberfläche gilt  $T(x, 0) = T_P$  und am oberen Rand der Grenzschicht gilt  $T(x, \delta_T(x)) = T_\infty$ . Das in Abbildung 3.3b angedeutete Temperaturprofil beschreibt einen Abkühlvorgang der Platte, da  $T_P > T_\infty$ . Die hier angestellten Überlegungen gelten aber auch für  $T_P < T_\infty$ . Für den Gradienten  $\partial T / \partial y|_{y=0}$  gilt analog zu  $\partial u / \partial y|_{y=0}$ , dass sein Absolutwert mit steigendem  $x$  abnimmt. Da bei  $y = 0$  keine Fluidbewegung vorhanden ist, ergibt sich der lokale Wärmestrom an der Stelle  $x$  in Richtung  $y$  allein aus der Wärmeleitung, d. h.

$$\dot{q}_x = -\lambda \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (3.10)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  des Fluids. Offensichtlich besitzt  $\dot{q}_x$  eine Singularität bei  $x = 0$ .

Eine vollständige analytische Berechnung von  $\delta_u(x)$ ,  $\delta_T(x)$ ,  $u(x, y)$ ,  $T(x, y)$  und  $q_x$  ist anspruchsvoll und erfordert die Verwendung der Kontinuitätsgleichung, der Impulsbilanz, der Energiebilanz, einer thermischen oder kalorischen Zustandsgleichung und einer Konstitutivgleichung für die Reibung im Fluid. Derartige Berechnungen werden z. B. in [3.3, 3.4, 3.10, 3.11] durchgeführt. In dieser Vorlesung soll lediglich die in der Strömungsmechanik und Wärmelehre gebräuchliche Beschreibung mittels dimensionsloser Kennzahlen und teilweise empirisch gefundener Zusammenhänge erläutert werden. Die Verwendung dimensionsloser Zahlen hat den Vorteil, dass Ergebnisse (z. B. auch numerische oder experimentelle Ergebnisse) auf andere Situationen mit ähnlicher Geometrie einfach übertragen werden können.

Als erste wichtige dimensionslose Kennzahl gilt die Reynolds-Zahl

$$\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}, \quad (3.11)$$

wobei  $x$  eine charakteristische Länge (im vorliegenden Fall die Längskoordinate  $x$  der Platte) und  $\nu$  die kinematische Viskosität des Fluids in  $\text{m}^2/\text{s}$  ist.  $\text{Re}_x$  beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften in einer Strömung. Anhand von  $\text{Re}_x$  kann entschieden werden, ob eine Strömung laminar oder turbulent ist. Sie ist laminar für  $\text{Re}_x < \text{Re}_c$  und turbulent für  $\text{Re}_x > \text{Re}_c$ . Die kritische Reynolds-Zahl  $\text{Re}_c$  ist eine situationsabhängige Größe und hat für den Fall der parallel angeströmten ebenen Platte (vgl. Abbildung 3.3) den Wert  $\text{Re}_c = 5 \cdot 10^5$ . Daraus folgt

$$x_c = \text{Re}_c \frac{\nu}{u_\infty}. \quad (3.12)$$

Als gute Näherung für die Dicke der Strömungsgrenzschicht im laminaren Bereich hat sich die Formel

$$\delta_u(x) = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (3.13)$$

erwiesen [3.3, 3.4, 3.6]. Sie zeigt, dass  $\delta_u(x)$  mit steigenden Werten  $\nu$  und  $x$  zunimmt und mit steigenden Werten  $u_\infty$  abnimmt.

Als weitere wichtige dimensionslose Kennzahl wird die Prandtl-Zahl

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}, \quad (3.14)$$

verwendet. Sie ist eine rein stoffabhängige Größe und setzt den Impulstransport durch viskose Reibung ins Verhältnis zur Wärmeleitung durch das Temperaturfeld. Sie hat daher auch einen direkten Einfluss auf die Grenzschichtdicken im laminaren Bereich. Dieser Einfluss kann durch

$$\delta_u(x) = \delta_T(x) \sqrt[3]{\text{Pr}} \quad (3.15)$$

beschrieben werden [3.3, 3.4, 3.6]. Für  $\text{Pr} = 1$  (häufig bei Gasen und Dämpfen) gilt folglich  $\delta_u(x) = \delta_T(x)$ .  $\text{Pr} \ll 1$  ( $\delta_u(x) < \delta_T(x)$ ) tritt bei flüssigen Metallen auf und  $\text{Pr} \gg 1$  ( $\delta_u(x) > \delta_T(x)$ ) bei vielen anderen Flüssigkeiten.

Die Gleichungen (3.13) und (3.15) zeigen, dass die Dicke  $\delta_T(x)$  der thermischen Grenzschicht nicht von den Randwerten  $T_P$  und  $T_\infty$  abhängt. Es kann gezeigt werden, dass

Gleiches für die Form des Temperaturprofils  $T(x, y)$  gilt, so dass die Grenzschichtgleichungen üblicherweise für die normierte Temperatur

$$\bar{T}(x, y) = \frac{T(x, y) - T_\infty}{T_P - T_\infty} \quad (3.16)$$

gelöst werden und  $\bar{T}(x, y)$  für beliebige Werte  $T_P$  und  $T_\infty$  gültig ist. Einsetzen von (3.16) in (3.10) liefert daher

$$\dot{q}_x = -\lambda \underbrace{\left. \frac{\partial \bar{T}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}}_{=\alpha_x} (T_P - T_\infty) \quad (3.17)$$

mit dem lokalen Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_x$ , d. h. die lokale Wärmestromdichte ist proportional zur Temperaturdifferenz  $T_P - T_\infty$ . Diese Proportionalität ist charakteristisch für Wärmeübertragung durch Konvektion und wird daher bei vereinfachten Modellierungsansätzen häufig direkt verwendet.

**Bemerkung 3.1.** Der menschliche Körper nützt die in (3.17) dargestellte Proportionalität zur Temperaturregelung. Soll der Körper gekühlt werden, so werden die oberflächennahen Blutgefäße erweitert, es fließt mehr Blut durch diese Blutgefäße und die Oberflächentemperatur des Körpers ist, so wie der kühlende Wärmestrom nach außen, höher. Soll der Wärmeverlust nach außen gemindert werden, wird die oberflächennahe Durchblutung durch Verengung der Blutgefäße reduziert.

Offensichtlich ist die Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_x$ , der von der Wärmeleitfähigkeit des Fluids und der Form der Temperaturverteilung im Fluid abhängt, eine zentrale Fragestellung. Um sie zu untersuchen, sind die Grenzschichtgleichungen zu lösen, wobei hier häufig die Nußelt-Zahl

$$\text{Nu}_x = \dot{q}_x \frac{x}{(T_P - T_\infty)\lambda} = \frac{\alpha_x x}{\lambda} \quad (3.18)$$

als weitere dimensionslose Kennzahl verwendet wird. Sie setzt die Wärmestromdichte an der Plattenoberfläche (vgl. (3.10) und (3.17)) in Beziehung zur Wärmestromdichte durch reine Wärmeleitung im Fluid über die charakteristische Distanz  $x$  bei gleicher Temperaturdifferenz  $T_P - T_\infty$ . Im Bereich der laminaren Plattengrenzschicht kann in guter Näherung die semiempirische Formulierung

$$\text{Nu}_{lam,x} = \sqrt{\text{Re}_x} \varphi(\text{Pr}) \quad (3.19a)$$

mit

$$\varphi(\text{Pr}) = \frac{\sqrt{\text{Pr}}}{\sqrt{\pi}(1 + 1.973\text{Pr}^{0.272} + 21.29\text{Pr})^{1/6}} \quad (3.19b)$$

gemäß [3.3] verwendet werden. Ähnliche Ausdrücke für  $\varphi(\text{Pr})$  finden sich in [3.4, 3.6].

### Turbulenter Bereich

Die Strömung wird im Bereich von  $x = x_c$  (Übergangsbereich) instabil und schlägt in eine turbulente Strömung um. In der als turbulente Schicht bezeichneten Region in

Abbildung 3.3a (auch Defektschicht genannt) ist die Bewegung der Fluidteilchen daher 3-dimensional, instationär und scheinbar zufällig (chaotisch). Es bilden sich ungeordnete Wellen und Wirbel, die sich auch wieder auflösen. Der Rand der Grenzschicht ist üblicherweise ausgefranst, so dass die Grenzschichtdicke

$$\delta_u(x) = 0.37x\text{Re}_x^{-1/5} \quad (3.20)$$

[3.4, 3.6] eher einem zeitlichen Mittelwert als einem festen Maß entspricht. Ein Vergleich von (3.13) und (3.20) zeigt, dass die Grenzschicht im turbulenten Bereich schneller wächst als im laminaren Bereich. Dies lässt sich mit der durch Turbulenz verstärkten Durchmischung erklären. Gleichung (3.20) und die nachfolgenden Beziehungen gelten für  $\text{Re}_c < \text{Re}_x < 10^8$ .

In der Nähe der Plattenoberfläche wird die Bewegung der Fluidteilchen durch die Wand behindert. In der sogenannten viskosen Unterschicht (vgl. Abbildung 3.3a) liegt daher etwa eine Parallelströmung vor und der Wärmetransport wird von herkömmlicher Wärmeleitung (Diffusion) dominiert. In der Wandschicht oberhalb der viskosen Unterschicht erfolgt ein Übergang zum turbulenten Strömungsverhalten. Im Vergleich zur laminaren Strömung kommt es bei turbulenten Strömungsverhältnissen zu verstärktem Wärmetransport durch Stofftransport, d. h. die turbulenten Durchmischungsvorgänge begünstigen und dominieren letztlich das Wärmeübertragungsverhalten. Im turbulenten Bereich gilt folglich

$$\delta_u(x) = \delta_T(x) . \quad (3.21)$$

Für die Nußelt-Zahl kann im Bereich  $0.6 < \text{Pr} < 60$  die empirische Formulierung

$$\text{Nu}_{tur,x} = 0.0296\text{Re}_x^{4/5} \sqrt[3]{\text{Pr}} \quad (3.22)$$

[3.3, 3.4, 3.6] verwendet werden.

### Gemittelte Größen

Aus den bisher angegebenen Formeln für die Nußelt-Zahl lässt sich mit Hilfe von (3.18) die lokale Wärmestromdichte  $\dot{q}_x$  berechnen. Praktisch sehr relevant sind auch noch die über die Plattenlänge  $L$  gemittelte Wärmestromdichte

$$\dot{q} = \frac{1}{L} \int_0^L \dot{q}_x dx = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_x dx (T_P - T_\infty) = \alpha (T_P - T_\infty) \quad (3.23)$$

sowie die unter Verwendung von (3.19) und (3.22) berechnete mittlere Nußelt-Zahl

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= \dot{q} \frac{L}{(T_P - T_\infty)\lambda} = \frac{\alpha L}{\lambda} \\ &= \begin{cases} 2\sqrt{\text{Re}_L} \varphi(\text{Pr}) & \text{wenn } L \leq x_c \\ 2\sqrt{\text{Re}_c} \varphi(\text{Pr}) + 0.0370(\text{Re}_L^{4/5} - \text{Re}_c^{4/5}) \sqrt[3]{\text{Pr}} & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.24) \\ &= \begin{cases} 2\text{Nu}_{lam,L} & \text{wenn } L \leq x_c \\ 2\text{Nu}_{lam,x_c} + \frac{5}{4}(\text{Nu}_{tur,L} - \text{Nu}_{tur,x_c}) & \text{sonst} \end{cases} . \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.3.** Rechnen Sie die Beziehung (3.24) nach.

Die hier gezeigte Vorgangsweise zur Berechnung der Wärmeübertragung durch erzwungene Konvektion an einer horizontalen Platte kann in ähnlicher Weise für andere Geometrien durchgeführt werden, z. B. für Rohrströmungen, querangeströmte Kreiszyylinder, Gruppen von Rohren und Objekte mit Rippen. Es sind dann andere charakteristische Längen  $L$ , andere kritische Reynolds-Zahlen  $Re_c$  und andere Formeln für die Nußelt-Zahl (vgl. (3.19) und (3.22)) zu verwenden. Diese Werte und Formeln können z. B. den Fachbüchern [3.3–3.5, 3.10–3.17] entnommen werden.

**Bemerkung 3.2.** Abschließend sei noch erwähnt, dass erzwungene Konvektion nicht immer an der Oberfläche von Festkörpern auftreten muss. Sie ist auch an Oberflächen von Flüssigkeiten möglich. In vielen Fällen ist es aufgrund von Dichte- und Viskositätsunterschieden zweier Fluide gerechtfertigt, das eine Fluid als ruhend zu betrachten. Ein Beispiel einer solchen Situation ist ein leichter Wind, der über die ruhende Oberfläche eines Wasserbeckens streicht.

### 3.2.2 Freie Konvektion

Freie Konvektion tritt in Fluiden an der Oberfläche von anderen Körpern auf, wenn die Strömung durch temperaturbedingte lokale Dichteunterschiede (Auftrieb) und ohne eine äußere Einwirkung hervorgerufen wird. Die Berechnung freier Konvektion erfolgt methodisch ähnlich wie bei der erzwungenen Konvektion, d. h. mit Hilfe von dimensionslosen Kennzahlen (siehe Abschnitt 3.2.1), allerdings übernimmt die Grashof-Zahl  $Gr_x$  (Verhältnis von Auftriebs- zu Zähigkeitskräften) die Rolle einer quadratischen Reynolds-Zahl  $Re_x^2$  (vgl. (3.11)). Die Nußelt-Zahl  $Nu_x$  ist daher eine Funktion der Grashof-Zahl  $Gr_x$  und der Prandtl-Zahl  $Pr$ . Die auftretende Strömung ist laminar, wenn für die Rayleigh-Zahl  $Ra_x = Gr_x Pr < Ra_c$  gilt und turbulent, wenn  $Ra_x > Ra_c$ . Für den Fall einer ebenen vertikalen Platte hat die kritische Rayleigh-Zahl den Wert  $Ra_c = 10^9$ . Auf eine eingehende Diskussion und Berechnung der Größen  $Gr_x$ ,  $Ra_x$  und  $Nu_x$  wird hier verzichtet. Diese Inhalte können z. B. in [3.3, 3.4, 3.6, 3.10, 3.13, 3.16, 3.18] nachgelesen werden.

### 3.2.3 Wärmeleitung

Wärmeleitung tritt auch an den Kontaktflächen zwischen Festkörpern auf (vgl. Abbildung 3.4). Dort hängt das Wärmeleitvermögen von folgenden Faktoren ab [3.4]:

- Beschaffenheit (Rauigkeit) der sich berührenden Oberflächen
- Flächenpressung zwischen den sich berührenden Oberflächen
- allfällige (punktweise) Verschweißungen zwischen den sich berührenden Oberflächen
- Fluid, das kleine Hohlräume zwischen den sich berührenden Oberflächen füllt

Das Wärmeleitverhalten an solchen Kontaktstellen entspricht im einfachsten Fall dem *Fourierschen Wärmeleitgesetz* (vgl. (3.1)), d. h. die Wärmestromdichte ist linear proportional der Differenz der beiden Oberflächentemperaturen. Dies kann für zwei Kontaktflächen

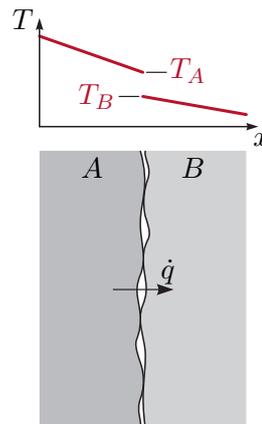


Abbildung 3.4: Wärmeleitung an der Kontaktfläche zweier Festkörper A und B.

A und B mit den Temperaturen  $T_A$  und  $T_B$  mit Hilfe eines *Wärmeübergangskoeffizienten*  $\alpha$  in der Form

$$\dot{q} = \alpha(T_A - T_B) \quad (3.25)$$

modelliert werden. Für ideale Kontaktbedingungen gilt  $\alpha \rightarrow \infty$  und  $T_A = T_B$ .

**Beispiel 3.1 (Randbedingungen bei beheiztem Rohr).** In einem Rohr mit dem Innendurchmesser  $d$ , dem Außendurchmesser  $D$  und der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  (siehe Abbildung 3.5) wird ein durchströmendes Fluid mit der über den betrachteten Querschnitt homogenen Temperatur  $T_f(t)$  erwärmt. Zu diesem Zweck ist das Rohr vollflächig mit einer Heizmatte umhüllt, welche die auf die Rohrlänge bezogene Heizleistung  $P^\circ(t)$  in W/m einbringt. Die unbekannte Temperatur  $T_h(t)$  der Heizmatte sei homogen verteilt. Ihre Dicke und Wärmekapazität sei vernachlässigbar klein. An die umgebende Luft mit der festen Temperatur  $T_\infty$  wird durch freie Konvektion (Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_\infty$ ) Wärme abgegeben. Der Wärmeübergangskoeffizient für die Wärmeleitung an der Kontaktfläche zwischen Heizmatte und Rohr sei  $\alpha_2$ . Der Wärmeübergangskoeffizient für die erzwungene Konvektion zwischen Rohrinnenwand und Fluid sei  $\alpha_1$ . Es wird angenommen, dass der Rohrinwendurchmesser  $d$  sehr viel größer ist als die Grenzschichtdicken der Konvektion im Rohrinnen. Es ist von rotationssymmetrischen Verhältnissen auszugehen und die Wärmestrahlung sei vernachlässigbar. Es sind die zur Berechnung des transienten Temperaturfeldes  $T(r, t)$  im Rohr benötigten Randbedingungen dritter Art (siehe (3.1) und (3.9c)) in Abhängigkeit der Randwerte  $T(d/2, t)$ ,  $\frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=d/2}$ ,  $T(D/2, t)$  und  $\frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=D/2}$  zu formulieren.

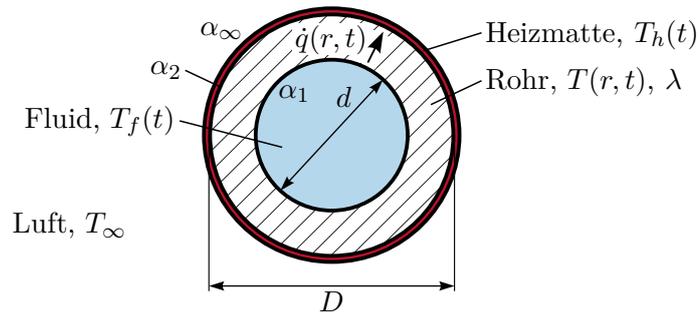


Abbildung 3.5: Beheiztes Rohr.

An der inneren Rohroberfläche  $r = d/2$  gilt

$$\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=d/2} = -\dot{q}(d/2, t) = \alpha_1 (T(d/2, t) - T_f(t)) .$$

An der äußeren Rohroberfläche  $r = D/2$  gilt

$$\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=D/2} = -\dot{q}(D/2, t) = \alpha_2 (T_h(t) - T(D/2, t)) .$$

Die unbekannte Temperatur  $T_h(t)$  kann aus der Leistungsbilanz

$$P^\circ(t) = D\pi(\alpha_\infty(T_h(t) - T_\infty) + \alpha_2(T_h(t) - T(D/2, t)))$$

der Heizmatte berechnet werden. Daraus folgt schließlich

$$\dot{q}(D/2, t) = \frac{\alpha_2(T(D/2, t) - T_\infty) - \frac{\alpha_2}{\alpha_\infty} \frac{P^\circ(t)}{D\pi}}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_\infty}} .$$

### 3.2.4 Wärmestrahlung

Im Folgenden wird eine kurze Einführung in die Wärmestrahlung zwischen Festkörpern im Vakuum gegeben. Damit ist auch der Fall von Fluiden die Wärmestrahlung weder absorbieren noch emittieren (*transparente Fluide*) abgedeckt. Um die Berechnungen einfach zu halten, sollen ausschließlich graue, diffuse Strahler berücksichtigt werden. Was darunter zu verstehen ist, wird im Folgenden diskutiert. Für die hier nicht dargestellten Wärmestrahlungsfälle (absorbierende und emittierende Fluide, nicht-graue Strahler, nicht-diffuse Strahler) wird auf Fachbücher wie z. B. [3.3, 3.4, 3.16, 3.19, 3.20] verwiesen.

Damit gasförmige Fluide Wärmestrahlung absorbieren und emittieren können, müssen sie Festkörperpartikel enthalten (z. B. Staub) oder Moleküle, die in asymmetrischen Moden schwingen können [3.5], wie etwa  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{O}_3$ ,  $\text{CH}_4$  und  $\text{NO}_2$ . Gase mit ausschließlich einatomigen oder symmetrischen zweiatomigen Molekülen (z. B.  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$  und  $\text{H}_2$ ) besitzen nur symmetrische Schwingungsmoden und sind praktisch transparent. Auch auf Luft

trifft dies bei moderaten Temperaturen und Strahlungslängen im Bereich weniger Meter näherungsweise zu.

Thermische Strahlung hängt wesentlich von den Temperaturen und Eigenschaften der beteiligten Oberflächen, den auftretenden Wellenlängen und der Raumrichtung ab. Ein *diffuser Strahler* liegt vor, wenn er in alle Raumrichtungen gleichmäßig abstrahlt, wie dies eine ideal matte Oberfläche tut [3.3, 3.4, 3.19, 3.20]. Mit der Beschränkung auf diffuse Strahler kann nachfolgend eine Berücksichtigung der Raumrichtung entfallen.

### Spektrale Ein- und Ausstrahlung

Für ein thermisch ausstrahlendes infinitesimales Oberflächenstück  $dA$  mit der Absoluttemperatur  $T$  sei zunächst die spektrale spezifische Ausstrahlung  $E_\lambda(\lambda, T)$  in  $\text{W}/\text{m}^3$  bei der Wellenlänge  $\lambda$  definiert. Damit emittiert das Oberflächenstück  $dA$  im Wellenlängenbereich  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  die Gesamtenergie  $E_\lambda(\lambda, T) dA d\lambda$  in den darüberliegenden Halbraum (Hemisphäre). Max Planck fand heraus, dass die emittierte spektrale spezifische Ausstrahlung von schwarzen Körpern durch (*Plancksches Strahlungsgesetz*)

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 \left( e^{\frac{hc_0}{\lambda k T}} - 1 \right)} \quad (3.26)$$

mit der Planckschen Konstanten  $h = (6.626\,068\,96 \pm 0.000\,000\,33)10^{-34}$  J s, der Lichtgeschwindigkeit  $c_0 = 299\,792\,458$  m/s und der Boltzmann Konstanten  $k = (1.380\,650\,4 \pm 0.000\,002\,4)10^{-23}$  J/K beschrieben werden kann [3.3, 3.19, 3.20]. Ein *schwarzer Körper* emittiert Strahlung mit einem ausschließlich von der Temperatur abhängigen Spektrum und absorbiert auftreffende thermische Strahlung vollständig (keine Spiegelung, Streuung oder Transmission). Insbesondere ist das Spektrum der emittierten Strahlung unabhängig von den Materialeigenschaften. Ein schwarzer Körper hat bei allen Wellenlängen das größtmögliche Emissions- und Absorptionsvermögen, d. h. keine andere Oberfläche kann mehr Wärmestrahlung absorbieren oder bei gleicher Temperatur emittieren.

Abbildung 3.6 zeigt die emittierte spektrale spezifische Ausstrahlung gemäß dem Planckschen Strahlungsgesetz (3.26). Das Maximum der Ausstrahlung tritt jeweils bei der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{0.002\,897\,768 \text{ m K}}{T} \quad (3.27)$$

auf. Diese Gleichung ist als *Wiensches Verschiebungsgesetz* bekannt und die dadurch beschriebene Linie ist in Abbildung 3.6 strichliert dargestellt.

**Aufgabe 3.4 (Wiensches Verschiebungsgesetz).** Beweisen Sie das Wiensche Verschiebungsgesetz (3.27) basierend auf (3.26).

Um das Emissions- und Absorptionsvermögen von nicht-schwarzen Körpern zu beschreiben, werden dimensionslose Proportionalitätsfaktoren verwendet. Die *spektrale Emissivität*

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \frac{E_\lambda(\lambda, T)}{E_{\lambda,b}(\lambda, T)} \in [0, 1] \quad (3.28)$$

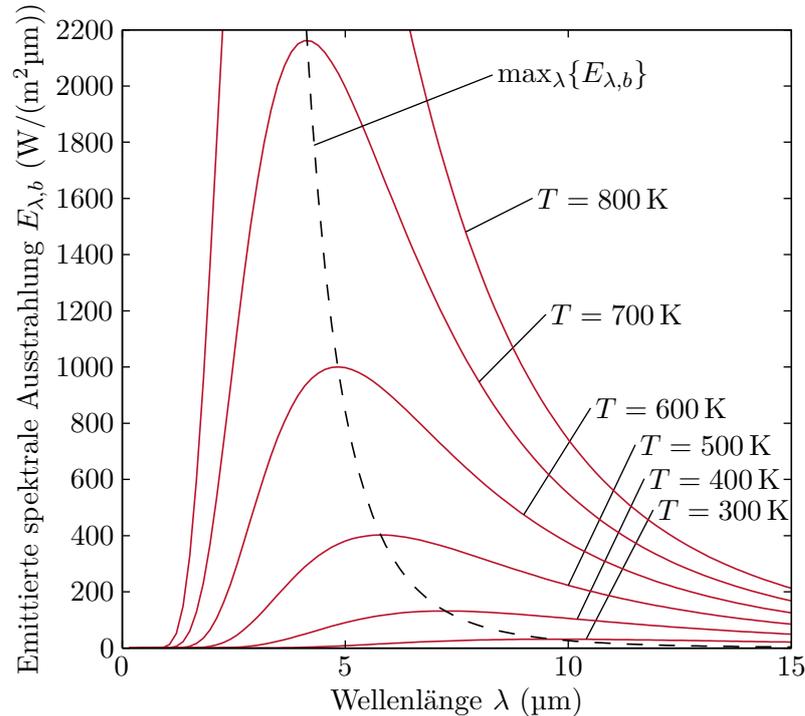


Abbildung 3.6: Emittierte spektrale Ausstrahlung von schwarzen Körpern.

vergleicht die emittierte spektrale spezifische Ausstrahlung einer Oberfläche mit jener eines schwarzen Körpers bei gleicher Temperatur  $T$ . Folglich gilt

$$E_{\lambda}(\lambda, T) = \varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 \left( e^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1 \right)} \quad (3.29)$$

und für einen schwarzen Strahler  $\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = 1$ .

Es sei  $G_{\lambda}(\lambda)$  die auf ein infinitesimales Flächenstück  $dA$  auftreffende spektrale spezifische Einstrahlung in  $\text{W}/\text{m}^2$  im Wellenlängenbereich  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ . D. h. für diesen Wellenlängenbereich ist  $G_{\lambda}(\lambda) dA d\lambda$  die auftreffende Gesamtwärmestrahungsleistung. Natürlich hängt das Spektrum der auftreffenden Wärmestahlung von den Temperaturen der sie verursachenden Strahlungsquellen ab. Von der auf einen semitransparenten Körper auftreffenden spektralen Einstrahlung  $G_{\lambda}(\lambda)$  werde der Anteil  $G_{\lambda,a}(\lambda)$  absorbiert, der Anteil  $G_{\lambda,r}(\lambda)$  werde reflektiert und der Anteil  $G_{\lambda,t}(\lambda)$  strahle ungehindert durch den Körper durch (vgl. Abbildung 3.7). Damit lassen sich der *spektrale Absorptionsgrad*

$$\alpha_{\lambda}(\lambda) = \frac{G_{\lambda,a}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)} \in [0, 1], \quad (3.30a)$$

der *spektrale Reflexionsgrad*

$$\rho_{\lambda}(\lambda) = \frac{G_{\lambda,r}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)} \in [0, 1] \quad (3.30b)$$

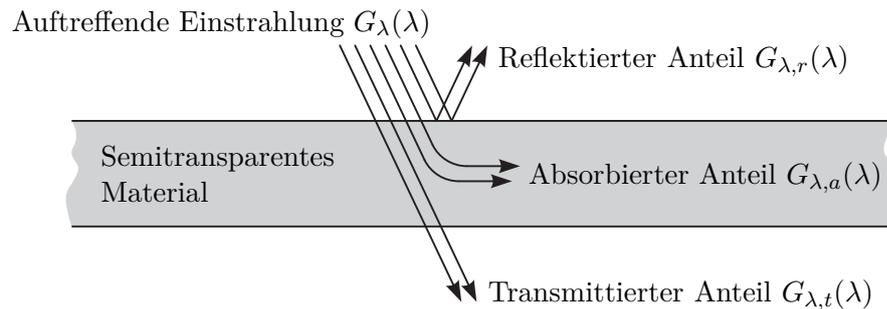


Abbildung 3.7: Absorption, Reflexion und Transmission der auf einen semitransparenten Körper auftreffenden Einstrahlung.

und der *spektrale Transmissionsgrad*

$$\tau_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,t}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \in [0, 1] \quad (3.30c)$$

definieren [3.4]. Aufgrund der Energieerhaltung gilt natürlich

$$G_\lambda(\lambda) = G_{\lambda,a}(\lambda) + G_{\lambda,r}(\lambda) + G_{\lambda,t}(\lambda) \quad (3.31a)$$

$$1 = \alpha_\lambda(\lambda) + \rho_\lambda(\lambda) + \tau_\lambda(\lambda) . \quad (3.31b)$$

Wie Gustav Robert Kirchhoff im Jahr 1859 feststellte, müssen an für Wärmestrahlung undurchsichtigen Oberflächen, die sich mit ihrer Umgebung im vollständigen thermischen Gleichgewicht befinden (d. h. die gleiche Temperatur  $T$  aufweisen), die emittierte und absorbierte Strahlung übereinstimmen. Dies gilt auch für einzelne Bereiche des Spektrums, d. h.  $E_\lambda(\lambda, T) = \varepsilon_\lambda(\lambda, T)E_{\lambda,b}(\lambda, T) = G_{\lambda,a}(\lambda) = \alpha_\lambda(\lambda)G_\lambda(\lambda)$ , woraus die gelegentlich als *Kirchhoffsches Gesetz* bezeichnete Beziehung

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \alpha_\lambda(\lambda) \quad (3.32)$$

folgt. Ihre detaillierte Herleitung findet sich z. B. in [3.3, 3.4, 3.19, 3.20]. Obwohl (3.32) streng nur gilt, wenn alle beteiligten Oberflächen die gleiche Temperatur  $T$  haben, wird diese Beziehung auch für moderate Abweichungen von diesem Gleichgewichtszustand verwendet. Nicht mehr gültig ist sie für Strahlungssituationen bei denen die Temperaturen der beteiligten Oberflächen sich um mehrere 100 K unterscheiden. Im Folgenden wird die Gültigkeit von (3.32) vorausgesetzt.

### Totale Ein- und Ausstrahlung

Integration obiger spektraler Größen über das gesamte Spektrum liefert die emittierte totale Ausstrahlung

$$E(T) = \int_0^\infty E_\lambda(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T)E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda \quad (3.33)$$

und für den Spezialfall eines schwarzen Strahlers das *Stefan-Boltzmann Gesetz*

$$E_b(T) = \int_0^\infty E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 \left( e^{\frac{hc_0}{\lambda k T}} - 1 \right)} d\lambda = \sigma T^4 \quad (3.34)$$

mit der *Stefan-Boltzmann Konstante*  $\sigma = \frac{2}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c_0^2 h^3} = (5.6704 \pm 0.00004) 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$ .

Damit lässt sich die totale Emissivität

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_b(T)} \quad (3.35)$$

berechnen. Sie hängt ausschließlich von der Temperatur  $T$  und den Eigenschaften der ausstrahlenden Oberfläche ab.

In ähnlicher Weise erhält man die totale Einstrahlung

$$G = \int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda = G_a + G_r + G_t \quad (3.36)$$

mit ihren Komponenten

$$G_i = \int_0^\infty G_{\lambda,i}(\lambda) d\lambda \quad \forall i \in \{a, r, t\} \quad (3.37)$$

für den absorbierten, reflektierten und transmittierten Anteil. Für den totalen Absorptions-, Reflexions- und Transmissionsgrad folgt

$$\alpha = \frac{G_a}{G}, \quad \rho = \frac{G_r}{G}, \quad \tau = \frac{G_t}{G}. \quad (3.38)$$

Natürlich gilt auch hier wieder

$$1 = \alpha + \rho + \tau. \quad (3.39)$$

Im Gegensatz zu  $\varepsilon(T)$  hängen  $\alpha$ ,  $\rho$  und  $\tau$  damit nicht nur von der betrachteten Oberfläche selbst, sondern auch vom Spektrum der auftreffenden Strahlung und damit der Temperatur und den Oberflächeneigenschaften der jeweiligen Strahlungsquelle ab.

Man beachte, dass aus dem Kirchhoffschen Gesetz (3.32) im Allgemeinen nicht die Beziehung  $\varepsilon(T) = \alpha$  folgt, da

$$\varepsilon(T) = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda} \neq \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) G_\lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda} = \alpha. \quad (3.40)$$

Aus (3.40) erkennt man aber, dass  $\varepsilon(T) = \alpha$  gilt, wenn die Faktoren  $\varepsilon_\lambda(\lambda, T)$  und  $\alpha_\lambda(\lambda)$  nicht von  $\lambda$  abhängen. *Graue Strahler* haben diese besondere Eigenschaft, d. h. die Faktoren  $\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \varepsilon(T)$ ,  $\alpha_\lambda(\lambda) = \alpha$ ,  $\rho_\lambda(\lambda) = \rho$  und  $\tau_\lambda(\lambda) = \tau$  sind unabhängig von  $\lambda$  [3.4]. Damit ist das von einem grauen Strahler emittierte Spektrum proportional zu dem eines schwarzen Strahlers mit der gleichen Temperatur  $T$ . Im Folgenden werden nur noch graue Strahler betrachtet. Ein spezieller grauer Strahler ist der schwarze Strahler, für den aufgrund von  $\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = 1$ ,  $\alpha_\lambda(\lambda) = 1$ ,  $\rho_\lambda(\lambda) = 0$  und  $\tau_\lambda(\lambda) = 0$  gilt. An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, dass  $\varepsilon(T) = \alpha$  streng nur dann gilt, wenn die Quelle der auftreffenden Einstrahlung ebenfalls die Oberflächentemperatur  $T$  hat.

### Netto-Strahlungsmethode

Bislang wurden einige Grundlagen zur Wärmestrahlung an einer Oberfläche diskutiert. Für Wärmeübertragungsprobleme interessant ist der Wärmeaustausch durch thermische Strahlung zwischen zwei oder mehreren Körpern mit bekannten Oberflächentemperaturen. Für die Bestimmung dieses Wärmeaustausches stehen mehrere Verfahren zur Verfügung, z. B. die Netto-Strahlungsmethode [3.3, 3.4, 3.16, 3.17], die Zonen-Methode [3.19–3.21], die Monte-Carlo Methode [3.19, 3.20] und die Methode der diskreten Ordinaten [3.19]. Im Folgenden wird die Netto-Strahlungsmethode kurz für graue, diffuse Strahler skizziert. Der Einfachheit halber werden ausschließlich intransparente Körper betrachtet, d. h. es gilt  $\tau = 0$  und  $\varepsilon = \alpha = 1 - \rho$ ; die Theorie lässt sich aber einfach auf semitransparente Körper erweitern.

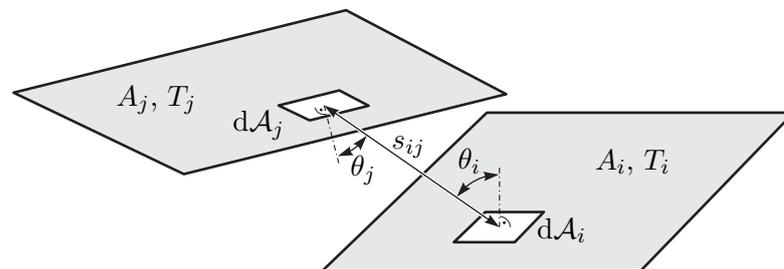


Abbildung 3.8: Strahlungsaustausch zwischen zwei Flächen.

Abbildung 3.8 zeigt zwei strahlende Oberflächen  $A_i$  und  $A_j$  mit jeweils homogen verteilten Oberflächentemperaturen  $T_i$  und  $T_j$ . Es sei nun  $G_i$  die auf  $A_i$  auftreffende totale Einstrahlung in  $\text{W}/\text{m}^2$  und  $J_i$  die von  $A_i$  (gleichmäßig) abgehende totale Ausstrahlung in  $\text{W}/\text{m}^2$ . Da  $J_i$  also neben der von  $A_i$  emittierten Ausstrahlung  $\varepsilon_i \sigma T_i^4$  den reflektierten Anteil von  $G_i$  beinhaltet, gilt

$$J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + \rho_i G_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) G_i . \quad (3.41)$$

Es sein nun  $F_{ij} J_i$  jener Anteil von  $J_i$ , der auf  $A_j$  auftrifft. Die noch zu bestimmende dimensionslose Zahl  $F_{ij} \in [0, 1]$  wird *Sichtfaktor* genannt und hängt ausschließlich von der Form und der relativen Position der Flächen  $A_i$  und  $A_j$  ab. Die von einem infinitesimalen Flächenelement  $dA_i$  insgesamt abgegebene Strahlungsenergie beträgt  $dA_i J_i$  in  $\text{W}$ . Die von einem infinitesimalen Flächenelement  $dA_i$  in eine durch den Strahl  $s_{ij}$  (siehe Abbildung 3.8) definierte Raumrichtung abgegebene Strahlungsenergie beträgt

$$dA_i J_i \frac{\cos(\theta_i)}{\pi} \quad (3.42)$$

in  $\text{W}/\text{sr}$ . Hierbei ist  $\theta_i$  der Winkel zwischen  $s_{ij}$  und der Flächennormalen auf  $dA_i$ .

**Bemerkung 3.3.** Wird (3.42) im gesamten über  $dA_i$  liegenden Halbraum (mit dem Raumwinkel  $\Omega = 2\pi \text{ sr}$ , siehe Abbildung 3.9) integriert, so erhält man, wie es sein

muss,

$$\int_{2\pi \text{sr}} d\mathcal{A}_i J_i \frac{\cos(\theta_i)}{\pi} d\Omega = d\mathcal{A}_i J_i \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta_i)}{\pi} \underbrace{\sin(\theta_i) d\theta_i d\varphi}_{d\Omega} = d\mathcal{A}_i J_i .$$

Dies erklärt auch die Notwendigkeit des Normierungsfaktors  $1/\pi$  in (3.42).

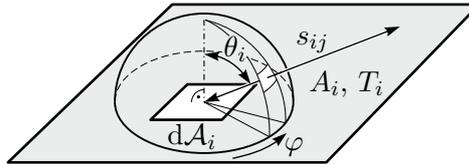


Abbildung 3.9: Halbraum über  $d\mathcal{A}_i$ .

Aus Sicht von  $d\mathcal{A}_i$  beträgt der von einem in der Entfernung  $s_{ij}$  gelegenen infinitesimalen Flächenelement  $d\mathcal{A}_j$  eingenommene Raumwinkel  $\cos(\theta_j) d\mathcal{A}_j / s_{ij}^2$ . Folglich trifft von der gesamten von  $d\mathcal{A}_i$  abgehenden Strahlungsenergie  $d\mathcal{A}_i J_i$  der infinitesimale Anteil

$$d\mathcal{A}_i J_i \frac{\cos(\theta_i)}{\pi} \frac{\cos(\theta_j) d\mathcal{A}_j}{s_{ij}^2} \quad (3.43)$$

am infinitesimalen Flächenelement  $d\mathcal{A}_j$  auf. Integration von (3.43) über die beiden Flächenstücke  $A_i$  und  $A_j$  liefert

$$J_i \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{\pi s_{ij}^2} d\mathcal{A}_j d\mathcal{A}_i . \quad (3.44)$$

Das ist jene gesamte Strahlungsenergie  $F_{ij} A_i J_i$ , die von  $A_i$  abgeht und auf  $A_j$  auftrifft. Setzt man sie ins Verhältnis zur gesamten von  $A_i$  abgehenden Strahlungsenergie  $A_i J_i$ , so ergibt sich die Definitionsgleichung

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{\pi s_{ij}^2} d\mathcal{A}_j d\mathcal{A}_i . \quad (3.45)$$

für Sichtfaktoren. Aus ihr folgt unmittelbar die als *Reziprozitätsgesetz* bekannte Beziehung

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} . \quad (3.46)$$

Sie kann bei der Berechnung von Sichtfaktoren nützlich sein. Da für viele geometrische Fälle exakte Lösungsformeln für  $F_{ij}$  existieren (siehe z. B. [3.19, 3.20, 3.22]), entfällt häufig die Berechnung des Mehrfachintegrals in (3.45).

Wie in Abbildung 3.10 angedeutet, bestehe ein geschlossener Strahlungsraum aus  $N$  Teilstücken mit den Oberflächen  $A_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) und den zugehörigen homogenen Oberflächentemperaturen  $T_i$ . Eine Bilanz der von der Fläche  $A_i$  abgehenden totalen

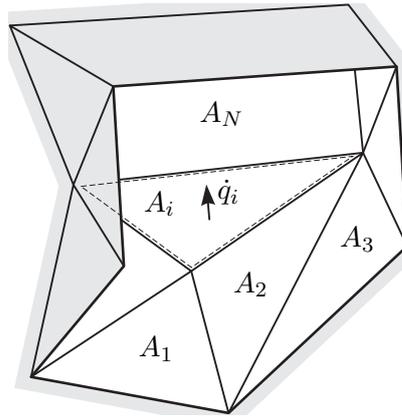


Abbildung 3.10: Schnitt durch einen geschlossenen Strahlungsraum.

Ausstrahlung liefert

$$J_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \quad (3.47)$$

und daher die als *Summationsregel* bekannte Beziehung

$$1 = \sum_{j=1}^N F_{ij} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} . \quad (3.48)$$

Mit dem Reziprozitätsgesetz (3.46) und der Summationsregel (3.48) wurden bereits zwei Formeln gefunden, die zur effizienten Berechnung von Sichtfaktoren ausgenutzt werden können. Weitere Vereinfachungen ergeben sich häufig, da für ebene Flächen und konvexe Körper  $F_{ii} = 0$  gilt. Außerdem lassen sich Sichtfaktoren addieren und subtrahieren.

**Aufgabe 3.5 (Zusammenfassen von Flächen).** Zeigen Sie, dass wenn zwei Flächen  $A_{i_1}$  und  $A_{i_2}$  zu einer Fläche  $A_i = A_{i_1} + A_{i_2}$  zusammengefasst werden, basierend auf (3.45)  $A_i F_{ij} = A_{i_1} F_{i_1 j} + A_{i_2} F_{i_2 j}$  für  $j \neq i_1$ ,  $j \neq i_2$  und  $j \neq i$  sowie  $A_i F_{ii} = A_{i_1} (F_{i_1 i_1} + F_{i_1 i_2}) + A_{i_2} (F_{i_2 i_1} + F_{i_2 i_2})$  gilt.

Aus dieser Eigenschaft lassen sich einfach Regeln für die Subtraktion von Flächen ableiten. Eine Bilanz der auf die Fläche  $A_j$  auftreffenden Strahlungsenergie liefert gemeinsam mit dem Reziprozitätsgesetz (3.46)

$$A_j G_j = \sum_{i=1}^N A_i J_i F_{ij} = \sum_{i=1}^N A_j J_i F_{ji} \quad (3.49)$$

und daher unter Verwendung von (3.41)

$$G_j = \sum_{i=1}^N F_{ji} J_i = \sum_{i=1}^N F_{ji} (\varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) G_i) . \quad (3.50)$$

Nun sei

$$\dot{q}_i = J_i - G_i = \varepsilon_i(\sigma T_i^4 - G_i) \quad (3.51)$$

die Nettowärmestromdichte die die Oberfläche  $A_i$  verlässt (vgl. Abbildung 3.10). An dieser Stelle ist es günstig auf Matrixschreibweise mit  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_i]_{i=1,\dots,N}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_i]_{i=1,\dots,N}$ ,  $\mathbf{T}^4 = [T_i^4]_{i=1,\dots,N}$ ,  $\mathbf{G} = [G_i]_{i=1,\dots,N}$  und  $\mathbf{F} = [F_{ij}]_{i=1,\dots,N,j=1,\dots,N}$  zu wechseln. Aus (3.50) und (3.51) folgen damit direkt die von den Oberflächen austretenden Nettowärmestromdichten

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\})\mathbf{F})^{-1} \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\sigma\mathbf{T}^4 \\ &= \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}(\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{F})\sigma\mathbf{T}^4 \end{aligned} \quad (3.52)$$

zufolge von thermischer Strahlung.

**Aufgabe 3.6 (Wärmestromdichten zufolge von thermischer Strahlung).** Berechnen Sie ausgehend von (3.50) und (3.51) beide in (3.52) dargestellten Ergebnisse.

**Aufgabe 3.7 (Wärmestrahlung zwischen parallelen unendlich ausgedehnten Platten).** Die beiden in Abbildung 3.11 skizzierten, durch Vakuum getrennten, unendlich ausgedehnten, ebenen, parallelen Platten haben die festen Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ . Die Oberflächen sind graue, diffuse Strahler, haben die Emissivitäten  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  und tauschen mittels thermischer Strahlung Energie aus.

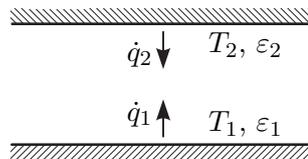


Abbildung 3.11: Unendlich ausgedehnte parallele Platten.

a) Begründen Sie formal warum hier für die Sichtfaktoren

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

gilt.

b) Berechnen Sie die Wärmestromdichte  $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2$ .

**Lösung von Aufgabe 3.7.**

b)

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{\sigma\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

**Beispiel 3.2 (Rohrreaktor mit Wärmeverlust durch Mantel).** Abbildung 3.12 zeigt den Querschnitt eines Rohrreaktors der durch eine Vakuumschicht isoliert ist. Aufgrund der im Innenrohr ablaufenden exothermen chemischen Reaktion wird stationär der auf die Rohrlänge bezogene Wärmestrom  $\dot{q}^\circ$  in W/m von der Reaktionskammer gleichmäßig an den Rohrmantel abgegeben. Alle Oberflächen sind graue, diffuse Strahler. Das Innenrohr mit dem Durchmesser  $d$  hat die Emissivität  $\varepsilon_1$ . Das Außenrohr mit dem Durchmesser  $D$  hat beidseitig die Emissivität  $\varepsilon_2$ . Es gibt durch Konvektion (Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$ ) Wärme an die umgebende Luft mit der festen Temperatur  $T_\infty$  ab. Zusätzlich geht Wärme über thermische Strahlung an die umgebenden Oberflächen, welche im Mittel ebenfalls die feste Temperatur  $T_\infty$  besitzen, verloren. Die Rohrwände seien vernachlässigbar dünn. Für die Berechnung der thermischen Strahlung sei der Reaktor im Vergleich zu den ihn umgebenden Oberflächen vernachlässigbar klein.

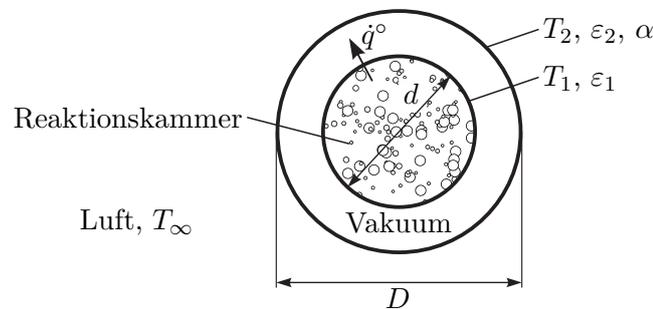


Abbildung 3.12: Rohrreaktor mit Wärmeverlust durch Mantel.

- a) Wie groß darf  $\dot{q}^\circ$  maximal sein, damit das Außenrohr die bei Berührung durch Menschen ungefährliche Temperatur  $T_{2,max}$  nicht überschreitet?

Da das innere Rohr von außen gesehen ein konvexer Körper ist, gilt für den Sichtfaktor  $F_{11} = 0$  und aus der Summationsregel (3.48) folgt

$$F_{11} + F_{12} = F_{12} = 1 . \quad (3.55)$$

Mit dem Reziprozitätsgesetz (3.46) und der Rohrlänge  $l$  erhält man

$$A_1 F_{12} = l d \pi F_{12} = A_2 F_{21} = l D \pi F_{21} \quad (3.56)$$

und damit

$$F_{21} = \frac{d}{D} . \quad (3.57)$$

Der Sichtfaktor  $F_{22}$  lässt sich wiederum über die Summationsregel (3.48)  $F_{21} + F_{22} = 1$  zu

$$F_{22} = 1 - \frac{d}{D} \quad (3.58)$$

bestimmen. Mit der Sichtfaktormatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{d}{D} & 1 - \frac{d}{D} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

errechnen sich die Nettowärmestromdichten nach (3.52) in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{d}{D} & \frac{d}{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}-\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -(1-\varepsilon_1) \\ -(1-\varepsilon_2)\frac{d}{D} & 1 - (1-\varepsilon_2)\left(1 - \frac{d}{D}\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}-(\mathbf{E}-\text{diag}\{\varepsilon\})\mathbf{F}}^{-1} \underbrace{\sigma \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}}_{\text{diag}\{\varepsilon\}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^4} \quad (3.60)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)\frac{d}{D}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{d}{D} & \frac{d}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Im stationären Fall muss die von der Reaktionskammer an den inneren Rohrmantel abgegebene Wärmestromdichte  $\dot{q}^\circ/(d\pi)$  gleich der Nettowärmestromdichte  $\dot{q}_1$  sein und die vom äußeren Rohrmantel an die Umgebung abgegebene Wärmestromdichte zufolge Konvektion und Strahlung muss gleich der Nettowärmestromdichte  $-\dot{q}_2$  sein, d. h.

$$\frac{\dot{q}^\circ}{d\pi} = \dot{q}_1 \quad \text{und} \quad \alpha(T_2 - T_\infty) + \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_\infty^4) = -\dot{q}_2. \quad (3.62)$$

Da gemäß (3.61) gilt  $\dot{q}_2 = -\frac{d}{D}\dot{q}_1$ , folgt aus (3.62) unmittelbar die Beziehung

$$\dot{q}^\circ = D\pi \left( \alpha(T_2 - T_\infty) + \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_\infty^4) \right) \quad (3.63)$$

und daher muss der auf die Rohrlänge bezogene Wärmestrom  $\dot{q}^\circ$  die Ungleichung

$$\dot{q}^\circ \leq D\pi \left( \alpha(T_{2,\max} - T_\infty) + \varepsilon_2 \sigma (T_{2,\max}^4 - T_\infty^4) \right) \quad (3.64)$$

einhalten, damit die Temperatur  $T_2$  am äußeren Rohrmantel den Wert  $T_{2,\max}$  nicht übersteigt.

- b) Welche Temperatur  $T_1$  stellt sich am Innenrohr ein, wenn der Reaktor bei der in Punkt a) berechneten Volllast betrieben wird?

Aus der Stationaritätsbeziehung  $\dot{q}^\circ = d\pi\dot{q}_1$  (siehe (3.62)) lässt sich mit Hilfe von (3.61) und (3.64) die zu  $T_{2,\max}$  zugehörige Temperatur des inneren Rohrs  $T_{1,\max}$  zu

$$T_{1,\max} = \left( T_{2,\max}^4 + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{D}{\varepsilon_1 d} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \left( \alpha(T_{2,\max} - T_\infty) + \sigma \varepsilon_2 (T_{2,\max}^4 - T_\infty^4) \right) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.65)$$

berechnen.

**Aufgabe 3.8.** Eine mit SMD-Bausteinen bestückte und Verzinnungspaste bestrichene Leiterplatte soll in einem Reflow-Ofen verlötet werden. Die Konfiguration ist in Abbildung 3.13 skizziert. Die Wärme wird durch Konvektion und thermische Strahlung auf die Leiterplatte übertragen.

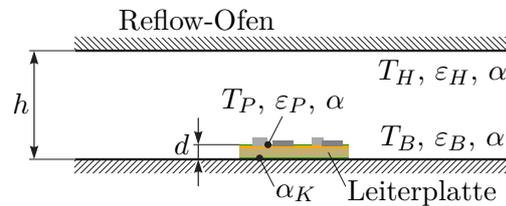


Abbildung 3.13: Leiterplatte in einem Reflow-Ofen.

Die Oberfläche der Leiterplatte sei vernachlässigbar klein gegenüber allen anderen Oberflächen im Ofen. Der Boden des Ofens hat die bekannte feste Temperatur  $T_B$  und die Emissivität  $\varepsilon_B$ . Die Decke des Ofens wird mit geregelten Heizelementen auf der konstanten Temperatur  $T_H$  gehalten und besitze die Emissivität  $\varepsilon_H$ . Die Höhe  $h$  des Ofens sei klein gegenüber seinen sonstigen Abmessungen. Folglich können Boden und Decke als unendlich ausgedehnte, ebene parallele Platten betrachtet werden. Für den konvektiven Wärmeübergang zwischen Luft und allen Oberflächen im Ofen gelte der Konvektionskoeffizient  $\alpha$ . Aufgrund der kleinen Abmessungen, kann davon ausgegangen werden, dass das Luftvolumen keine Wärmestrahlung absorbiert oder emittiert. Die Leiterplatte habe die Dicke  $d \ll h$ , die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und die Emissivität  $\varepsilon_P$ . Alle Seitenflächen der Leiterplatte sowie die SMD-Bausteine können für den Wärmeaustausch mittels thermischer Strahlung und Konvektion vernachlässigt werden. Der Wärmeübergangskoeffizient an der Kontaktfläche zwischen Leiterplatte und Boden sei  $\alpha_K$ . Die Temperatur der Luft im Ofen sei homogen verteilt.

Auf welche Temperatur  $T_H$  muss die Decke des Ofens geregelt werden, damit sich an der oberen Oberfläche der Leiterplatte stationär die erforderliche Löttemperatur  $T_P$  einstellt? Es genügt, die Bestimmungsgleichung für die unbekannte Temperatur  $T_H$  anzugeben.

**Lösung von Aufgabe 3.8.**

$$0 = \sigma \frac{(1 - \varepsilon_H)\varepsilon_B\varepsilon_P}{(1 - \varepsilon_B)\varepsilon_H + \varepsilon_B} T_B^4 + \sigma \frac{\varepsilon_H\varepsilon_P}{(1 - \varepsilon_H)\varepsilon_B + \varepsilon_H} T_H^4 - \sigma\varepsilon_P T_P^4 + \alpha \left( \frac{T_H + T_B}{2} - T_P \right) + \frac{T_B - T_P}{\frac{1}{\alpha_K} + \frac{d}{\lambda}}$$

Die bisherigen Ergebnisse können direkt auch für 2-dimensionale Geometrien verwendet werden, allerdings vereinfacht sich in diesem Fall die in (3.45) definierte Berechnung von Sichtfaktoren erheblich. Die Annahme einer 2-dimensionalen Geometrie ist dann exakt erfüllt, wenn es sich um einen prismatischen Strahlungsraum (vgl. Abbildung 3.14a) mit unendlicher Längenausdehnung handelt. Die Flächen  $A_i$  sind dann vollständig durch die

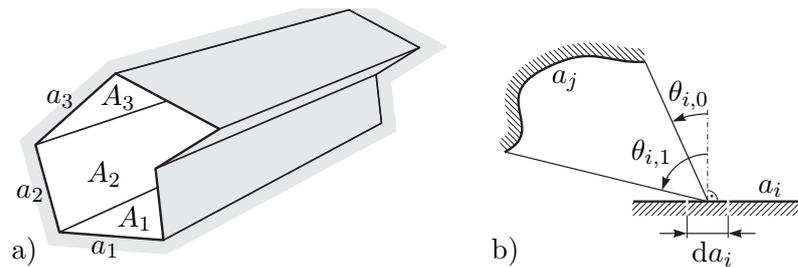


Abbildung 3.14: Vereinfachung bei 2-dimensionaler Geometrie, a) prismastrahlungsraum, b) Integration entlang einer Kontur.

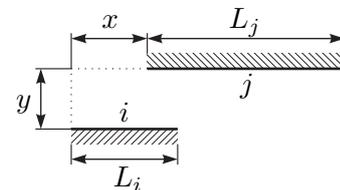
zugehörigen (nicht notwendigerweise geraden) Konturen mit den abgewickelten Längen  $a_i$  definiert. Man kann zeigen, dass in solchen 2-dimensionalen Geometrien für den Sichtfaktor

$$F_{ij} = \frac{1}{a_i} \int_{a_i} \int_{a_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{2s_{ij}} da_j da_i = \frac{1}{2a_i} \int_{a_i} \sin(\theta_{i,1}) - \sin(\theta_{i,0}) da_i \quad (3.66)$$

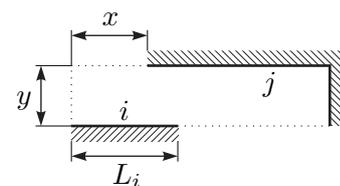
gilt. Die Winkel  $\theta_{i,0}$  und  $\theta_{i,1}$  sind in Abbildung 3.14b definiert. In (3.66) kann das Integral entlang der Kontur  $a_i$  sehr häufig direkt analytisch berechnet werden. Ergebnisse für einige Fälle, wo eine analytische Berechnung leicht möglich ist, sind in Tabelle 3.1 angegeben.

Tabelle 3.1: Sichtfaktoren für einfache 2-dimensionale Geometrien.

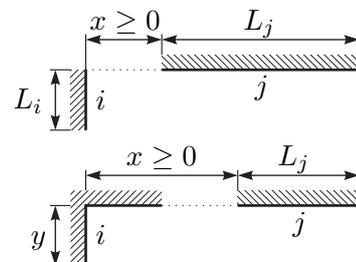
$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left( \sqrt{y^2 + (x + L_j)^2} + \sqrt{y^2 + (x - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + (x + L_j - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + x^2} \right)$$



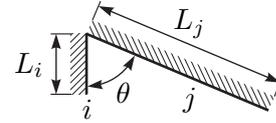
$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left( L_i + \sqrt{y^2 + (x - L_i)^2} - \sqrt{y^2 + x^2} \right)$$



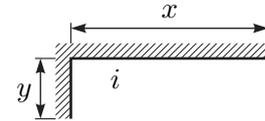
$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left( L_j + \sqrt{y^2 + x^2} - \sqrt{y^2 + (x + L_j)^2} \right)$$



$$F_{ij} = \frac{1}{2L_i} \left( L_i + L_j - \sqrt{L_i^2 + L_j^2 - 2L_i L_j \cos(\theta)} \right)$$



$$F_{ii} = 1 - \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{y + x}$$



**Aufgabe 3.9** (Sichtfaktoren für einfache 2-dimensionale Geometrien). Rechnen Sie die in Tabelle 3.1 angegebenen Ergebnisse mit Hilfe von (3.66) nach.

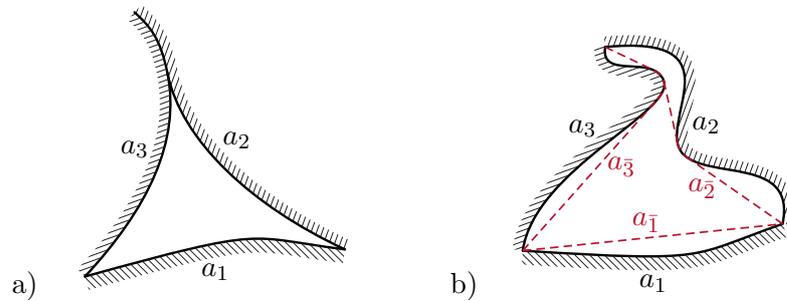


Abbildung 3.15: 2-dimensionaler geschlossener Strahlungsraum mit drei Flächen, a) Flächen deren Sichtfaktor auf sich selbst Null ist, b) allgemeine Flächen mit drei zwischen ihren Berührungspunkten im Inneren des Strahlungsraums gespannten Schnüren.

Für die Berechnung von Sichtfaktoren für 2-dimensionale Geometrien steht darüber hinaus die sogenannte *Crossed-Strings Methode* [3.23] zur Verfügung. Vorbereitend soll dafür zunächst ein 2-dimensionaler geschlossener Strahlungsraum mit genau drei Flächen, deren Sichtfaktor auf sich selbst jeweils Null ist, betrachtet werden. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 3.15a skizziert. In solchen Strahlungsräumen gilt für die Sichtfaktoren

$$F_{12} = \frac{a_1 + a_2 - a_3}{2a_1} \quad (3.67a)$$

$$F_{13} = \frac{a_1 + a_3 - a_2}{2a_1} \quad (3.67b)$$

$$F_{23} = \frac{a_2 + a_3 - a_1}{2a_2} \quad (3.67c)$$

Für Flächen, deren Sichtfaktor auf sich selbst jeweils Null ist, gilt, dass sie ins Innere des Strahlungsraums konvex sind oder eine andere Fläche flächig berühren (siehe Abbildung 3.15a).

**Aufgabe 3.10.** Leiten Sie die Beziehungen (3.67) her. Sie können dazu z.B. die Summationsregel (3.48), das Reziprozitätsgesetz (3.46) und die Identität  $F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$  benutzen.

Für allgemeine 2-dimensionale geschlossene Strahlungsräume mit drei Konturen können, wie in Abbildung 3.15b angedeutet, im Inneren des Strahlungsraums drei Schnüre (Englisch: *strings*) zwischen den Endpunkten der Konturen gespannt werden. Diese drei Schnüre sind in Abbildung 3.15b rot dargestellt und haben die abgewickelten Längen  $a_{\bar{1}}$ ,  $a_{\bar{2}}$  und  $a_{\bar{3}}$ . Diese drei Schnüre bilden wieder einen geschlossenen Strahlungsraum und deren Sichtfaktor auf sich selbst ist jeweils Null. Folglich gilt gemäß (3.67) für ihre Sichtfaktoren

$$F_{\bar{1}\bar{2}} = \frac{a_{\bar{1}} + a_{\bar{2}} - a_{\bar{3}}}{2a_{\bar{1}}} \quad (3.68a)$$

$$F_{\bar{1}\bar{3}} = \frac{a_{\bar{1}} + a_{\bar{3}} - a_{\bar{2}}}{2a_{\bar{1}}} \quad (3.68b)$$

$$F_{\bar{2}\bar{3}} = \frac{a_{\bar{2}} + a_{\bar{3}} - a_{\bar{1}}}{2a_{\bar{2}}} . \quad (3.68c)$$

Da ohne die Schnur  $a_{\bar{2}}$  genau die gleiche von der Schnur  $a_{\bar{1}}$  abgehende Strahlungsenergie auf der allgemeinen Kontur  $a_2$  auftrifft wie sie auf der Schnur  $a_{\bar{2}}$  auftreten würde, gilt

$$F_{\bar{1}\bar{2}} = F_{12} = \frac{a_2}{a_{\bar{1}}} F_{2\bar{1}} , \quad (3.69)$$

wobei hier das Reziprozitätsgesetz (3.46) verwendet wurde. Völlig analog kann die Identität  $F_{2\bar{1}} = F_{21}$  begründet werden. Daraus folgt schließlich

$$F_{12} = \frac{a_{\bar{1}} + a_{\bar{2}} - a_{\bar{3}}}{2a_1} \quad (3.70a)$$

und analog für die übrigen Sichtfaktoren

$$F_{13} = \frac{a_{\bar{1}} + a_{\bar{3}} - a_{\bar{2}}}{2a_1} \quad (3.70b)$$

$$F_{23} = \frac{a_{\bar{2}} + a_{\bar{3}} - a_{\bar{1}}}{2a_2} . \quad (3.70c)$$

Im nächsten Schritt soll die zentrale Formel der Crossed-Strings Methode [3.23] für Sichtfaktoren zwischen zwei beliebigen Konturen, deren Sichtfeld auch durch Hindernisse eingengt sein kann, hergeleitet werden. Man betrachte dazu die 2-dimensionale Geometrie in Abbildung 3.16 mit den Konturen  $a_i$  und  $a_j$ . Gesucht ist der Sichtfaktor  $F_{ij}$ . Zwischen den Endpunkten von  $a_i$  und  $a_j$  werden im Inneren des Strahlungsraums Schnüre mit den abgewickelten Längen  $a_{\bar{i}}$ ,  $a_{\bar{j}}$ ,  $a_L$ ,  $a_R$ ,  $a_{LR}$  und  $a_{RL}$  gespannt. Unter Berücksichtigung von  $F_{\bar{i}\bar{i}} = 0$  und der Formel (3.68) für Sichtfaktoren zwischen drei Flächen, deren Sichtfaktor auf sich selbst jeweils Null ist, lautet die Summationsregel für die Schnur  $a_{\bar{i}}$

$$1 = F_{\bar{i}L} + F_{\bar{i}j} + F_{\bar{i}R} = \frac{a_{\bar{i}} + a_L - a_{RL}}{2a_{\bar{i}}} + F_{ij} + \frac{a_{\bar{i}} + a_R - a_{LR}}{2a_{\bar{i}}} . \quad (3.71)$$

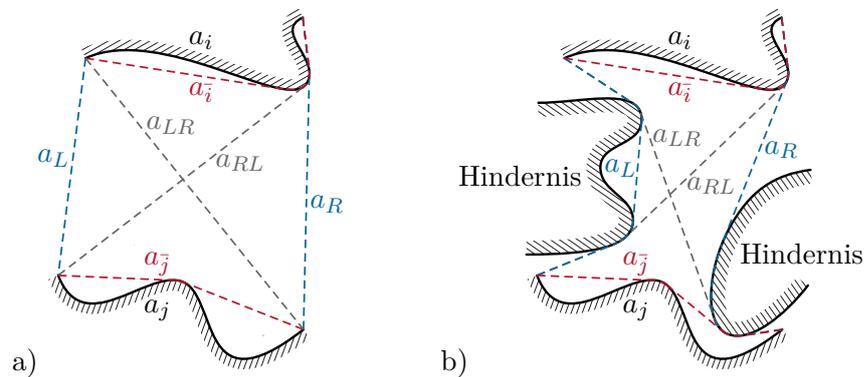


Abbildung 3.16: Anwendung der Crossed-Strings Methode, a) Situation ohne Hindernisse  
b) Situation mit Hindernissen.

Daraus folgt mit dem Reziprozitätsgesetz (3.46)

$$F_{j\bar{i}} = \frac{a_{\bar{i}}}{a_j} F_{ij} = \frac{a_{LR} + a_{RL} - a_L - a_R}{2a_j} . \quad (3.72)$$

Da ohne die Schnur  $a_{\bar{i}}$  genau die gleiche von der Kontur  $a_j$  abgehende Strahlungsenergie auf der allgemeinen Kontur  $a_i$  auftrifft wie sie auf der Schnur  $a_{\bar{i}}$  auftreten würde, gilt  $F_{j\bar{i}} = F_{ji}$  und schließlich mit dem Reziprozitätsgesetz (3.46)

$$F_{ij} = \frac{a_j}{a_i} F_{ji} = \frac{a_{LR} + a_{RL} - a_L - a_R}{2a_i} . \quad (3.73a)$$

Diese zentrale Beziehung der Crossed-Strings Methode kann in der folgenden leicht merkbaren Form angegeben werden

$$F_{ij} = \frac{\text{Länge der gekreuzten Schnüre} - \text{Länge der seitlichen Schnüre}}{2 \times \text{abgewinkelte Länge der Ausgangsfläche } i} . \quad (3.73b)$$

Die Crossed-Strings Methode ist auch anwendbar, wenn sich die zwei Flächen  $a_i$  und  $a_j$  berühren. Wird der Sichtkanal zwischen zwei Flächen  $a_i$  und  $a_j$  durch Hindernisse in zwei oder mehrere Kanäle aufgeteilt, so sind für diese Kanäle separat Sichtfaktoren zu berechnen und schließlich zu addieren (siehe nachfolgendes Beispiel 3.3).

**Beispiel 3.3** (Crossed-Strings Methode bei Aufteilung des Sichtkanals durch Hindernis).

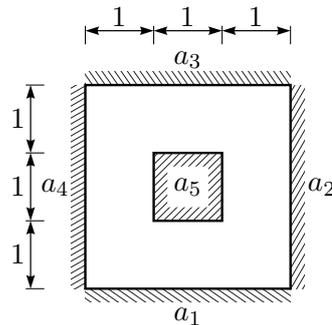


Abbildung 3.17: 2-dimensionaler geschlossener Strahlungsraum mit innenliegendem Hindernis.

Es sollen für den in Abbildung 3.17 gezeigten 2-dimensionalen geschlossenen Strahlungsraum mit fünf Flächen die Sichtfaktoren  $F_{1j}$  mit  $j = 1, \dots, 5$  berechnet werden. Alle übrigen Sichtfaktoren folgen analog aufgrund von Symmetrie, rotatorischer Periodizität und dem Reziprozitätsgesetz. Natürlich gilt  $F_{11} = 0$ . Für die Berechnung wird die Crossed-Strings Methode verwendet. Von der Fläche  $a_1$  gibt es jeweils nur einen Sichtkanal zu den Flächen  $a_2$ ,  $a_4$  und  $a_5$ . Daher können die folgenden Sichtfaktoren direkt gemäß (3.73) berechnet werden.

$$F_{12} = F_{14} = \frac{3 + 3 - 0 - 2\sqrt{5}}{2 \times 3} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$F_{15} = \frac{\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} - (\sqrt{5} + 1)}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

Hierbei wurde für die Fläche  $a_5$  angenommen, dass die beiden Endpunkte der Kontur in der linken oberen Ecke liegen. Zwischen den Flächen  $a_1$  und  $a_3$  existieren zwei Sichtkanäle mit symmetrischer Geometrie. Die Sichtfaktoren über diese beiden Kanäle sind identisch und müssen addiert werden.

$$F_{13} = 2 \underbrace{\frac{2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 3 - (2\sqrt{5} + 1)}{2 \times 3}}_{\text{Sichtfaktor für einen Sichtkanal}} = 2 \frac{\sqrt{5} - 2}{3}$$

Natürlich gilt  $\sum_{j=1}^5 F_{1j} = 1$ , d. h. die Summationsregel (3.48) ist erfüllt.

**Aufgabe 3.11 (Sichtfaktoren für einfache 2-dimensionale Geometrien).** Rechnen Sie die in Tabelle 3.1 angegebenen Ergebnisse mit Hilfe der Crossed-Strings Methode nach.

**Aufgabe 3.12.** Abbildung 3.18 zeigt den Aufbau eines aus Blechlamellen bestehenden fixen Sonnenschutzsystems an einer Hausmauer. Berechnen Sie den Sichtfaktor  $F_{LL}$

zwischen zwei benachbarten Lamellen, den Sichtfaktor  $F_{LM}$  von einer Lamelle zur äußeren Oberfläche der Hausmauer und den Sichtfaktor  $F_{L\infty}$  von einer Lamelle zur Umgebung. Gehen sie von einer 2-dimensionalen Geometrie aus.

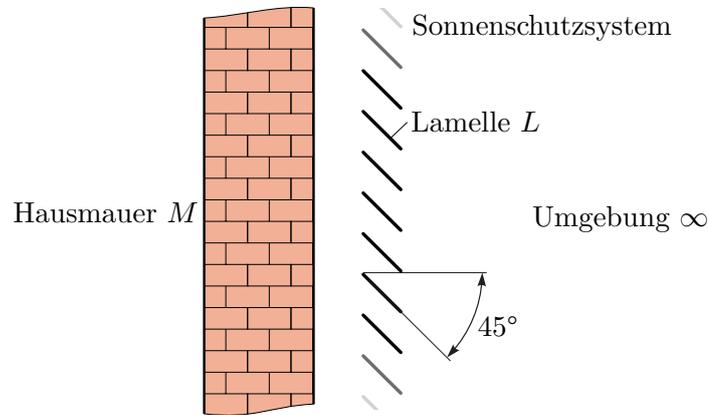


Abbildung 3.18: Sonnenschutzsystem.

*Lösung von Aufgabe 3.12.* Als Einheitslänge wird der vertikale Abstand zwischen zwei benachbarten Lamellen verwendet. Mit der Crossed-Strings Methode folgt zunächst gemäß (3.73) für den Sichtfaktor zwischen zwei benachbarten Lamellen

$$F_{LL} = \frac{\sqrt{5} + 1 - 1 - 1}{2 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4\sqrt{2}}.$$

Aufgrund von Symmetrie muss  $F_{LM} = F_{L\infty}$  gelten, so dass aus der Summationsregel (3.48)

$$F_{LM} = F_{L\infty} = \frac{1 - 2F_{LL}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 1 - \sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$$

folgt. Alternativ können auch diese Sichtfaktoren direkt mit der Crossed-Strings Methode gemäß (3.73) berechnet werden.

$$F_{LM} = F_{L\infty} = \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{5} - 1}{2 \times 2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + 1 - \sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$$

### 3.3 Wärmequellen

Wärme kann nicht originär erzeugt werden, sondern entsteht aus anderen Energieformen durch Umwandlung. Derartige Umwandlungsvorgänge und die Rückumwandlung von Wärme in andere Energieformen (soweit diese möglich ist) werden z. B. in der Thermodynamik studiert. Typische andere Energieformen sind mechanische Energie, elektrische Energie, chemische Energie, Strahlungsenergie und Kernenergie. Obwohl Wärme nur

durch Umwandlung entstehen kann, ist es für Wärmebilanzen oft günstig von Wärmequellen zu sprechen. Im Folgenden werden einige Beispiele einfacher Umwandlungsvorgänge diskutiert.

### Mechanische Reibung

In Abschnitt 2.2.5 wurde vorgestellt wie mechanische Arbeit durch Dissipation in Wärme umgewandelt werden kann. Reibung tritt typischerweise an der Berührfläche zweier Körper auf oder in sich deformierenden Körpern oder Fluiden. Der Einfachheit halber wird hier nur der erste Fall behandelt.

Zufolge einer Reibkraft  $\mathbf{f}_r$  (resultierende Reibkraft) zwischen zwei Oberflächen, die sich berühren, wird nur dann mechanische Energie in Wärme umgewandelt, wenn sich die zwei Flächen relativ zueinander verschieben. Tun sie dies mit der Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , so wird dem System mechanische Arbeit mit der Leistung

$$P_r = -\mathbf{f}_r \cdot \mathbf{v} \quad (3.74)$$

entzogen. Da die Reibkraft stets der Bewegung entgegenwirkt, gilt  $P_r \geq 0$ .  $P_r$  kann in mechanische Verformungsenergie (plastische Deformation der Reibflächen, Bildung von Kratzern und Abrieb) oder Wärmeenergie umgewandelt werden. Welcher Anteil tatsächlich in Wärme umgewandelt wird, hängt von der jeweiligen Anwendung ab. In Bremssystemen beispielsweise soll ein möglichst großer Anteil in Wärme und nur ein geringer Anteil in Abriebenergie umgewandelt werden. Handelt es sich, anders als bei der für (3.74) postulierten translatorischen Relativbewegung, um einen rotatorischen Reibvorgang, so entspricht die Reibleistung alternativ zu (3.74) dem negativen inneren Produkt aus Reibmoment und Drehwinkelgeschwindigkeit.

Die durch Reibung entstehende Wärme wird direkt an der Reibfläche (oder im deformierten Volumen) frei. Es ist daher oft zweckmäßig, statt  $P_r$  eine auf die Fläche (das Volumen) bezogene Wärmequelle, d. h. eine Quellendichte in  $\text{W}/\text{m}^2$  ( $\text{W}/\text{m}^3$ ), zu verwenden.

### Ohmsche Last

Fließt durch ein infinitesimales Volumenelement  $d\mathcal{V}$  eines elektrischen Leiters Strom mit der Stromdichte  $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ , so muss das Element gemäß dem Ohmschen Gesetz einem elektrischen Feld

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \rho_e(\mathbf{x}, T)\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \quad (3.75)$$

ausgesetzt sein [3.24]. Hier bezeichnet  $\rho_e > 0$  den spezifischen Ohmschen Widerstand des Materials, der im Allgemeinen vom Ort  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  und der lokalen Temperatur  $T$  abhängt. Häufig wird der Ansatz

$$\rho_e(\mathbf{x}, T) = \rho_{e,0}(\mathbf{x})(1 + \gamma(\mathbf{x})(T - T_0)) \quad (3.76)$$

mit dem Temperaturkoeffizienten  $\gamma$  und der Referenztemperatur  $T_0$  zur Beschreibung dieses Effekts verwendet [3.24].

Der Stromfluss verursacht Interaktionen zwischen den sich bewegenden Elektronen und dem Atomgitter des Leiters, was zu einer Erhöhung der im Material gespeicherten

thermischen Energie führt. In einem Ohmschen Widerstand wird daher am Punkt  $\mathbf{x}$  die Leistungsdichte

$$g(t, \mathbf{x}, T) = \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \rho_e(\mathbf{x}, T) \|\mathbf{J}(t, \mathbf{x})\|_2^2 = \frac{\|\mathbf{E}(t, \mathbf{x})\|_2^2}{\rho_e(\mathbf{x}, T)} \quad (3.77)$$

[3.24] dissipiert, d. h. in Wärme umgesetzt. Diese Beziehung lässt sich aus dem Verlust an potentieller Energie, den Ladungsteilchen erfahren, wenn sie sich im elektrischen Feld bewegen, herleiten (vgl. [3.25]). Grundsätzlich stellt elektrisch leitendes Material mit einem spezifischen Widerstand  $\rho_e$  also eine volumetrische Wärmequelle dar. Integriert man  $g(t, \mathbf{x}, T)$  über das Volumen  $\mathcal{V}$  des Ohmschen Widerstandes  $R$ , so ergibt sich die gesamte in Wärme umgesetzte Leistung (*Joulesche Wärme*)

$$P(t) = \int_{\mathcal{V}} g(t, \mathbf{x}, T) d\mathcal{V} = U(t)I(t) = RI^2(t) = \frac{U^2(t)}{R}, \quad (3.78)$$

[3.24] wobei  $U(t)$  die anliegende Spannung und  $I(t)$  der durchfließende Strom ist. Bei dieser Integration kann das Gebiet  $\mathcal{V}$  gedanklich in infinitesimale Stromröhren zerlegt werden, über deren Berandung kein Strom fließt.

Wird ein Leiter von Wechselstrom üblicher Netzfrequenz durchflossen, so reicht es zur Temperaturanalyse meist aus, mit den zeitlichen Mittelwerten von  $g(t, \mathbf{x}, T)$  und  $P(t)$  zu rechnen, d. h. mit Effektivwerten. Der Grund dafür ist, dass die Zeitkonstanten des thermischen Verhaltens meist signifikant höher sind als die Periodendauer des Wechselstroms.

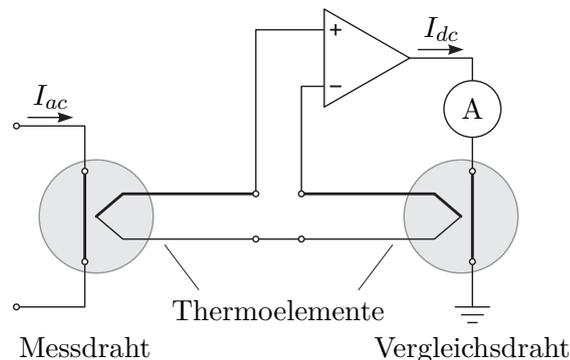


Abbildung 3.19: Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator zur Effektivwert-Messung des Stromes.

*Bemerkung 3.4.* Dieses Prinzip wird von sogenannten *Thermoumformern* zur Bestimmung von effektiven Stromwerten bei Frequenzen bis in den GHz-Bereich ausgenutzt. Dabei wird die Erwärmung eines stromdurchflossenen Widerstandsdrahtes gemessen. Dies erfolgt entweder direkt mit einem Thermoelement oder indirekt durch Erwärmung eines zweiten mit Gleichstrom betriebenen Vergleichsdrahtes. Der letztere, auch als Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator bekannte Fall ist in Abbildung 3.19 skizziert. Der mit dem Amperemeter gemessene Gleichstrom  $I_{dc}$  im Vergleichsdraht

entspricht gerade dem Effektivwert des Stromes  $I_{ac}$  [3.26].

**Aufgabe 3.13 (Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator).** Für den in Abbildung 3.19 skizzierten Wechselstrom/Gleichstrom-Komparator ist bekannt, dass der Messdraht und der Vergleichdraht kreisrunde Querschnitte besitzen und aus dem gleichen Material gefertigt sind. Der Durchmesser des Messdrahtes sei  $D_{ac}$ ; jener des Vergleichdrahtes  $D_{dc}$ . Die Drähte besitzen eine homogene Temperaturverteilung und werden ausschließlich durch Konvektion an der Mantelfläche gekühlt, wobei der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  und die Umgebungstemperatur  $T_\infty$  bei beiden Drähten ident sind. Es wird hochfrequenter Wechselstrom  $I_{ac}$  gemessen, weshalb der Skin-Effekt die effektive Leiterquerschnittsfläche des Messdrahtes auf 10 % reduziert. Mit welchem Durchmesser Verhältnis  $D_{ac}/D_{dc}$  muss das Messgerät gebaut werden, damit der Gleichstrom  $I_{dc}$  dem zu messenden Effektivwert von  $I_{ac}$  entspricht?

*Lösung von Aufgabe 3.13.*

$$\frac{D_{ac}}{D_{dc}} = \sqrt[3]{10} \quad (3.79)$$

## 3.4 Stationäre Wärmeübertragung

In diesem Abschnitt werden einige einfache Beispiele zur stationären Wärmeübertragung diskutiert.

### 3.4.1 Ebene Wand

Die Bestimmung des Wärmestroms und des Temperaturprofils in einer ebenen Wand ohne Wärmequellen und mit Randbedingungen erster Art an beiden Oberflächen kann als 1-dimensionales Wärmeleitproblem in kartesischen Koordinaten aufgefasst werden. Im Folgenden soll von stationären Verhältnissen und isotropem Material mit temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit  $\lambda(x)$  ausgegangen werden. Wie in Abbildung 3.20a dargestellt, habe die Wand die Dicke  $L$  und die beiden Oberflächentemperaturen  $T(0) = T_0$  und  $T(L) = T_L$ . Im stationären Zustand muss gemäß (3.4) die Temperatur  $T(x)$  dem Randwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x) \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{und} \quad T(0) = T_0, T(L) = T_L \quad (3.80)$$

genügen. Aus (3.80) folgt

$$\lambda(x) \frac{\partial T(x)}{\partial x} = C = \text{konst.} \quad (3.81)$$

und damit durch Integration

$$T(x) - T(0) = C \int_0^x \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x} . \quad (3.82)$$

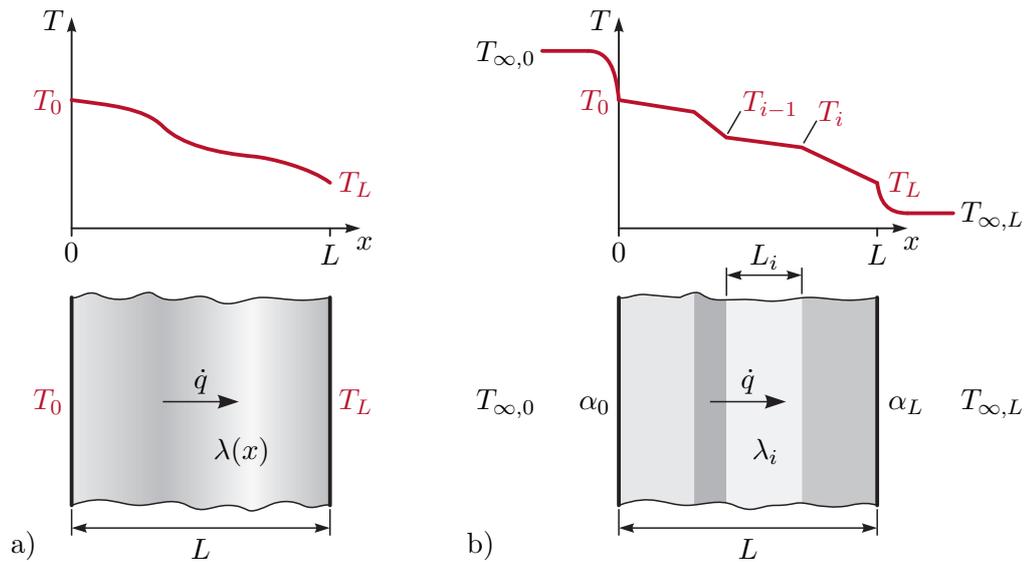


Abbildung 3.20: Stationäre Wärmeübertragung in ebener Wand, a) allgemeiner Wandaufbau mit Randbedingungen erster Art, b) schichtweise konstanter Wandaufbau mit Randbedingungen zweiter Art.

Setzt man in (3.82) für  $x = L$  ein, so erhält man

$$C = \frac{T(L) - T(0)}{\int_0^L \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}} \quad (3.83)$$

und damit das stationäre Temperaturprofil in der Wand in der Form

$$T(x) = T_0 + (T_L - T_0) \frac{\int_0^x \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}}{\int_0^L \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}}. \quad (3.84)$$

Die Wärmestromdichte  $\dot{q}$  gemäß (3.1) errechnet sich zu

$$\dot{q} = -\lambda(x) \frac{\partial T(x)}{\partial x} = -C = \frac{T_0 - T_L}{\int_0^L \frac{1}{\lambda(\tilde{x})} d\tilde{x}} \quad (3.85)$$

und für homogene Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  vereinfacht sich (3.85) zu

$$\dot{q} = \frac{\lambda}{L} (T_0 - T_L). \quad (3.86)$$

Wegen  $\lambda(x) > 0$  ist  $T(x)$  entsprechend (3.84) monoton. Wie gemäß Abschnitt 3.1 zu erwarten war, haben die Massendichte  $\rho$  und die spezifische Wärmekapazität  $c_p$  keinen Einfluss auf den Wärmestrom und das stationäre Temperaturprofil in der Wand.

Ist eine Wand aus mehreren Schichten mit abschnittsweise konstanten Materialparametern aufgebaut, wie dies in Abbildung 3.20b gezeigt ist, dann vereinfacht sich die Berechnung der Wärmestromdichte  $\dot{q}$  erheblich. Man nehme an, die Wand bestehe aus

den Schichten  $i = 1, \dots, N$  mit den jeweiligen Dicken  $L_i$  und Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_i$ . Außerdem soll nun von Randbedingungen zweiter Art mit den Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_0$  und  $\alpha_L$  und den festen Temperaturen  $T_{\infty,0}$  und  $T_{\infty,L}$  der umgebenden Fluide ausgegangen werden. Für die Wärmestromdichte  $\dot{q}$  folgt in diesem Fall (siehe Abbildung 3.20b) unter Berücksichtigung von (3.23) und (3.86)

$$\dot{q} = \alpha_0(T_{\infty,0} - T_0) = \frac{\lambda_1}{L_1}(T_0 - T_1) = \dots = \frac{\lambda_N}{L_N}(T_{N-1} - T_L) = \alpha_L(T_L - T_{\infty,L}) . \quad (3.87)$$

Der *Wärmedurchgangskoeffizient*  $k$  (gelegentlich auch  $k$ -Wert genannt) in  $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$  beschreibt den Proportionalitätsfaktor zwischen der Differenz der Außentemperaturen ( $T_{\infty,0} - T_{\infty,L}$ ) und der Wärmestromdichte  $\dot{q}$ . Aus (3.87) lassen sich einfach die Differenztemperaturen für jede Schicht berechnen und addieren

$$T_{\infty,0} - T_{\infty,L} = \underbrace{(T_{\infty,0} - T_0)}_{\dot{q} \frac{1}{\alpha_0}} + \underbrace{(T_0 - T_1)}_{\dot{q} \frac{L_1}{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{(T_{N-1} - T_L)}_{\dot{q} \frac{L_N}{\lambda_N}} + \underbrace{(T_L - T_{\infty,L})}_{\dot{q} \frac{1}{\alpha_L}} , \quad (3.88)$$

womit sich unmittelbar die Wärmestromdichte zu

$$\dot{q} = k(T_{\infty,0} - T_{\infty,L}) \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_L}} \quad (3.89)$$

ergibt. Man erkennt, dass die Wand besser isoliert, je kleiner der  $k$ -Faktor ist.

**Beispiel 3.4 (Isolierverglasung).** Bei der Auswahl der Fenster für ein neues Wohnhaus steht man vor der Entscheidung, konventionelle Fenster mit einer Einfachverglasung oder teurere Fenster mit einer Doppelverglasung zu wählen. Ein typischer Aufbau einer Doppelverglasung ist in Abbildung 3.21 skizziert. Zum Vergleich der thermischen Eigenschaften soll das Verhältnis der Wärmeübergangskoeffizienten für Einfach- und Doppelverglasung berechnet werden.

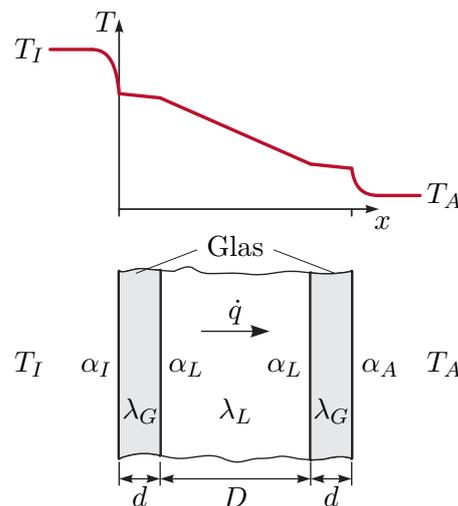


Abbildung 3.21: Aufbau einer Doppelverglasung mit typischem Temperaturverlauf. Der Wärmeübergang von Glas auf Luft und umgekehrt wird im Scheibenzwi-

schenraum vernachlässigt, d. h.  $\alpha_L \rightarrow \infty$ . Für den Fall  $T_I > T_A$  ist ein typischer Temperaturverlauf in Abbildung 3.21 dargestellt. Gemäß (3.89) ergibt sich für den Wärmedurchgangskoeffizient der Doppelverglasung

$$k_D = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_I} + 2\frac{d}{\lambda_G} + \frac{D}{\lambda_L} + \frac{1}{\alpha_A}} .$$

Mit dem analog berechneten Wärmedurchgangskoeffizienten einer Einfachverglasung

$$k_E = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_I} + \frac{d}{\lambda_G} + \frac{1}{\alpha_A}} \quad (3.90)$$

ergibt sich das Verhältnis der beiden Durchgangskoeffizienten zu

$$\frac{k_E}{k_D} = 1 + \frac{\frac{d}{\lambda_G} + \frac{D}{\lambda_L}}{\frac{1}{\alpha_I} + \frac{d}{\lambda_G} + \frac{1}{\alpha_A}} . \quad (3.91)$$

### 3.4.2 Zylinderförmige Wand

Für die in Abbildung 3.22 dargestellte aus  $N$  kreisförmigen Schichten bestehende Rohrwand soll für den stationären Fall ohne Wärmequellen der Temperaturverlauf und der Wärmestrom berechnet werden. Eine Schicht  $i \in \{1, \dots, N\}$  habe den Innenradius  $r_{i-1}$ , den Außenradius  $r_i$  und die homogene, temperaturunabhängige Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_i$ . Im Rohr fließt ein Medium mit der festen Temperatur  $T_F$  und das Rohr wird von einem Medium mit der festen Temperatur  $T_\infty$  umströmt. Der Wärmeübergangskoeffizient an der Rohrinneenseite (Radius  $r_0$ ) sei  $\alpha_0$ ; an der Rohraußenseite (Radius  $r_N$ ) sei er  $\alpha_N$ . Alle Größen seien unabhängig von der Winkelkoordinate  $\varphi$  und der Längskoordinate  $z$  (vgl. Abbildung 3.2a), so dass die Annahme 1-dimensionaler Wärmeleitung in Richtung der radialen Koordinate  $r$  gerechtfertigt ist. Aus (3.5b) folgt damit für eine beliebige Schicht  $i \in \{1, \dots, N\}$

$$0 = \lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \forall r \in (r_{i-1}, r_i) . \quad (3.92)$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$T(r) = T_{i-1} + (T_i - T_{i-1}) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)} \quad \forall r \in [r_{i-1}, r_i] \quad (3.93)$$

mit  $T_i = T(r_i)$  und  $T_{i-1} = T(r_{i-1})$ . Wie es sein muss, hängt die lokale Wärmestromdichte

$$\dot{q}(r) = -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_i \frac{1}{r} \frac{T_{i-1} - T_i}{\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)} \quad \forall r \in (r_{i-1}, r_i) \quad (3.94)$$

vom Radius  $r$  ab. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen zweiter Art ergibt sich daher für die mehrschichtige Wand

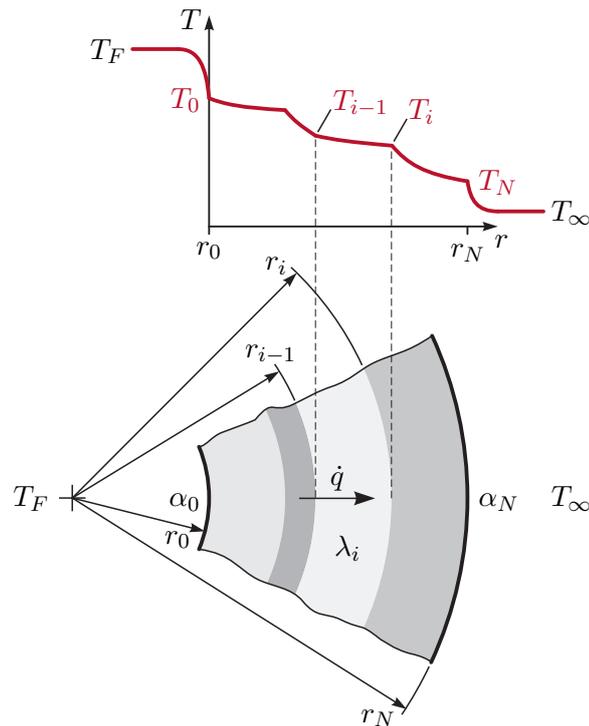


Abbildung 3.22: Stationäre Wärmeübertragung in zylinderförmiger Wand.

$$\dot{q}(r) = (T_F - T_\infty) \frac{1}{r \underbrace{\frac{1}{r_0 \alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right) + \frac{1}{r_N \alpha_N}}_{=k(r)}} \quad (3.95)$$

mit dem vom Radius abhängigen Wärmedurchgangskoeffizienten  $k(r)$  in  $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ . Praktisch interessant ist auch noch der vom Radius unabhängige auf die Rohrlänge bezogene Wärmestrom

$$\dot{q}^\circ = \dot{q}(r) 2\pi r = (T_F - T_\infty) \frac{2\pi}{\underbrace{\frac{1}{r_0 \alpha_0} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right) + \frac{1}{r_N \alpha_N}}_{=k^\circ}} \quad (3.96)$$

mit dem bezogenen Wärmedurchgangskoeffizienten  $k^\circ$  in  $\text{W}/(\text{mK})$ .

**Aufgabe 3.14** (Bezogener Wärmedurchgangskoeffizient bei schichtweisem zylinderförmigem Wandaufbau). Leiten Sie (3.96) ausgehend von (3.92) her.

### 3.4.3 Vorspringende Teile und Rippen

Um den Wärmeübergang zwischen Festkörpern und Fluiden zu verbessern, wird häufig die wirksame Wärmeaustauschfläche konstruktiv vergrößert, z. B. durch Rippen. Abbil-



Abbildung 3.23: Kühlkörper für Elektronikbauteile.

dung 3.23 zeigt ein Beispiel eines mit Rippen versehenen Kühlkörpers für Elektronikbauteile.

*Bemerkung 3.5.* Auch in der Natur sind solche konstruktiv vergrößerten Wärmeaustauschflächen zu beobachten: Delphine nützen ihre Flossen auch zur Temperaturregulation. Bei afrikanischen Elefanten entfällt rund ein Sechstel der Körperoberfläche auf die kühlenden Ohren.

Da eine exakte Berechnung des Temperaturfeldes und des Wärmeübertragungsverhaltens solcher Bauteile meist mit erheblichem Aufwand verbunden ist, beschränken sich die folgenden Ausführungen auf Näherungen mit zahlreichen vereinfachenden Annahmen. Es wird von 1-dimensionaler stationärer Wärmeleitung und ausschließlich konvektivem Wärmeübergang an den Bauteiloberflächen ausgegangen.

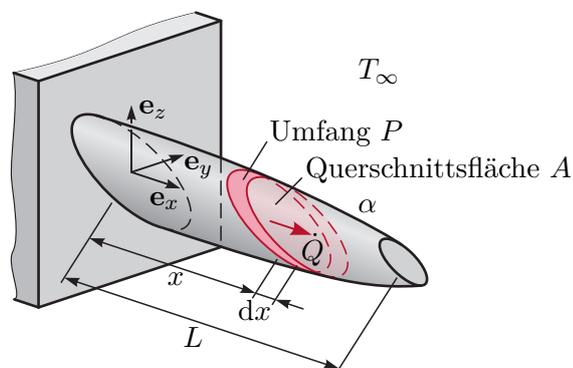


Abbildung 3.24: Wärmeleitung in vorspringendem Bauteil.

Der in Abbildung 3.24 skizzierte vorspringende Bauteil (z. B. eine Kühlrippe) mit der Länge  $L$  habe am Ort  $x$  die lokale Querschnittsfläche  $A(x)$  und die isotrope Wärmeleitfähigkeit  $\lambda(x, T)$ . Außerdem besitze dessen Mantelfläche am Ort  $x$  den lokalen Umfang  $P(x)$ . Für die Mantelfläche wird angenommen, dass nur konvektiver Wärmeaustausch mit der Umgebung auftritt, wobei sowohl der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha(x)$  als auch die feste

Temperatur  $T_\infty(x)$  des Fluids von  $x$  abhängen können. Insbesondere bei eng angeordneten Rippen trifft dies zu. Das Bauteil besitzt keine Wärmequellen. Die Temperatur sei in jedem Querschnitt  $x = \text{konst.}$  homogen, d. h. es wird von 1-dimensionaler Wärmeleitung in Richtung  $x$  ausgegangen und für den Gesamtwärmestrom  $\dot{Q}(x)$  gilt entsprechend dem Fourierschen Wärmeleitgesetz (3.1)

$$\dot{Q}(x) = A(x)\dot{q}(x) = -\lambda(x, T)A(x)\frac{\partial T(x)}{\partial x} . \quad (3.97)$$

Die stationäre Energiebilanz (vgl. (A.10)) für den infinitesimalen Bereich  $[x, x + dx]$  lautet

$$\begin{aligned} \dot{Q}(x) - \dot{Q}(x + dx) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x, T)A(x)\frac{\partial T(x)}{\partial x} \right) dx \\ &= \alpha(x)P(x) dx (T(x) - T_\infty(x)) , \end{aligned} \quad (3.98)$$

wobei der Term auf der rechten Seite den konvektiven Wärmeaustausch mit der Umgebung beschreibt. Der Grenzübergang  $dx \rightarrow 0$  liefert die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x, T)A(x)\frac{\partial T(x)}{\partial x} \right) - \alpha(x)P(x)(T(x) - T_\infty(x)) = 0 \quad (3.99)$$

für das Temperaturfeld im Bauteil. Es handelt sich um ein Randwertproblem, d. h. zur tatsächlichen Berechnung des Temperaturfeldes und der Wärmestromdichte werden noch Randbedingungen an den Stellen  $x = 0$  (Befestigungsstelle) und  $x = L$  (freie Stirnfläche) benötigt.

Im Folgenden werden einige Spezialisierungen des obigen Problems diskutiert, für die einfache analytische Lösungen existieren. Es handelt sich um einen umströmten Stab, wobei an der Stelle  $x = 0$  die Temperatur  $T(0) = T_0$  stets fest vorgegeben sei. Die Größen  $A$ ,  $P$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$  und  $T_\infty$  hängen nicht von  $x$  ab. Ferner sei  $\lambda$  unabhängig von der Temperatur. An der Stirnfläche  $x = L$  ist zunächst mit konvektivem Wärmeübergang (Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_L$ , feste Fluidtemperatur  $T_\infty$ ) zu rechnen. Mit diesen Annahmen vereinfacht sich (3.99) zu

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{\alpha P}{\lambda A}}_{=m^2} (T(x) - T_\infty) = 0 \quad (3.100a)$$

mit den Randbedingungen

$$T(0) = T_0 , \quad \alpha_L (T(L) - T_\infty) = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} . \quad (3.100b)$$

Die Lösung dieses Randwertproblems lautet

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{\lambda m \cosh(m(L-x)) + \alpha_L \sinh(m(L-x))}{\lambda m \cosh(mL) + \alpha_L \sinh(mL)} \quad (3.101a)$$

mit der Abkürzung  $m = \sqrt{\alpha P / (\lambda A)}$ , so dass für den interessierenden Wärmestrom an der Stelle  $x = 0$

$$\dot{Q}(0) = \lambda A m (T_0 - T_\infty) \frac{\lambda m \sinh(mL) + \alpha_L \cosh(mL)}{\lambda m \cosh(mL) + \alpha_L \sinh(mL)} \quad (3.101b)$$

folgt. Diese Lösung gilt für einen umströmten Stab mit einer Randbedingung erster Art an der Stelle  $x = 0$  und einer Randbedingung dritter Art an der Stelle  $x = L$ . Der Spezialfall einer adiabaten Randbedingung an der Stelle  $x = L$  (ideal isolierte Stirnfläche, Randbedingung zweiter Art) folgt direkt aus dem Ergebnis (3.101) durch Verwendung von  $\alpha_L = 0$ .

Wird an der Stelle  $x = L$  die Temperatur  $T_L$  fest vorgegeben (Randbedingung erster Art), so sind die Randbedingungen (3.100b) durch

$$T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L \quad (3.102)$$

zu ersetzen und es ergibt sich die Lösung

$$T(x) = T_\infty + \frac{(T_0 - T_\infty) \sinh(m(L-x)) + (T_L - T_\infty) \sinh(mx)}{\sinh(mL)} \quad (3.103a)$$

$$\dot{Q}(0) = \lambda Am \frac{(T_0 - T_\infty) \cosh(mL) - (T_L - T_\infty)}{\sinh(mL)}. \quad (3.103b)$$

Unabhängig von der Randbedingung an der Stelle  $x = L$  erhält man für den Spezialfall eines unendlich langen Stabes durch Grenzübergang  $L \rightarrow \infty$  aus den obigen Ergebnissen

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-mx} \quad (3.104a)$$

$$\dot{Q}(0) = \lambda Am(T_0 - T_\infty). \quad (3.104b)$$

**Aufgabe 3.15 (Wärmeübertragung in einem umströmten Stab).** Rechnen Sie die Ergebnisse (3.101), (3.103) und (3.104) nach.

Mit den obigen Ergebnissen lässt sich der Effekt von Rippen (oder anderen konstruktiven Elementen) auf den Wärmeaustausch an einer Oberfläche zumindest näherungsweise bestimmen. Ausschlaggebend ist die Form und das Material der Rippen sowie deren Einfluss auf die Wärmeübertragung an der Oberfläche (z. B. verringerter Wärmeübergangskoeffizient durch behinderte Strömung). Zur Beurteilung, ob der Einsatz bestimmter Rippen zweckmäßig ist, ist der Gesamtwärmestrom durch den Basisquerschnitt (Befestigungsstelle  $x = 0$  in Abbildung 3.24) der Rippen sowie durch die zwischen den Rippen liegenden freien Flächen des Grundkörpers mit jenem Gesamtwärmestrom zu vergleichen, der ohne Rippen auftreten würde. In diesem Zusammenhang wird häufig der Rippenwirkungsgrad

$$\eta_f = \frac{\dot{Q}(0)}{\dot{Q}_{max}} \in [0, 1] \quad (3.105)$$

als Maßzahl verwendet. Er setzt den tatsächlich an der Befestigungsstelle  $x = 0$  auftretenden Wärmestrom  $\dot{Q}(0)$  ins Verhältnis zum Wärmestrom  $\dot{Q}_{max}$ , der auftreten würde, wenn die gesamte Rippenoberfläche die Temperatur  $T_0$  (Temperatur an der Befestigungsstelle  $x = 0$ ) hätte.

### 3.4.4 Wärmetauscher

Abbildung 3.25 zeigt einen Gleich- und einen Gegenstromwärmetauscher mit den zugehörigen Temperaturverläufen in den Fluiden. Es wird angenommen, dass es sich um einen

stationären Prozess handelt und dass die Drücke in beiden Kammern des Wärmetauschers konstant sind (isobare Zustandsänderung). Die Wärmeübertragung erfolgt durch *erzwungene Konvektion* in den Fluiden und *Wärmeleitung* in der Trennwand [3.3, 3.4, 3.18].

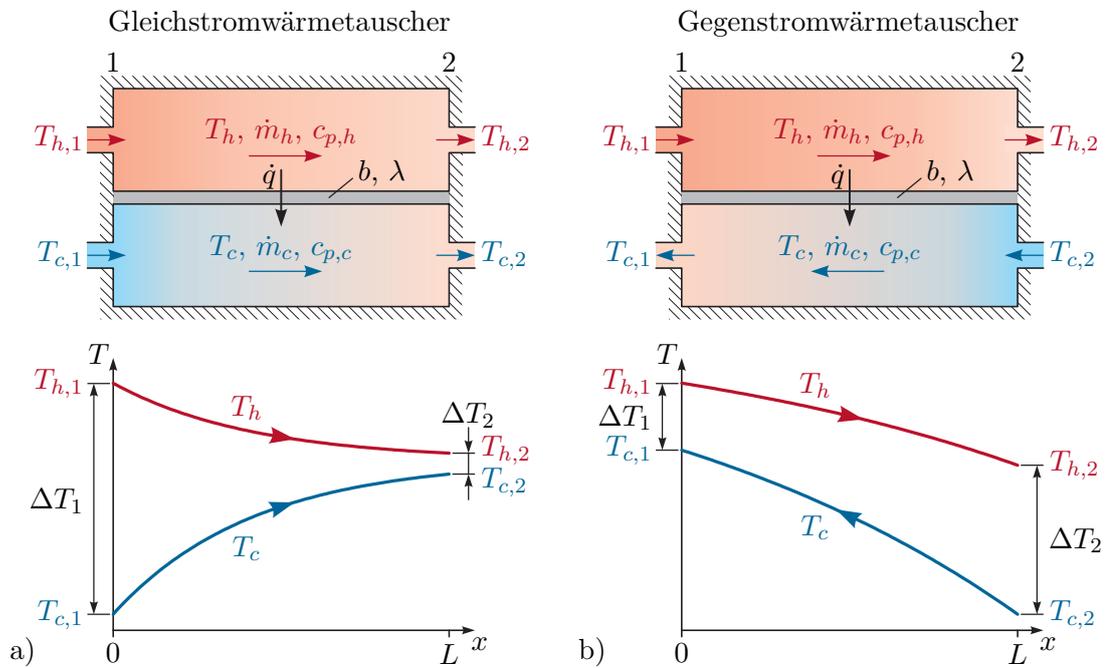


Abbildung 3.25: Wärmetauscher, a) Gleichstromwärmetauscher, b) Gegenstromwärmetauscher.

Das wärmere Fluid soll mit dem Index  $h$  und das kältere Fluid mit dem Index  $c$  gekennzeichnet werden. Das Fluid  $i$  ( $i \in \{h, c\}$ ) mit dem konstanten Massenstrom  $\dot{m}_i$  und der konstanten spezifischen Wärmekapazität  $c_{p,i}$  habe an der Stelle  $x = 0$  (Punkt 1) die Temperatur  $T_{i,1}$  und an der Stelle  $x = L$  (Punkt 2) die Temperatur  $T_{i,2}$ . Je nach Art des Wärmetauschers strömt das kältere Fluid entweder am Punkt 1 oder am Punkt 2 ein. Die Massenströme  $\dot{m}_i$  sind dementsprechend vorzeichenrichtig einzusetzen. Strömt das Fluid  $i$  am Punkt 1 (2) ein und am Punkt 2 (1) aus, so ist  $\dot{m}_i > 0$  ( $\dot{m}_i < 0$ ) zu verwenden. Beim Gegenstromwärmetauscher gilt daher  $\dot{m}_h \dot{m}_c < 0$  und beim Gleichstromwärmetauscher  $\dot{m}_h \dot{m}_c > 0$ . Mit dieser Vorzeichenkonvention für  $\dot{m}_i$  gelten die folgenden Ergebnisse sowohl für Gleich- als auch für Gegenstromwärmetauscher. Für die in Abbildung 3.25a eingezeichneten Strömungsrichtungen gilt beim Gleichstromwärmetauscher  $T_{h,1} \geq T_{c,1}$ ,  $T_{h,2} \geq T_{c,2}$  und  $(T_{h,1} - T_{c,1})\dot{m}_h \geq (T_{h,2} - T_{c,2})\dot{m}_h$ . Für den Gegenstromwärmetauscher in Abbildung 3.25b müssen nur  $T_{h,1} \geq T_{c,1}$  und  $T_{h,2} \geq T_{c,2}$  erfüllt sein.

Die Trennwand zwischen den beiden Fluiden habe an der Stelle  $x$  den Wärmedurchgangskoeffizienten  $k(x)$  und die lokale Breite  $b(x)$ . Die gesamte *Wärmeübertragungsfläche* ist daher  $A = \int_0^L b(x) dx$ . Alle übrigen Wände des Wärmetauschers seien adiabatisch. Eine zentrale Annahme bei der Berechnung der Wärmeströme und der Temperaturverläufe im

Wärmetauscher ist, dass die Fluidtemperatur in jeder Kammer innerhalb einer Schicht  $x = \text{konst.}$  homogen ist (zumindest außerhalb der Konvektionsgrenzschicht nahe der Trennwand). Weiters wird angenommen, dass in den Fluiden die Wärmeleitung in Richtung  $x$  gegenüber dem mit der Fluidbewegung verbundenen Energietransport vernachlässigbar ist, was bei hinreichend hohen Strömungsgeschwindigkeiten erfüllt ist. Da hier stationäre Wärmeübertragung untersucht werden soll, muss  $\partial/\partial t = 0$  gelten. Aus einer Massenbilanz folgt damit, dass der konstante Massenstrom  $\dot{m}_i$  ( $i \in \{h, c\}$ ) unabhängig von  $x$  sein muss.

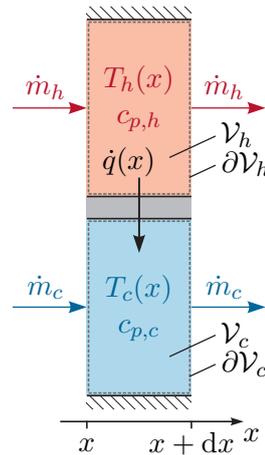


Abbildung 3.26: Kontrollvolumina zur lokalen Anwendung des Energieerhaltungssatzes bei einem Wärmetauscher.

Zur Berechnung des stationären Wärmeflusses im Wärmetauscher und der stationären Fluidtemperaturprofile wird der Energieerhaltungssatz (siehe Anhang A.3) verwendet. Es werden dazu zwei ortsfeste Kontrollvolumina  $\mathcal{V}_h$  und  $\mathcal{V}_c$  im Bereich  $[x, x+dx]$  mit kleinem  $dx$  in den beiden Kammern betrachtet (siehe Abbildung 3.26). Es ist der Energieerhaltungssatz für offene Systeme (A.23) zu verwenden, da die Fluide über die ruhende Berandungen  $\partial\mathcal{V}_i$  ( $i \in \{h, c\}$ ) strömen. Für stationäre Verhältnisse ( $\partial/\partial t = 0$ ), unter der plausiblen Annahme, dass die Änderungen der kinetischen Energie und der potentiellen Höhenenergie vernachlässigt werden können, und da in dem System weder technische Arbeit noch elektrische Leistung auftritt, folgt aus (A.23)

$$\int_{\partial\mathcal{V}_i} \rho_i h_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = - \int_{\partial\mathcal{V}_i} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad i \in \{h, c\} . \quad (3.106)$$

Hierbei ist  $\rho_i$  die Massendichte des Fluids  $i \in \{h, c\}$ ,  $h_i$  seine spezifische Enthalpie (siehe auch Anhang A.4),  $\mathbf{v}_i$  seine lokale Geschwindigkeit,  $\mathbf{n}$  der lokale nach außen gerichtete Normalenvektor auf die Berandung  $\partial\mathcal{V}_i$  und  $\dot{\mathbf{q}}$  der lokale Wärmestromdichtevektor (positiv nach außen). Eine Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}$  tritt nur an jenen Teilen der Berandungen  $\partial\mathcal{V}_i$  ( $i \in \{h, c\}$ ) auf, die die Trennwand berühren. Bei konstantem Druck gilt gemäß (A.26b)

$$dh_i = c_{p,i} dT_i \quad i \in \{h, c\} . \quad (3.107)$$

Berücksichtigt man dies bei der Auswertung von (3.106) für die beiden Kontrollvolumina, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{m}_h(h_h(x+dx) - h_h(x)) &= \dot{m}_h dh_h = \dot{m}_h c_{p,h} dT_h \\ &= -\dot{q}(x)b(x) dx = -k(x)(T_h(x) - T_c(x))b(x) dx \end{aligned} \quad (3.108a)$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_c(h_c(x+dx) - h_c(x)) &= \dot{m}_c dh_c = \dot{m}_c c_{p,c} dT_c \\ &= \dot{q}(x)b(x) dx = k(x)(T_h(x) - T_c(x))b(x) dx . \end{aligned} \quad (3.108b)$$

Aus der Summe dieser Ausdrücke folgt

$$\dot{m}_h c_{p,h} dT_h + \dot{m}_c c_{p,c} dT_c = 0 . \quad (3.109a)$$

Aus der Differenz dieser Ausdrücke folgt

$$\frac{dT_h - dT_c}{T_h - T_c} = \frac{d(T_h - T_c)}{T_h - T_c} = -\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}}\right) k(x)b(x) dx . \quad (3.109b)$$

Die Integration von (3.109) im Bereich  $[0, x]$  liefert unter Berücksichtigung der Randbedingungen  $T_i(0) = T_{i,1}$  ( $i \in \{h, c\}$ )

$$\dot{m}_h c_{p,h}(T_h(x) - T_{h,1}) + \dot{m}_c c_{p,c}(T_c(x) - T_{c,1}) = 0 \quad (3.110a)$$

$$\ln\left(\frac{T_h(x) - T_c(x)}{T_{h,1} - T_{c,1}}\right) = -\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}}\right) \underbrace{\int_0^x k(\tilde{x})b(\tilde{x}) d\tilde{x}}_{= K(x)} . \quad (3.110b)$$

Daraus folgen die gesuchten stationären Temperaturverläufe

$$T_h(x) = T_{h,1} + \frac{\dot{m}_c c_{p,c}(T_{c,1} - T_{h,1})}{\dot{m}_h c_{p,h} + \dot{m}_c c_{p,c}} \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}}\right) K(x)\right)\right) \quad (3.111a)$$

$$T_c(x) = T_{c,1} + \frac{\dot{m}_h c_{p,h}(T_{h,1} - T_{c,1})}{\dot{m}_h c_{p,h} + \dot{m}_c c_{p,c}} \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}}\right) K(x)\right)\right) \quad (3.111b)$$

und in Folge die stationäre lokale Wärmestromdichte

$$\begin{aligned} \dot{q}(x) &= k(x)(T_h(x) - T_c(x)) \\ &= k(x)(T_{h,1} - T_{c,1}) \exp\left(-\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}}\right) K(x)\right) . \end{aligned} \quad (3.112)$$

Der gesamte stationäre Wärmestrom  $\dot{Q}$  ergibt sich durch Integration  $\dot{Q} = \int_0^L \dot{q}(x)b(x) dx$  unter Berücksichtigung von (3.110) und (3.111) ausgewertet am Punkt  $x = L$  in der Form

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{T_{h,1} - T_{c,1}}{\frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}}} \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}} \right) K(L) \right) \right) \\ &= \dot{m}_h c_{p,h} (T_{h,1} - T_{h,2}) = \dot{m}_c c_{p,c} (T_{c,2} - T_{c,1}) = K(L) \underbrace{\frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1 / \Delta T_2)}}_{=\Delta T_{\log}}\end{aligned}\quad (3.113a)$$

mit den Abkürzungen

$$\Delta T_1 = T_{h,1} - T_{c,1}, \quad \Delta T_2 = T_{h,2} - T_{c,2}. \quad (3.113b)$$

Alternativ kann (3.113a) auch aus einer stationären Energiebilanz berechnet werden, wenn als Kontrollvolumen die gesamte Kammer des wärmeren oder des kälteren Fluids herangezogen wird.

**Aufgabe 3.16 (Wärmetauscher).** Rechnen Sie die Ergebnisse (3.111) und (3.113a) nach.

Die Funktion  $K(x)$  entspricht dem über die Fläche integrierten Wärmedurchgangskoeffizienten  $k(x)$ . Für homogenes  $k$  gilt also  $K(L) = kA$ . Der Wert  $\Delta T_{\log}$  wird als auch als *logarithmische mittlere Temperaturdifferenz* bezeichnet [3.3, 3.4, 3.18]. Für gleiche Eingangstemperaturen ist  $\Delta T_{\log}$  beim Gegenstromwärmetauscher größer als beim Gleichstromwärmetauscher. Um daher einen gewissen gegebenen Wärmestrom  $\dot{Q}$  zu übertragen, kann der Wert  $K(L)$  beim Gegenstromwärmetauscher kleiner sein als beim Gleichstromwärmetauscher. Da  $K(L)$  direkt mit der Baugröße und daher mit den Kosten des Wärmetauschers zusammenhängt, ist es im Allgemeinen günstiger Gegenstromwärmetauscher statt Gleichstromwärmetauscher einzusetzen.

**Bemerkung 3.6.** Das Gegenstromprinzip kommt auch im Blutkreislauf in den Extremitäten vieler Lebewesen zum Einsatz. Der Wärmeverlust nach außen soll minimiert werden und das venöse in den Körper zurückfließende Blut soll möglichst gut durch das arterielle in die Extremitäten einströmende Blut erwärmt werden. Spezialisierte Tiere kommen so mit sehr tiefen Temperaturen zurecht, z. B. Eisbären, Schlittenhunde und Pinguine, bei denen das arterielle Blut beim Erreichen der Fußsohlen schon beinahe die Temperatur des Untergrundes (z. B. Eis) hat.

Abbildung 3.27 zeigt abschließend drei spezielle Betriebsfälle von Wärmetauschern [3.4]. Im Fall  $|\dot{m}_h c_{p,h}| \gg |\dot{m}_c c_{p,c}|$  (Abbildung 3.27a) ist die Temperaturänderung des kälteren Fluids erheblich höher als jene des wärmeren. Im Grenzfall  $|\dot{m}_h c_{p,h}| \rightarrow \infty$ , welcher z. B. von kondensierendem Dampf gut erfüllt wird, bleibt  $T_h(x)$  konstant. Im Fall  $|\dot{m}_h c_{p,h}| \ll |\dot{m}_c c_{p,c}|$  (Abbildung 3.27c) gilt Analoges mit vertauschten Rollen der beiden Fluide. Der Grenzfall  $|\dot{m}_c c_{p,c}| \rightarrow \infty$  wird z. B. von verdampfenden Flüssigkeiten gut erfüllt. Gilt bei einem Gegenstromwärmetauscher  $\dot{m}_h c_{p,h} = -\dot{m}_c c_{p,c}$  und zusätzlich  $k(x)b(x) = \text{konst.}$ , so sind  $T_h(x)$  und  $T_c(x)$  affin in  $x$  und es gilt  $T_h(x) - T_c(x) = \text{konst.}$  (siehe Abbildung 3.27b).

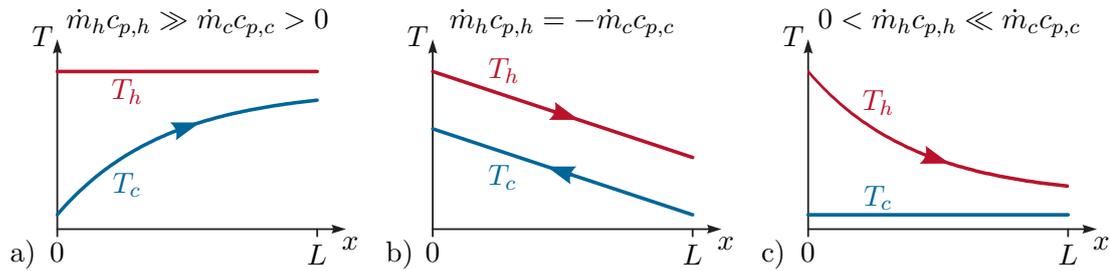


Abbildung 3.27: Spezielle Betriebsfälle eines Wärmetauschers, a)  $\dot{m}_h c_{p,h} \gg \dot{m}_c c_{p,c} > 0$ , b)  $\dot{m}_h c_{p,h} = -\dot{m}_c c_{p,c}$  für Gegenstromwärmetauscher, c)  $0 < \dot{m}_h c_{p,h} \ll \dot{m}_c c_{p,c}$ .

### 3.5 Transiente Wärmeübertragung

Meist ist das Finden einer exakten analytischen Lösung von transienten Wärmeübertragungsproblemen, die die Wärmeleitgleichung (3.4) beinhalten, eine herausfordernde Aufgabe. Für praktische Anwendungen werden daher oft numerische Näherungsverfahren zur Lösung verwendet (vgl. Abschnitt 3.6). In speziellen Fällen lassen sich jedoch geschlossene analytische Lösungen finden, die z. B. bei der Verifikation von numerischen Lösungsverfahren oder als Näherungslösung für ähnliche Problemstellungen dienlich sein können.

**Aufgabe 3.17 (Einfaches transientes Wärmeleitproblem).** Für ein 1-dimensionales Wärmeleitproblem mit konstanter, homogener Temperaturleitfähigkeit  $a$  gelte für die volumetrische Wärmequelle  $g = \lambda^2 \text{ K/m}^2$ , d. h.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2a \quad x \in (0, 1), t > 0. \quad (3.114a)$$

Hinzu kommen die Anfangs- und Randbedingungen

$$T(0, x) = \sin(\pi x) + 1 - x^2 \quad x \in [0, 1] \quad (3.114b)$$

$$T(t, 0) = 1, \quad T(t, 1) = 0 \quad t > 0. \quad (3.114c)$$

Berechnen Sie die analytische Lösung  $T(t, x)$  für dieses Problem. Sie können dabei die Laplace-Transformation bezüglich der Zeit  $t$  verwenden.

**Lösung von Aufgabe 3.17.**

$$T(t, x) = e^{-a\pi^2 t} \sin(\pi x) + 1 - x^2 \quad (3.115)$$

**Beispiel 3.5 (Tauchsieder).** Der in Abbildung 3.28 skizzierte zylindrische Behälter ist

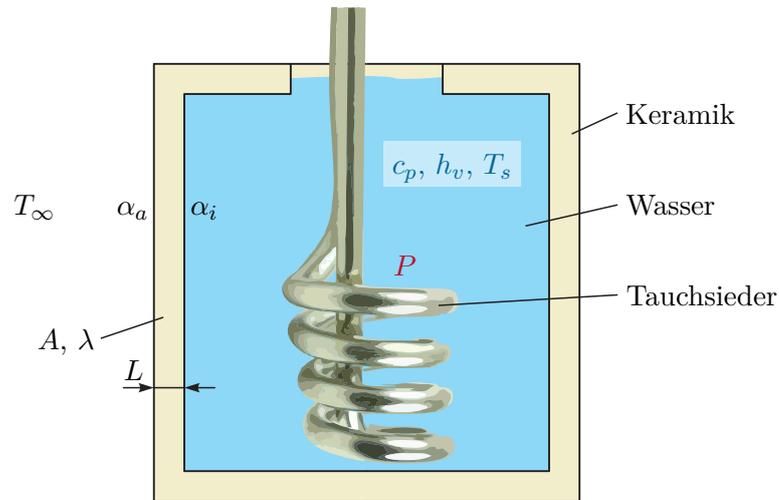


Abbildung 3.28: Wasserbehälter mit Tauchsieder.

zunächst vollständig mit Wasser (Masse  $m_0$ , spezifische Wärmekapazität  $c_p$  im flüssigen Zustand, Verdampfungsenthalpie  $h_v$  in J/kg, Siedetemperatur  $T_s$ ) mit einer anfänglichen Temperatur  $T_0 = T_\infty$  gefüllt. Es wird angenommen, dass die Grundfläche und die mit einer Öffnung versehene Deckfläche des Behälters adiabatisch (kein Wärmeaustausch mit der Umgebung) sind. Der Druck in der Flüssigkeit sei konstant.

Der Mantel des Zylinders hat eine Dicke  $L$  und eine Fläche  $A$  und besteht aus Keramik mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ . Der Mantel tauscht durch freie Konvektion Wärme sowohl mit dem enthaltenen Wasser als auch mit der umgebenden Luft aus. Der Wärmeübergangskoeffizient beträgt innen  $\alpha_i$  und außen  $\alpha_a$ . Die wirksame Wärmeaustauschfläche ist proportional zum Füllstand des Behälters. Die Luft hat eine feste Temperatur  $T_\infty$ . Es ist von stationärer Wärmeübertragung durch den Behältermantel auszugehen, wobei die Wand aufgrund ihrer geringen Dicke als eben betrachtet werden kann. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird ein im Behälter eingebauter Tauchsieder eingeschaltet.

Es soll nun die Leistung  $P$  des Tauchsieders so dimensioniert werden, dass das Wasser zum Zeitpunkt  $t_s$  zu sieden beginnt. Dazu wird angenommen, dass die Wassertemperatur  $T(t)$  homogen ist und die gesamte Leistung  $P$  in Wärme umgewandelt und vom Wasser aufgenommen wird. Aus einer Energiebilanz für den Wasserbehälter (vgl. (A.17) und (A.35b)) folgt die Differentialgleichung

$$m_0 c_p \frac{dT(t)}{dt} = P - kA(T(t) - T_\infty), \quad T(0) = T_\infty \quad (3.116)$$

mit dem Wärmedurchgangskoeffizienten gemäß (3.89)

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}}. \quad (3.117)$$

Die Lösung von (3.116) lautet

$$T(t) = T_\infty + \frac{P}{kA} \left( 1 - e^{-\frac{kA}{m_0 c_p} t} \right) \quad (3.118)$$

und damit folgt für die Leistung  $P$  (damit zum Siedezeitpunkt  $t_s$  gilt  $T(t_s) = T_s$ ) die Beziehung

$$P = \frac{kA(T_s - T_\infty)}{1 - e^{-\frac{kA}{m_0 c_p} t_s}}. \quad (3.119)$$

Wenn das Wasser die Siedetemperatur  $T_s$  erreicht, dann bedingt die durch den Tauchsieder zugeführte Wärmemenge, dass das Fluid verdampft und die Wassertemperatur  $T(t) = T_s$  bleibt für alle Zeiten  $t \geq t_s$  konstant. Da die wirksame Wärmeaustauschfläche proportional zum Füllstand des Behälters ist, folgt für den an die Umgebung abgegebenen Wärmestrom

$$\frac{m_0 - m_D(t)}{m_0} kA(T_s - T_\infty), \quad (3.120)$$

wobei  $m_D(t)$  jene Wassermasse bezeichnet, die bereits in Dampf umgewandelt wurde. Aus einer Energiebilanz (vgl. (A.17)) erhält man

$$h_v \frac{dm_D(t)}{dt} = P - \frac{m_0 - m_D(t)}{m_0} kA(T_s - T_\infty), \quad m_D(t_s) = 0 \quad (3.121)$$

und damit

$$m_D(t) = m_0 \left( \frac{P}{kA(T_s - T_\infty)} - 1 \right) \left( e^{\frac{kA(T_s - T_\infty)}{h_v m_0} (t - t_s)} - 1 \right), \quad t \geq t_s. \quad (3.122)$$

Aus (3.122) erkennt man, dass die gesamte Wassermenge nach der Zeit

$$t = t_s + \ln \left( \frac{P}{P - kA(T_s - T_\infty)} \right) \frac{h_v m_0}{kA(T_s - T_\infty)} \quad (3.123)$$

verdampft ist.

## 3.6 Numerische Lösung von Wärmeübertragungsproblemen

Die Wärmeleitgleichung (3.4) ist ein Anfangs-Randwert-Problem und gehört zur Klasse der parabolischen Differentialgleichungen. Die Randbedingungen ergeben sich in Abhängigkeit der jeweiligen Aufgabenstellung. Für stationäre Problemstellungen vereinfacht sich (3.4) zu einer elliptischen Differentialgleichung. Zur numerischen Lösung von Wärmeübertragungsproblemen mit Wärmeleitung kommen daher alle Verfahren in Frage, die grundsätzlich für parabolische oder elliptische Differentialgleichungen geeignet sind. Dazu gehören z. B. die Finite Differenzen Methode [3.27], das Kollokationsverfahren, die Galerkin Methode, die Finite Volumen Methode und die Finite Elemente Methode [3.28]. Außer der Finite Differenzen Methode sind all diese Verfahren Spezialisierungen der

Methode der gewichteten Residuen. Der vorliegende Abschnitt gibt eine erste Einführung in die Finite Differenzen Methode und eine daraus ableitbare konzentriert-parametrische Problemformulierung als thermisches RC-Netzwerk.

### 3.6.1 Finite Differenzen Methode

Bei der Finite Differenzen Methode wird das Rechengebiet örtlich und zumeist auch zeitlich in Gitter eingeteilt und die Lösung wird nur an den Gitterpunkten berechnet. Dazu werden die in den Differentialgleichungen vorkommenden Ableitungen näherungsweise durch Differenzenquotienten ersetzt. Für eine allgemeine, hinreichend oft differenzierbare Funktion  $y(x)$  sind in Tabelle 3.2 Beispiele für Differenzenquotienten gegeben, wenn das Gitter entlang der  $x$ -Achse eine gleichförmige Schrittweite  $\Delta x$  aufweist. Die Tabelle zeigt auch die Ordnung des Abschneidefehlers.

1. Ableitung, Vorwärtsdifferenz	$y'(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$
1. Ableitung, Rückwärtsdifferenz	$y'(x) = \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$
1. Ableitung, zentrale Differenz	$y'(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$
2. Ableitung, zentrale Differenz	$y''(x) = \frac{y(x - \Delta x) - 2y(x) + y(x + \Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$

Tabelle 3.2: Differenzenquotienten.

**Aufgabe 3.18 (Differenzenquotienten).** Die Herleitung von Differenzenquotienten und die Berechnung der zugehörigen Abschneidefehler können mittels Taylorreihenentwicklung am Punkt  $x$  erfolgen. Rechnen Sie auf diese Art die in Tabelle 3.2 angegebenen Differenzenquotienten nach.

Anhand des 1-dimensionalen Wärmeleitproblems

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \forall t > 0, x \in (0, L) \quad (3.124a)$$

mit  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  (homogenes Material, konstante Materialparameter, keine Quellterme) für die Temperatur  $T(t, x)$  im Gebiet  $x = [0, L]$  mit den Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.124b)$$

$$T(t, L) = T_L(t) \quad (3.124c)$$

und der Anfangsbedingung

$$T(0, x) = T_A(x) \quad (3.124d)$$

soll die Finite Differenzen Methode veranschaulicht werden. Das Rechengebiet wird örtlich in  $N$  Intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) aufgeteilt, wobei

$$x_i = i\Delta x \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad \Delta x = \frac{L}{N}. \quad (3.125)$$

Außerdem soll die Zeitachse in Intervalle der festen Länge  $\Delta t$  unterteilt werden, so dass sich die Gitterpunkte

$$t_j = j\Delta t \quad (3.126)$$

ergeben. Für die Werte an den Gitterpunkten werden die Abkürzungen  $T_i(t) = T(t, x_i)$  und  $T_i^j = T(t_j, x_i) = T_i(t_j)$  verwendet. Aus einer Ersetzung der Ortsableitung in (3.124a) gemäß Tabelle 3.2 folgt das Anfangswertproblem

$$\dot{T}_i(t) = \frac{a}{\Delta x^2}(T_{i-1}(t) - 2T_i(t) + T_{i+1}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (3.127a)$$

$$\dot{T}_0(t) = \frac{2a}{\Delta x^2}(T_1(t) - T_0(t)) \quad (3.127b)$$

mit den Anfangswerten

$$T_i(0) = T_A(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.127c)$$

In (3.127a) gilt natürlich  $T_N(t) = T_L(t)$ . Um (3.127b) zu erhalten, wurde ein virtueller Gitterpunkt an der Stelle  $x_{-1}$  eingeführt und die Randbedingung (3.124b) mit dem zentralen Differenzenquotienten ausgewertet. Dies führt auf

$$\frac{T_1(t) - T_{-1}(t)}{2\Delta x} = 0 \quad (3.128)$$

und damit die in (3.127b) verwendete Beziehung  $T_{-1}(t) = T_1(t)$ . Das Anfangswertproblem (3.127) ist linear und liegt bereits in Zustandsraumdarstellung vor. Es kann also direkt die Lösungsformel für lineare zeitinvariante Systeme zur Berechnung der Temperaturtrajektorien verwendet werden. Alternativ kann das Anfangswertproblem auch mit üblichen numerischen Methoden integriert werden. Das Euler-Vorwärtsverfahren, das aus der Anwendung des Vorwärtsdifferenzenquotienten (vgl. Tabelle 3.2) auf die linken Seiten von (3.127a) und (3.127b) folgt, ist eine solche Methode. Es führt auf die explizite Differenzengleichung

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta t a}{\Delta x^2}(T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j) \quad j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (3.129a)$$

$$T_0^{j+1} = T_0^j + \frac{2\Delta t a}{\Delta x^2}(T_1^j - T_0^j) \quad j \geq 0 \quad (3.129b)$$

mit den Anfangswerten

$$T_i^0 = T_A(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.129c)$$

Es ist unmittelbar einsichtig, dass dieses zeitdiskrete lineare System nicht für beliebige Werte  $\Delta t a / \Delta x^2$  stabil ist. D. h. die Wahl der Zeitschrittweite  $\Delta t$  ist auf die Wahl der Ortsschrittweite  $\Delta x$  abzustimmen. Das Einhalten der Bedingung

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.130)$$

garantiert die Stabilität von (3.129). Der Beweis dieser Bedingung findet sich z. B. in [3.29].

Mit der hier beschriebenen Finite Differenzen Formulierung können bereits 1-dimensionale transiente Wärmeleitungsprobleme gelöst werden. Andere Arten der Diskretisierung, insbesondere der Zeitableitung in (3.124a) finden sich z. B. in [3.3, 3.4, 3.12]. Darunter sind auch Formulierungen die auf implizite Differenzengleichungen führen, deren Stabilität bedingungslos oder mit weniger stringenten Anforderungen an  $\Delta t$  und  $\Delta x$  gesichert ist. Die Anwendung des Verfahrens auf mehrdimensionale Wärmeleitprobleme wird z. B. in [3.4, 3.12, 3.13] beschrieben. Theoretische Grundlagen zur Finite Differenzen Methode finden sich z. B. in [3.27].

*Aufgabe 3.19 (Differenzenquotienten für unregelmäßige Gitter).* Auch die Anwendung der Finite Differenzen Methode mit unregelmäßigen Gittern und auf unregelmäßige Rechengebiete ist möglich. Als Vorbereitung dazu dienen die folgenden Rechnungen. Es ist wie in Tabelle 3.2 von einer Funktion  $y(x)$  auszugehen, wobei die  $x$ -Achse mit der nicht notwendigerweise regelmäßigen Schrittweite  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  zu diskretisieren ist.

- a) Zeigen Sie, dass die zunächst naheliegende Formulierung

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (3.131)$$

für den zentralen Differenzenquotienten 1. Ordnung einen Abschneidefehler von nur linearer Ordnung aufweist.

- b) Finden Sie unter Verwendung von  $y(x_{i-1})$ ,  $y(x_i)$  und  $y(x_{i+1})$  eine bessere Formulierung für  $y'(x_i)$ , deren Abschneidefehler stets quadratische Ordnung besitzt.
- c) Finden Sie unter Verwendung von  $y(x_{i-1})$ ,  $y(x_i)$  und  $y(x_{i+1})$  einen Differenzenquotienten, der eine Näherung für  $y''(x_i)$  repräsentiert, und zeigen Sie, dass deren Abschneidefehler lineare Ordnung besitzt.

*Lösung von Aufgabe 3.19.*

- b)

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} + y(x_i) \left( \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} - \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \right) - y(x_{i-1}) \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (3.132)$$

- c)

$$y''(x_i) = 2 \frac{y(x_{i+1}) \frac{1}{\Delta x_i} - y(x_i) \left( \frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i} \right) + y(x_{i-1}) \frac{1}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \quad (3.133)$$

**Aufgabe 3.20 (Stationäre Wärmeübertragung in einem umströmten Stab).** Rechnen Sie mit Hilfe der Finiten Differenzen Methode die Ergebnisse (3.101) und (3.103) für die Parameterwerte  $L = 0.5 \text{ m}$ ,  $T_0 = 353 \text{ K}$ ,  $T_L = T_\infty = 293 \text{ K}$ ,  $\alpha = \alpha_L = 25 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ,  $P = 0.5 \text{ m}$ ,  $A = 0.01 \text{ m}^2$  und  $\lambda = 60 \text{ W}/(\text{m K})$  nach. Implementieren Sie dazu die Gleichung (3.100a) samt den jeweils zugehörigen Randbedingungen in einem Computernumerikprogramm. Ersetzen Sie dabei die Ortsableitungen durch zentrale Differenzenquotienten gemäß Tabelle 3.2 für ein regelmäßiges Gitter mit der Schrittweite  $\Delta x$ . Vergleichen Sie die Ergebnisse für unterschiedliche Schrittweiten mit den analytischen Resultaten (3.101) und (3.103).

**Aufgabe 3.21 (Transiente Wärmeübertragung in einem umströmten Stab).** Erweitern Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 3.20 zu einer transienten Analyse. Verwenden Sie die Anfangsbedingung  $T(x, 0) = T_\infty$  und die Parameter  $\rho = 7850 \text{ kg}/\text{m}^3$  und  $c_p = 450 \text{ J}/(\text{kg K})$  und wählen Sie unter Berücksichtigung von (3.130) geeignete Schrittweiten  $\Delta t$  und  $\Delta x$ . Wie lange dauert es bis die maximale Differenz zwischen stationärem und transientem Temperaturprofil den Wert  $0.05(T_0 - T_\infty)$  unterschreitet?

### 3.6.2 Konzentriert-parametrische Formulierung als RC-Netzwerk

Ein meist zentraler Schritt bei der numerischen Lösung von Wärmeübertragungsproblemen ist der Übergang von einer verteilt-parametrischen zu einer konzentriert-parametrischen Formulierung, d. h. die räumliche Diskretisierung. Im vergangenen Abschnitt beruhte dieser Übergang rein auf mathematischen Überlegungen zur Berechnung von Ableitungen. Aufbauend auf diesen Resultaten zeigt der vorliegende Abschnitt eine physikalisch motivierte Möglichkeit zur räumlich diskreten Formulierung von Wärmeübertragungsproblemen. Diese Formulierung führt auf eine Analogie zwischen elektrischen RC-Netzwerken und thermischen Netzwerken (thermische RC-Netzwerke). Die nachfolgend näher diskutierten korrespondierenden Größen sind in Tabelle 3.3 aufgelistet.

Tabelle 3.3: Analogie zwischen elektrischen und thermischen Netzwerken.

Elektrische Größe	Einheit	Thermische Größe	Variable	Einheit
Potentialdifferenz	V	Temperaturdifferenz	$T$	K
Elektrischer Strom	A	Wärmestrom	$\dot{Q}$	W
Elektrische Ladung	C	Enthalpie	$H$	J
Elektrischer Widerstand	$\Omega$	Thermischer Widerstand	$R$	K/W
Elektrische Kapazität	F	Thermische Kapazität	$C$	J/K

Die Temperatur  $T$  stellt eine Zweipunktgröße dar, der Wärmestrom  $\dot{Q}$  eine Einpunktgröße. Ähnlich dem Ohmschen Gesetz in der Elektrotechnik gilt für die Temperaturdifferenz  $\Delta T$  an den beiden Enden eines thermischen Widerstandes  $R$

$$\Delta T = R\dot{Q} . \quad (3.134a)$$

Ferner kann das dynamische Verhalten der Temperatur  $T$  (Zustandsgröße) einer thermischen Kapazität  $C$  durch

$$\dot{T} = \frac{\dot{Q}}{C} \quad (3.134b)$$

charakterisiert werden. Auch hier ist die Ähnlichkeit zur Strom-Spannungsbeziehung an elektrischen Kapazitäten unmittelbar ersichtlich. Bemerkenswerterweise findet sich im Bereich der Wärmeübertragung aber kein Analogon zur elektrischen Induktivität. Dies erklärt aus physikalischer Sicht, warum es in thermischen Netzwerken (ohne periodische Anregung) kein oszillierendes Verhalten geben kann. D. h. das linearisierte dynamische System besitzt ausschließlich rein reelle Eigenwerte.

Die Darstellung eines Wärmeübertragungsproblems als thermisches RC-Netzwerk kann hilfreich sein, weil die aus der Elektrotechnik bekannten Knoten- und Maschengleichungen zur Netzwerkanalyse genutzt werden können. Ferner können gängige Netzwerksimulationsprogramme zur Berechnung herangezogen werden.

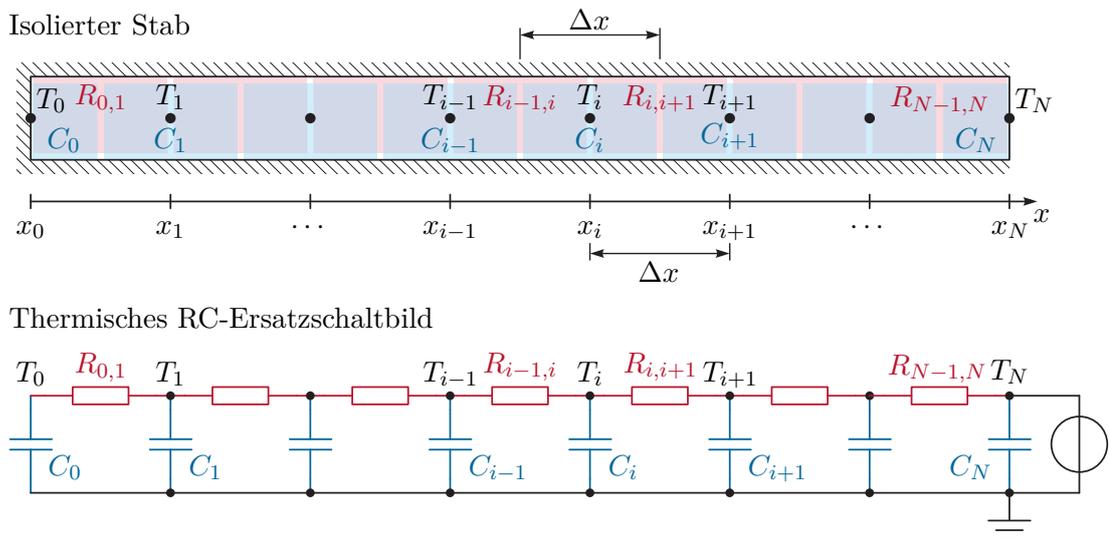


Abbildung 3.29: Finite Differenzen Formulierung als Kette von RC-Gliedern.

Abbildung 3.29 zeigt einen an der Mantelfläche und am Ende  $x = 0$  isolierten Stab, dessen transienter Temperaturverlauf z. B. mit Hilfe von (3.127) berechnet werden kann. Die Diskretisierungspunkte  $x_i$  sind als schwarze Punkte in Abbildung 3.29 dargestellt. Die Querschnittsfläche des Stabes sei konstant  $A$ . Man kann nun in (3.127a) und (3.127b)

durch Umschreiben in die Form

$$\underbrace{\frac{\Delta x A \rho c_p}{2}}_{=C_i} \dot{T}_i(t) = \underbrace{A \frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{i-1,i}}} (T_{i-1}(t) - T_i(t)) + \underbrace{A \frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{i,i+1}}} (T_{i+1}(t) - T_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.135a)$$

$$\underbrace{\frac{\Delta x}{2} A \rho c_p}_{=C_0} \dot{T}_0(t) = \underbrace{A \frac{\lambda}{\Delta x}}_{=\frac{1}{R_{0,1}}} (T_1(t) - T_0(t)) \quad (3.135b)$$

thermische Kapazitäten  $C_i$  und thermische Widerstände  $R_{i,i+1}$  identifizieren und das in Abbildung 3.29 gezeigte Ersatzschaltbild erstellen. Es hat eine leiterförmige Struktur und wird auch Cauer Modell genannt. Der thermische Widerstand  $R_{i,i+1}$  verbindet den Knoten  $x_i$  mit dem Knoten  $x_{i+1}$ . Die thermische Kapazität  $C_i$  verbindet den Knoten  $x_i$  mit der thermischen Masse. Da der Knoten  $x_0$  am Rand des Rechengebietes liegt, ist seine thermische Kapazität  $C_0$  nur halb so groß, wie die der Knoten im Inneren. Gleiches würde auch für den Randknoten  $x_N$  gelten, dessen thermische Kapazität  $C_N$  aber hier nicht von Bedeutung ist, da  $T_N(t) = T_L(t)$  fest vorgegeben ist (Randbedingung erster Art).

An diesem einfachen Beispiel werden bereits einige der folgenden Prinzipien von thermischen RC-Netzwerken klar:

- Ein thermisches RC-Netzwerk beschreibt ein Anfangswertproblem (gewöhnliche Differentialgleichung mit Anfangswerten, vgl. das Zustandsraummodell (3.127)).
- Thermische Widerstände stellen immer eine thermische Verbindungsstrecke zwischen zwei Knoten dar. Außerdem treten sie bei einigen Randbedingungen auf. Mit thermischen Widerständen lassen sich wärmeleitende Volumen und generell Wärmeübertragungsstrecken modellieren. Der in stationären Wärmeübertragungsproblemen häufig verwendete  $k$ -Wert (vgl. (3.89) und (3.95)) steht mit dem thermischen Widerstand über die Beziehung

$$R = \frac{1}{Ak} \quad (3.136)$$

in Verbindung, wobei  $A$  die Querschnittsfläche des Widerstandes ist.

- Volumetrische Wärmequellen können als zusätzliche in die Netzwerkknoten mündende Stromquellen modelliert werden (vgl. Abbildung 3.30d).
- Thermische Kapazitäten sind immer direkt mit der thermischen Masse verbunden, d. h. alle Kapazitäten sind sternförmig um die thermische Masse angeordnet. Thermische Kapazitäten haben keinen Einfluss auf die stationäre Temperaturverteilung und das stationäre Wärmeübertragungsverhalten des Systems.
- Die Temperatur (das Potential) der thermischen Masse beträgt 0 K.
- Eine Randbedingung erster Art (fest vorgegebene Temperatur  $T_i = T_a$  and einem Randknoten  $x_i$ ) kann als ideale Potentialquelle modelliert werden (vgl. Abbildung 3.30a).

- Eine Randbedingung zweiter Art (fest vorgegebener Wärmestrom  $\dot{Q}_a$ ) kann als ideale Stromquelle modelliert werden (vgl. Abbildung 3.30b). (Im obigen Beispiel tritt am Rand  $x = 0$  kein Wärmestrom auf ( $\dot{Q}_a=0$ ).)
- Eine Randbedingung dritter Art (temperaturabhängige Wärmestromdichte  $\alpha(T_a - T_i)$ ) am Randknoten  $x_i$ , vgl. die Abschnitte 3.2.1 bis 3.2.3) kann mit Hilfe eines thermischen Widerstandes (Kontakt- oder Übergangswiderstand)

$$R_a = \frac{1}{A\alpha} \quad (3.137)$$

modelliert werden, wobei  $A$  die Fläche der Randbedingung ist. Ist eines der beiden Temperaturniveaus  $T_a$  oder  $T_i$  fest vorgegeben (gilt z. B. häufig für die Umgebungstemperatur  $T_a = T_\infty$ ), so ist der Widerstand an eine ideale Potentialquelle zu koppeln (vgl. Abbildung 3.30c).

- Soll ein RC-Netzwerkmodell auch zur Abbildung nichtlinearer Effekte (z. B. Wärmestrahlung, vgl. Abschnitt 3.2.4) verwendet werden, so sind die konstitutiven Beziehungen (3.134) durch entsprechende nichtlineare Ausdrücke zu ersetzen. Außerdem ist es natürlich möglich den linearisierten Anteil des thermischen Verhaltens als lineares Netzwerk zu modellieren.

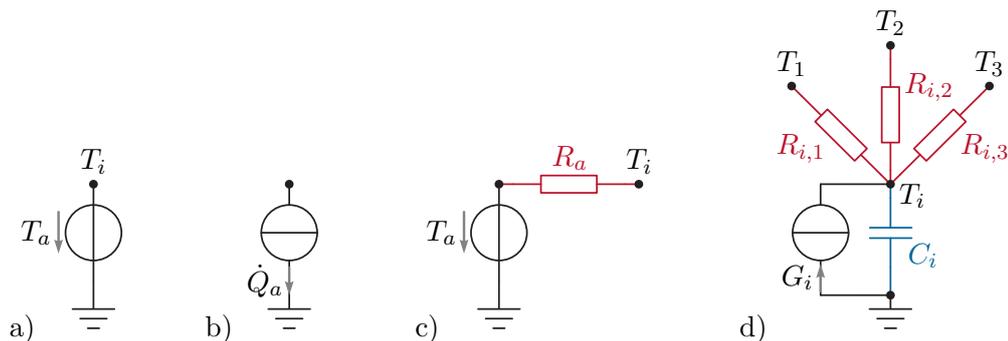


Abbildung 3.30: Basiselemente für thermische RC-Netzwerke, a) Randbedingung erster Art, b) Randbedingung zweiter Art, c) Randbedingung dritter Art, d) Knotenelement mit Wärmequelle.

Als Grundeinheit zur Erstellung thermischer RC-Netzwerke kann das in Abbildung 3.30d gezeigte Knotenelement  $i$  dienen. Es ist über eine Kapazität  $C_i$  mit der thermischen Masse und über Widerstände  $R_{i,j}$  mit den anderen Knoten  $j = 1, 2, \dots$  verbunden und beinhaltet außerdem eine (volumetrische) Wärmequelle  $G_i$ . Eine andere als die in Abbildung 3.29 gezeigte sternförmige Anordnung der Kapazitäten rund um die thermische Masse kann durch Transformationen gefunden werden. Eine eindeutige physikalische Interpretation ist jedoch nur bei der sternförmigen Anordnung der Kapazitäten möglich.

Im obigen Beispiel wurde gezeigt, dass eine Finite Differenzen Formulierung eines Wärmeübertragungsproblems eine einfache Interpretation als thermisches RC-Netzwerk

in Form eines Cauer Modells zulässt. Dieses Prinzip ist erweiterbar, denn das Modellierungsergebnis muss nicht zwingend ein Cauer Modell sein und der Ausgangspunkt der Modellierung ist zumeist keine Finite Differenzen Diskretisierung. Vielmehr kann ausgehend von einem physikalischen Modell durch benutzerdefinierte Partitionierung des Rechengebietes direkt manuell ein thermisches RC-Ersatzschaltbild erstellt werden. Daraus kann leicht ein Zustandsraummodell des Systems abgelesen werden.

Im Falle eines prismatischen, an der Mantelfläche isolierten Körpers mit der volumetrischen Wärmequelle  $g$  gilt (vgl. auch (3.127))

$$C_i = \Delta x_i A \rho c_p \quad (3.138a)$$

$$R_{i,i+1} = \frac{\Delta x_{i,i+1}}{A \lambda} \quad (3.138b)$$

$$G_i = \Delta x_i A g . \quad (3.138c)$$

In technischen Anwendungen mit komplexeren Geometrien werden diese Werte oft in Messungen oder numerischen Analysen bestimmt. Wie das nachfolgende Beispiel zeigt, können auch Serien- und Parallelschaltungen von thermischen Widerständen zumindest näherungsweise berechnet werden.

*Beispiel 3.6 (Serien- und Parallelschaltung von thermischen Widerständen).* Abbildung 3.31a zeigt einen inhomogenen wärmeleitenden Quader mit der Länge  $L$ , der Breite  $B$  und der Höhe  $H$  (vgl. [3.4]). An der linken und an der rechten Seitenfläche werden homogen verteilte feste Randtemperaturen eingeprägt (Randbedingungen erster Art). Alle übrigen Oberflächen sind adiabat. Der Quader besteht aus den vier Blöcken  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  mit unterschiedlichen Materialien.

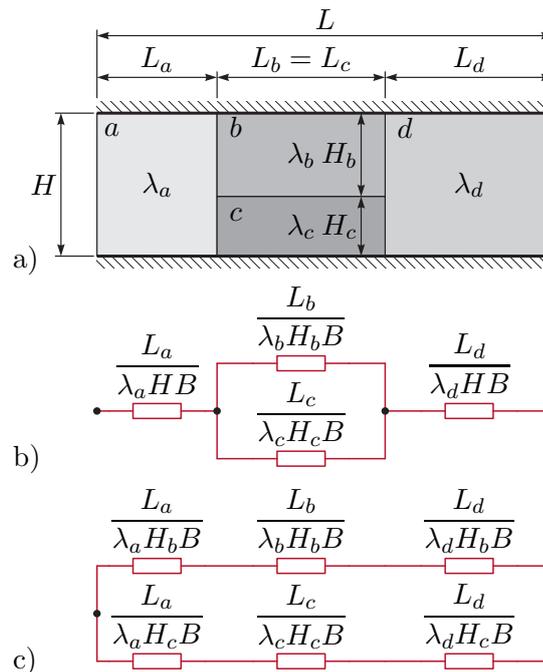


Abbildung 3.31: Serien- und Parallelschaltung von thermischen Widerständen (in Anlehnung an [3.4]), a) Aufbau, b) thermisches Ersatzschaltbild für untere Schranke des Gesamtwiderstandes, c) thermisches Ersatzschaltbild für obere Schranke des Gesamtwiderstandes.

Um den thermischen Widerstand  $R$  des Quaders zu ermitteln, müsste ein 2-dimensionales stationäres Wärmeleitproblem (numerisch) gelöst werden. Durch einfache Serien- und Parallelschaltungen von Teilwiderständen lassen sich aber untere und obere Schranken für  $R$  finden, die oftmals brauchbare Näherungen für  $R$  sind. Zur Erklärung kann man gedanklich von einer orthotropen Wärmeleitfähigkeit ausgehen. In horizontaler Richtung gelten die angegebenen Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_a$ ,  $\lambda_b$ ,  $\lambda_c$  und  $\lambda_d$ . Geht man davon aus, dass für die Wärmeleitfähigkeit in vertikaler Richtung  $\lambda_v \rightarrow \infty$  gilt, so bedingt dies eine homogene Temperaturverteilung entlang vertikaler Schnittflächen innerhalb der Teilbereiche  $a$  und  $d$  und insbesondere an deren Grenzschichten. Die thermischen Widerstände der Bereiche  $b$  und  $c$  sind daher, wie in Abbildung 3.31b dargestellt, an ihren Enden thermisch verbunden. Für dieses Ersatzschaltbild folgt

$$\underline{R} = \frac{L_a}{\lambda_a H B} + \frac{1}{\frac{L_b}{\lambda_b H_b B} + \frac{L_c}{\lambda_c H_c B}} + \frac{L_d}{\lambda_d H B}, \quad (3.139)$$

was eine untere Schranke des thermischen Gesamtwiderstandes  $R$  darstellt. Wird hingegen  $\lambda_v = 0$  angenommen, womit kein Wärmestrom in vertikale Richtung möglich ist, so ergibt sich ein thermisches Ersatzschaltbild gemäß Abbildung 3.31c mit der

oberen Schranke

$$\bar{R} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{L_a}{\lambda_a H_b B} + \frac{L_b}{\lambda_b H_b B} + \frac{L_d}{\lambda_d H_b B}} + \frac{1}{\frac{L_a}{\lambda_a H_c B} + \frac{L_c}{\lambda_c H_c B} + \frac{L_d}{\lambda_d H_c B}}} . \quad (3.140)$$

**Beispiel 3.7 (Dimensionierung eines Kühlkörpers für einen Spannungsregler).** Ein linearer Spannungsregler liefert am Ausgang  $U_a = 5 \text{ V}$ , wobei für die Eingangsspannung  $6 \text{ V} \leq U_e \leq 20 \text{ V}$  gelten muss. Die angeschlossene Last zieht einen Gleichstrom  $I_a = 0.5 \text{ A}$ . Der gleiche Strom fließt auch eingangsseitig, d. h. der Spannungsregler reduziert nur die Eingangsspannung auf den gewünschten Ausgangswert  $U_a$ . Aus dem Datenblatt des Spannungsreglers sind außerdem die thermischen Widerstandswerte  $R_{SB} = 5 \text{ K/W}$  und  $R_{B\infty} = 60 \text{ K/W}$  bekannt.  $R_{SB}$  ist der thermische Widerstand zwischen Sperrschicht und Basisplatte und  $R_{B\infty}$  ist der thermische Widerstand zwischen Basisplatte und Umgebungsluft. Die Basisplatte hat eine Masse  $m_B = 0.002 \text{ kg}$  und eine spezifische Wärmekapazität  $c_B = 385 \text{ J/(kg K)}$  (Kupfer). Die Wärmeübertragung über das Kunststoffgehäuse und die elektrischen Anschlusskontakte sei vernachlässigbar klein.

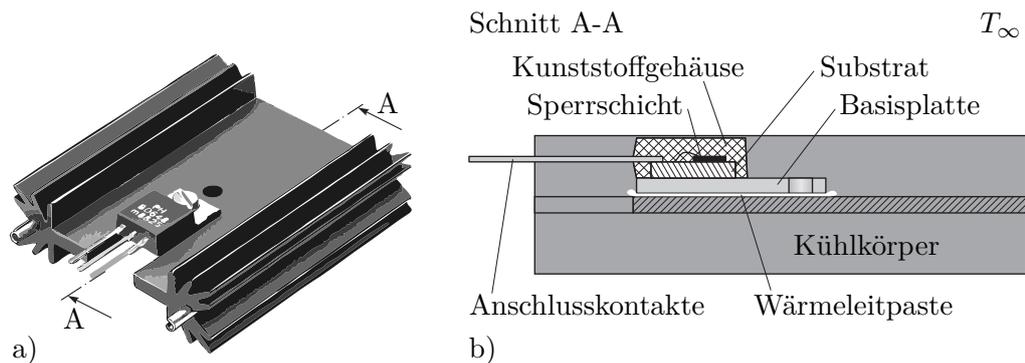


Abbildung 3.32: Spannungsregler mit Kühlkörper, a) Ansicht, b) innerer Aufbau.

Die Sperrschichttemperatur  $T_S$  soll den Wert  $T_{S,max} = 403 \text{ K}$  nicht überschreiten, wobei die Umgebungsluft die feste Temperatur  $T_\infty = 323 \text{ K}$  aufweist. Um die Kühlung zu verbessern, wird ein Kühlkörper (passive Kühlung) mit der Masse  $m_K = 0.02 \text{ kg}$  und der spezifischen Wärmekapazität  $c_K = 903 \text{ J/(kg K)}$  (Aluminium) aufgeschraubt. Der thermische Widerstand zwischen Kühlkörper und Umgebungsluft beträgt laut Datenblatt des Kühlkörpers  $R_{K\infty} = 7 \text{ K/W}$ . Durch die Verwendung von Wärmeleitpaste konnte der Übergangswiderstand zwischen Basisplatte und Kühlkörper im Vergleich zu einem Luftspalt deutlich reduziert werden. Die Paste besitzt eine Wärmeleitfähigkeit von  $\lambda = 0.8 \text{ W/(m K)}$  und wurde auf einer Fläche  $A = 150 \text{ mm}^2$  mit einer Dicke  $H = 30 \text{ }\mu\text{m}$  aufgetragen. Mit Hilfe der konzentriert-parametrischen Formulierung sollen folgende Fragen geklärt werden:

- a) Wie hoch darf die Eingangsspannung  $U_e$  im stationären Fall mit bzw. ohne Kühlkörper maximal sein, damit die zulässige Sperrschichttemperatur  $T_{S,max}$

eingehalten wird?

- b) Zur Untersuchung des Einflusses von Schwankungen der Eingangsspannung soll davon ausgegangen werden, dass die Eingangsspannung  $U_e(t)$  sinusförmig zwischen 6 V und 20 V schwankt, d. h. den Verlauf  $U_e(t) = \bar{U}_e + \hat{U}_e \cos(2\pi ft)$  mit  $\bar{U}_e = 13$  V und  $\hat{U}_e = 7$  V besitzt. Welche Frequenz  $f$  muss das Signal mindestens haben, damit der Spannungsregler in der Konfiguration mit dem Kühlkörper nicht überhitzt?

Die in Abbildung 3.32 dargestellte Konfiguration lässt sich durch die thermischen Ersatzschaltbilder gemäß Abbildung 3.33 beschreiben, wobei  $P$  die Heizleistung des Spannungsreglers und  $R_P$  den thermischen Widerstand der Wärmeleitpaste bezeichnen.

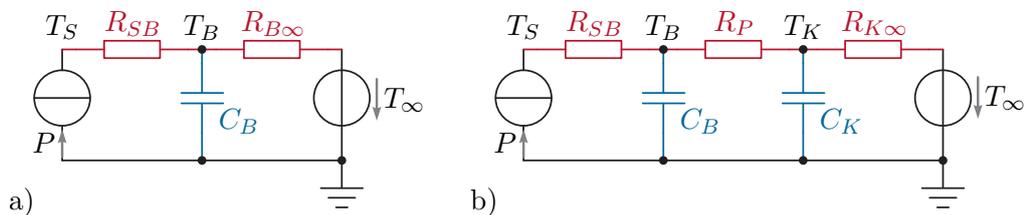


Abbildung 3.33: Thermische Ersatzschaltbilder, a) ohne Kühlkörper, b) mit Kühlkörper.

ad a) Die Heizleistung des Spannungsreglers beträgt

$$P = (U_e - U_a)I_a, \quad (3.141)$$

so dass

$$U_{e,max} = U_a + \frac{P_{max}}{I_a}. \quad (3.142)$$

Für die maximale Heizleistung gilt im stationären Fall

$$P_{max} = \frac{T_{S,max} - T_\infty}{R_{ges}}, \quad (3.143)$$

wobei ohne Kühlkörper für den Gesamtwiderstand

$$R_{ges} = R_{SB} + R_{B\infty} \quad (3.144)$$

gilt und mit Kühlkörper

$$R_{ges} = R_{SB} + R_P + R_{K\infty}. \quad (3.145)$$

Hierbei ist

$$R_P = \frac{H}{\lambda A} \quad (3.146)$$

der thermische Widerstand der Wärmeleitpaste. Damit kann die maximale Eingangsspannung  $U_{e,max}$  direkt berechnet werden. Ohne Kühlkörper dürfen maximal 7.462 V und mit Kühlkörper maximal 18.061 V am Eingang anliegen.

ad b) Für die thermischen Kapazitäten gilt

$$C_B = m_B c_B, \quad C_K = m_K c_K \quad (3.147)$$

und für die Heizleistung im Spannungsregler erhält man

$$P(t) = (\bar{U}_e + \hat{U}_e \cos(2\pi ft) - U_a) I_a = \underbrace{(\bar{U}_e - U_a) I_a}_{=\bar{P}} + \underbrace{\hat{U}_e I_a}_{\hat{P}} \cos(2\pi ft). \quad (3.148)$$

Da es sich um ein lineares System handelt gilt für die Sperrschichttemperatur

$$T_S(t) = \bar{T}_S + \hat{T}_S \cos(2\pi ft + \varphi) \quad (3.149)$$

mit dem konstanten Anteil

$$\bar{T}_S = T_\infty + \bar{P}(R_{SB} + R_P + R_{K\infty}), \quad (3.150)$$

der Amplitude

$$\hat{T}_S = |G(j2\pi f)| \hat{P} \quad (3.151)$$

und der Phase

$$\varphi = \arg(G(j2\pi f)). \quad (3.152)$$

Die hier verwendete Übertragungsfunktion

$$G(s) = R_{SB} + \frac{R_P(1 + sR_{K\infty}C_K) + R_{K\infty}}{(1 + sR_P C_B)(1 + sR_{K\infty}C_K) + sR_{K\infty}C_B} \quad (3.153)$$

lässt sich leicht anhand des in Abbildung 3.33b gezeigten RC-Netzwerks berechnen. Natürlich zeigt sie Tiefpassverhalten. Die gesuchte minimale Frequenz  $f_{min}$  lässt sich aus der Bestimmungsgleichung

$$\frac{T_{S,max} - \bar{T}_S}{\hat{U}_e I_a} = |G(j2\pi f_{min})| \quad (3.154)$$

berechnen. Man erhält z. B. durch numerisches Lösen von (3.154)  $f_{min} = 1.429 \cdot 10^{-3} \text{ Hz} = 5.146 \text{ h}^{-1}$ .

### 3.7 Literatur

- [3.1] M. Moran und H. Shapiro, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, 6. Aufl. New York: John Wiley & Sons, 2009.
- [3.2] P. Stephan, K. Schaber, K. Stephan und F. Mayinger, *Thermodynamik, Band 1: Einstoffsysteme*, 18. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2009.
- [3.3] H.D. Baehr und K. Stephan, *Heat and Mass Transfer*, 2. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
- [3.4] F.P. Incropera, D.P. DeWitt, T.L. Bergman und A.S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 6. Aufl. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007.
- [3.5] J.H. Lienhard IV und J.H. Lienhard V, *A Heat Transfer Textbook*, 3. Aufl. Cambridge, Massachusetts: Phlogiston Press, 2002.
- [3.6] J. Welty, C. Wicks, R. Wilson und G. Rorrer, *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*, 5. Aufl. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007.
- [3.7] T. Bennett, *Transport by Advection and Diffusion*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2012.
- [3.8] R. Bird, W. Stewart und E. Lightfoot, *Transport Phenomena*. New York: John Wiley & Sons, 2007.
- [3.9] M. Protter und H. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*. New York: Springer, 1984.
- [3.10] W.M. Kays, M.E. Crawford und B. Weigand, *Convective Heat and Mass Transfer*, 4. Aufl. New York: McGraw Hill, 2005.
- [3.11] H. Schlichting und K. Gersten, *Grenzschicht-Theorie*, 10. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
- [3.12] A. Bejan und A. Kraus, Hrsg., *Heat Transfer Textbook*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2003.
- [3.13] Y. Çengel und A. Ghajar, *Heat Transfer: A Practical Approach*, 5. Aufl. New York: McGraw-Hill, 2015.
- [3.14] M. Favre-Marinet und S. Tardu, *Convective Heat Transfer: Solved Problems*, Ser. ISTE. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.
- [3.15] J. Holman, *Heat transfer*, 10. Aufl. New York: McGraw-Hill, 2009.
- [3.16] Verein Deutscher Ingenieure, *VDI-Wärmeatlas*, 10. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
- [3.17] W. Wagner, *Wärmeübertragung: Grundlagen*, 7. Aufl., Ser. Kamprath-Reihe. Würzburg: Vogel Buchverlag, 2011.
- [3.18] Y. Çengel, J. Cimbala und R. Turner, *Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences*, 4. Aufl. New York: McGraw-Hill, 2012.
- [3.19] M.F. Modest, *Radiative Heat Transfer*, 3. Aufl. New York: Academic Press, 2013.

- [3.20] J. Howell, R. Siegel und P. Mengüç, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 5. Aufl. Boca Raton: CRC Press, 2010.
- [3.21] H.C. Hottel und A.F. Sarofim, *Radiative Transfer*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [3.22] J.R. Howell, *A Catalog of Radiation Heat Transfer Configuration Factors*, 3. Aufl. <<http://www.engr.uky.edu/rtl/Catalog>>, 2010.
- [3.23] H.C. Hottel, „Radiant-Heat Transmission“, in, W.H. McAdams, Hrsg. McGraw-Hill, 1954, S. 55–125.
- [3.24] M. Albach, *Grundlagen der Elektrotechnik 1: Erfahrungssätze Bauelemente Gleichstromschaltungen*, 3. Aufl. München: Pearson Studium, 2011.
- [3.25] P. Tipler und R. Llewellyn, *Moderne Physik*, 2. Aufl. München: Oldenbourg, 2010.
- [3.26] E. Schrüfer, L. Reindl und B. Zagar, *Elektrische Messtechnik: Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen*, 10. Aufl. München: Hanser, 2012.
- [3.27] J. Thomas, *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Ser. Texts in Applied Mathematics 22. New York: Springer, 1995.
- [3.28] J.-M. Bergheau und R. Fortunier, *Finite Element Simulation of Heat Transfer*. Hoboken, NJ: Wiley, 2008.
- [3.29] H.R. Schwarz und N. Köckler, *Numerische Mathematik*, 6. Aufl. Wiesbaden: B.G. Teubner, 2006.

# A Grundlegende Bilanzgleichungen und Zustandsgrößen

## A.1 Gaußscher Integralsatz

Es sei  $\mathcal{V}(t)$  ein beliebiges zeitabhängiges Kontrollvolumen mit der zugehörigen Oberfläche  $\partial\mathcal{V}(t)$ . Der nach außen gerichtete Normalenvektor auf einem infinitesimalen Oberflächenelement  $d\mathcal{A}$  wird mit  $\mathbf{n}$  bezeichnet. Der *Gaußsche Integralsatz* lautet nun

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \nabla \cdot \mathbf{f} \, d\mathcal{V} = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (\text{A.1})$$

für eine vektorielle Feldgröße  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  am Ort  $\mathbf{x}$  und

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \nabla f \, d\mathcal{V} = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} f \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (\text{A.2})$$

für eine skalare Feldgröße  $f(\mathbf{x})$ .

## A.2 Reynoldssches Transporttheorem

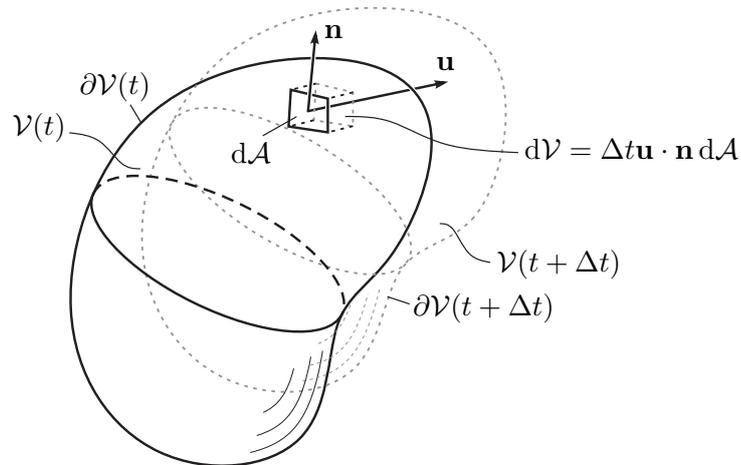
Das *Reynoldssche Transporttheorem* kann als dreidimensionale Erweiterung der *Leibnizregel* zur Differentiation von Parameterintegralen interpretiert werden. Diese Regel definiert wie ein Integral  $\int_{a(t)}^{b(t)} \chi(t, x) \, dx$  mit stetig differenzierbaren Funktionen  $\chi(t, x)$ ,  $a(t)$  und  $b(t)$  total nach  $t$  abgeleitet werden kann. Es gilt dann

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \chi(t, x) \, dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial \chi(t, x)}{\partial t} \, dx + \chi(t, b(t)) \frac{db(t)}{dt} - \chi(t, a(t)) \frac{da(t)}{dt}. \quad (\text{A.3})$$

Zur Herleitung des Reynoldsschen Transporttheorems betrachte man ein zeitabhängiges Kontrollvolumen (Integrationsgebiet)  $\mathcal{V}(t)$  mit der Oberfläche (Berandung)  $\partial\mathcal{V}(t)$ , wie in Abbildung A.1 angedeutet. Für ein infinitesimales Element  $d\mathcal{A}$  der Oberfläche  $\partial\mathcal{V}(t)$  sei  $\mathbf{n}$  der nach außen gerichtete Normalenvektor und  $\mathbf{u}$  die zugehörige lokale Momentangeschwindigkeit der Oberfläche. Natürlich sind  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{u}$  Funktionen von  $t$  und  $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}(t)$ . Ausgangspunkt der Herleitung ist die zeitliche Ableitung des Integrals

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \chi(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\mathcal{V}(t+\Delta t)} \chi(t+\Delta t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}(t)} \chi(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} \right). \quad (\text{A.4})$$

Mit  $\mathcal{V}(t + \Delta t) = \mathcal{V}(t) + \Delta\mathcal{V}$  und  $\chi(t + \Delta t, \mathbf{x}) \approx \chi(t, \mathbf{x}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \chi(t, \mathbf{x})$  für  $\Delta t \rightarrow 0$  erhält

Abbildung A.1: Änderung eines Kontrollvolumens  $\mathcal{V}$ .

man zunächst

$$\int_{\mathcal{V}(t+\Delta t)} \chi(t+\Delta t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \chi(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} + \int_{\Delta\mathcal{V}} \chi(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} + \Delta t \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \chi(t, \mathbf{x})}{\partial t} d\mathcal{V} + \underbrace{\Delta t \int_{\Delta\mathcal{V}} \frac{\partial \chi(t, \mathbf{x})}{\partial t} d\mathcal{V}}_{\approx 0}. \quad (\text{A.5})$$

Wie in Abbildung A.1 angedeutet, setzt sich das durch die Änderung des Kontrollvolumens  $\mathcal{V}(t)$  hinzukommende Volumen  $\Delta\mathcal{V}$  aus infinitesimalen Volumenelementen

$$d\mathcal{V} = \Delta t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (\text{A.6})$$

zusammen. Damit kann der Term  $\int_{\Delta\mathcal{V}} \chi(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V}$  in (A.5) in die Form

$$\int_{\Delta\mathcal{V}} \chi(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = \Delta t \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \chi(t, \mathbf{x}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (\text{A.7})$$

umgeschrieben werden. Setzt man in (A.7)  $\chi = 1$ , so ergibt sich  $\Delta\mathcal{V} = \Delta t \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A}$  und folglich gilt für  $\Delta t \rightarrow 0$  auch  $\Delta\mathcal{V} \rightarrow 0$ . Dies erklärt warum der letzte Term in (A.5) im Vergleich zu den anderen Summanden vernachlässigt werden kann. Setzt man nun (A.7) in (A.5) und das Resultat in (A.4) ein, so erhält man das *Reynoldsche Transporttheorem*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \chi(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \chi(t, \mathbf{x})}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \chi(t, \mathbf{x}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A}. \quad (\text{A.8})$$

## A.3 Energieerhaltungssatz

Energie ist eine extensive Zustandsgröße eines Systems. Der Energieerhaltungssatz besagt, dass Energie eine Erhaltungsgröße ist. D. h. sie kann weder vernichtet noch erzeugt,

sondern lediglich umgewandelt und transportiert werden. Je nachdem ob ein geschlossenes Kontrollvolumen  $\mathcal{V}_m(t)$  oder ein offenes Kontrollvolumen  $\mathcal{V}(t)$  betrachtet wird, ist der Energieerhaltungssatz anders zu formulieren.

### A.3.1 Energieerhaltung in geschlossenen Systemen

Von einem *geschlossenen* System spricht man, wenn kein Materiefluss über die Berandung  $\partial\mathcal{V}_m(t)$  des betrachteten Kontrollvolumens  $\mathcal{V}_m(t)$  zugelassen wird. Bewegt oder deformiert sich die Materie, so muss sich folglich das Kontrollvolumen  $\mathcal{V}_m(t)$  mitbewegen. Man bezeichnet das Kontrollvolumen  $\mathcal{V}_m(t)$  dann auch als *materiefest*, was hier durch das tiefgestellte Zeichen  $m$  angedeutet wird.

Die Gesamtenergie in einem Kontrollvolumen setzt sich aus verschiedenen Energieformen zusammen, z. B. der inneren Energie (chemische Energie, thermische Energie, Kernenergie), der mechanischen Energie (kinetische Energie, potentielle Energie), der elektrischen Energie, der magnetischen Energie, der Strahlungsenergie, etc. zusammen. In dieser Vorlesung werden nur die innere Energie  $U = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho(t, \mathbf{x}) u(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V}$ , die kinetische Energie  $T = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) / 2 d\mathcal{V}$  und die potentielle Energie  $V = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho(t, \mathbf{x}) g z d\mathcal{V}$  betrachtet. Hierbei ist  $\rho(t, \mathbf{x})$  die Massendichte,  $u(t, \mathbf{x})$  die spezifische innere Energie in J/kg (auf eine Masseneinheit bezogen),  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  die lokale Momentangeschwindigkeit der Materie,  $g$  die Erdbeschleunigung und  $z$  die lokale Höhenkoordinate. Die Gesamtenergie  $E$  in einem Kontrollvolumen  $\mathcal{V}_m(t)$  folgt daher in der Form

$$E = U + T + V = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \underbrace{\left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + g z \right)}_e d\mathcal{V} \quad (\text{A.9})$$

mit der spezifischen totalen Energie  $e(t, \mathbf{x})$ . Gemäß Energieerhaltungssatz kann in geschlossenen Systemen die Gesamtenergie  $E$  nur durch einen zugeführten Wärmestrom  $\dot{Q}$  oder die zugeführte Leistung  $\dot{W} = P = P_{me} + P_{el}$  durch eine am System verrichtete Arbeit, welche sich aus einer mechanischen Leistung  $P_{me}$  und einer elektrischen Leistung  $P_{el}$  zusammensetzt, verändert werden. Folglich kann die Leistungsbilanz (zeitlich differentielle Form der Energiebilanz)

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho e d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}_m(t)} \rho e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \dot{Q} + P_{me} + P_{el} \quad (\text{A.10})$$

für geschlossene Systeme formuliert werden, wobei hier das Reynoldssche Transporttheorem (A.8) mit  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  angewendet wurde. Der zugeführte Wärmestrom kann in der Form

$$\dot{Q} = - \int_{\partial\mathcal{V}_m(t)} \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (\text{A.11})$$

mit der Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x})$  berechnet werden. Mechanische Leistung  $P_{me}$  kann dem System durch Volumenkräfte ausgedrückt durch die Kraftdichte  $\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  (in N/m<sup>3</sup>) mit  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}_m(t)$  und Oberflächenkräfte ausgedrückt durch die Kraftdichte  $\mathbf{t}(t, \mathbf{x})$  (in N/m<sup>2</sup>) mit  $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}_m(t)$  zugeführt werden. Es sind hierbei nur jene Kräfte zu berücksichtigen, die nicht bereits in der potentiellen Energie  $V$  erfasst sind (z. B. darf  $-\rho g \mathbf{e}_z$  nicht mehr in

$\rho \mathbf{f}$  auftreten). Entsprechend (2.78) gilt *mechanische Leistung* = *Kraft*  $\times$  *Geschwindigkeit* und damit durch Integration über das Kontrollvolumen und dessen Oberfläche

$$P_{me} = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}_m(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{A} . \quad (\text{A.12})$$

Häufig wird die Oberflächenkraftdichte

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}) \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) \quad (\text{A.13})$$

aus dem mechanischen Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x})$  (Kraft pro Flächeneinheit) berechnet. Hierbei ist  $\mathbf{n}$  der Normalenvektor der betrachteten Schnittfläche (Oberfläche). Ferner kann der Drucktensor  $-p\mathbf{E}$  mit dem Druck

$$p = -\frac{\text{spur}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \quad (\text{A.14})$$

vom Spannungstensor abgespalten werden. Man erhält dann

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{E} \quad (\text{A.15})$$

und für die mechanische Leistung

$$P_{me} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}_m(t)} \mathbf{v}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \, d\mathcal{A}}_{P_t} - \int_{\partial \mathcal{V}_m(t)} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} . \quad (\text{A.16})$$

Der Term  $-\int_{\partial \mathcal{V}_m(t)} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A}$  wird gelegentlich als (Leistung der) *Volumenänderungsarbeit* bezeichnet. Die übrigen Terme werden mit  $P_t$  abgekürzt und gelegentlich als technische Arbeit (Leistung) bezeichnet. Bei Fluiden mit sehr geringer Viskosität kann der Leistungsbeitrag von  $\boldsymbol{\tau}$  häufig näherungsweise vernachlässigt werden.

Einsetzen von (A.16) in (A.10) liefert

$$\int_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) \, d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}_m(t)} \rho \left( \underbrace{u + \frac{p}{\rho}}_{=h} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + gz \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \dot{Q} + P_t + P_{el} . \quad (\text{A.17})$$

Hierbei ist

$$h(t, \mathbf{x}) = u + \frac{p}{\rho} \quad (\text{A.18})$$

die *spezifische Enthalpie* (siehe auch Abschnitt A.4).

### A.3.2 Energieerhaltung in offenen Systemen

In einem *offenen* System wird Materiefluss über die Berandung  $\partial \mathcal{V}(t)$  des betrachteten Kontrollvolumens  $\mathcal{V}(t)$  zugelassen. Mit dem Reynoldsschen Transporttheorem (A.8) folgt dann für die Änderungsrate der Gesamtenergie

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho e \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) \, d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}(t)} \rho e \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} , \quad (\text{A.19})$$

wobei  $\mathbf{u}$  wieder die lokale Momentangeschwindigkeit der Berandung ist und im Allgemeinen  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$  gilt. Die Differenz von (A.19) und (A.10) lautet

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho e \, d\mathcal{V} - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho e \, d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) \, d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \rho e \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) \, d\mathcal{V} - \int_{\partial\mathcal{V}_m(t)} \rho e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} . \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Denkt man sich nun ein materiefestes Kontrollvolumen  $\mathcal{V}_m(t)$  das zum aktuellen Zeitpunkt  $t$  exakt mit  $\mathcal{V}(t)$  übereinstimmt, so sind die Integrationsgebiete in den Integralen auf der rechten Seite von (A.20) identisch. D.h. augenblicklich gilt  $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_m(t)$  sowie  $\partial\mathcal{V}(t) = \partial\mathcal{V}_m(t)$  und (A.20) vereinfacht sich zu

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho e \, d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho e \, d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \rho e (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} . \quad (\text{A.21})$$

Einsetzen von (A.10) liefert die Leistungsbilanz

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho e \, d\mathcal{V} = \dot{Q} + P_{me} + P_{el} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \rho e (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} . \quad (\text{A.22})$$

für offene Systeme. Das letzte Integral in (A.22) bildet den Zufluss an totaler Energie zufolge jenem Massenstrom der die Berandung  $\partial\mathcal{V}(t)$  überquert ab. Dabei ist  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  die Relativgeschwindigkeit zwischen Berandung und Materie. Einsetzen von (A.16) und (A.19) in (A.22) liefert schließlich unter Verwendung von (A.18)

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) \, d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \rho \left( h + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + gz \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \dot{Q} + P_t + P_{el} . \quad (\text{A.23})$$

Natürlich ist dieses Ergebnis identisch mit (A.17), wenn augenblicklich die Identitäten  $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_m(t)$  und  $\partial\mathcal{V}(t) = \partial\mathcal{V}_m(t)$  gelten.

## A.4 Thermodynamische Zustandsgrößen reiner Stoffe

Bei reinen Stoffen, die in einer Phase (fest, flüssig oder gasförmig) vorliegen und sich im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht befinden, genügen zwei unabhängige Zustandsgrößen, um den inneren Zustand der Stoffe eindeutig zu beschreiben. Liegt der Stoff in zwei Phasen vor, genügt eine Zustandsgröße. Häufig werden für diese Beschreibung die *thermischen* Zustandsgrößen

- Druck  $p$ ,
- spezifisches Volumen  $v = \frac{1}{\rho}$  und
- Temperatur  $T$ ,

sowie die *kalorischen* Zustandsgrößen

- spezifische innere Energie  $u$  und

- spezifische Enthalpie  $h = u + pv$

verwendet. Sie alle sind *intensive* Zustandsgrößen. Die thermischen Zustandsgrößen sind durch eine *thermische* Zustandsgleichung

$$0 = G_1(p, v, T), \quad (\text{A.24a})$$

gekoppelt. Als *kalorische* Zustandsgleichungen bezeichnet man solche in denen eine kalorische Zustandsgröße auftritt, z. B.

$$0 = G_2(u, v, T), \quad 0 = G_3(h, p, T). \quad (\text{A.24b})$$

Zustandsgleichungen können also als Fläche im 3-dimensionalen Raum interpretiert werden. Für Stoffe bei denen die Zustandsgleichungen nicht in geschlossener algebraischer Form formuliert werden können finden sich in der Fachliteratur tabellierte Wertekombinationen von Zustandsgrößen, siehe z. B. [A.1–A.5]. Weitere Zustandsgleichungen mit je drei Zustandsgrößen lassen sich durch Umformung obiger Ausdrücke finden.

Aus  $G_2$  und  $G_3$  erhält man

$$u = u(v, T), \quad h = h(p, T) \quad (\text{A.25})$$

und schließlich die totalen Differentiale

$$du = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial T}}_{c_v} \Big|_v dT + \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_T dv \quad (\text{A.26a})$$

$$dh = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial T}}_{c_p} \Big|_p dT + \frac{\partial h}{\partial p} \Big|_T dp. \quad (\text{A.26b})$$

Die tiefgestellten Symbole  $v$ ,  $T$ ,  $p$  geben an, welche unabhängige Zustandsgröße in der jeweiligen partiellen Ableitung konstant zu halten ist. Die partiellen Ableitungen nach  $T$  werden *spezifische Wärmekapazitäten* genannt. Im Speziellen bezeichnet man  $c_v(v, T)$  als *spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen* (d. h. bei einer isochoren Zustandsänderung) und  $c_p(p, T)$  als *spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck* (d. h. bei einer isobaren Zustandsänderung). Die spezifische Wärmekapazität wird meist in J/(kg K) angegeben und beschreibt die Wärmemenge in J, die notwendig ist, um 1 kg einer Substanz um 1 K zu erwärmen, wenn dabei  $v$  bzw.  $p$  konstant gehalten wird.

## Ideale Gase

Das Verhalten idealer Gase lässt sich durch die thermische Zustandsgleichung

$$pv = RT \quad (\text{A.27})$$

mit der stoffabhängigen spezifischen Gaskonstanten  $R$  in J/(kg K) beschreiben. Es lässt sich mathematisch und experimentell zeigen, dass für ideale Gase

$$\frac{\partial u}{\partial v} \Big|_T = 0 \quad (\text{A.28})$$

gilt [A.2, A.4, A.5]. Dies impliziert  $u = u(T)$ ,

$$h = u(T) + pv = u(T) + RT , \quad (\text{A.29})$$

und folglich  $h = h(T)$  sowie  $c_v = c_v(T)$  und  $c_p = c_p(T)$ . Aus (A.29) erhält man durch Differentiation

$$c_p(T) = c_v(T) + R . \quad (\text{A.30})$$

Bei idealen Gasen sind also  $u$ ,  $h$ ,  $c_v$  und  $c_p$  reine Temperaturfunktionen. Integration von (A.26) liefert damit

$$u(T) = u(T_0) + \int_{T_0}^T c_v(\tilde{T}) d\tilde{T} , \quad h(T) = h(T_0) + \int_{T_0}^T c_p(\tilde{T}) d\tilde{T} , \quad (\text{A.31})$$

wobei  $T_0$  eine beliebig wählbare Referenztemperatur ist.

### Inkompressible Stoffe

Für inkompressible Stoffe gilt  $dv = 0$ , d. h.  $v = \text{konst.}$ , was als thermische Zustandsgleichung interpretiert werden kann. Damit vereinfacht sich (A.26a) zu

$$du = c_v dT \quad (\text{A.32})$$

und es gilt  $u = u(T)$  und  $c_v = c_v(T)$ . Das totale Differential von  $h = u + pv$  lautet dann

$$dh = du + v dp = c_v(T) dT + v dp . \quad (\text{A.33})$$

Gleichsetzen mit (A.26b) liefert

$$dh = c_v(T) dT + v dp = c_p dT + \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T dp . \quad (\text{A.34})$$

Diese Beziehung muss für beliebige Zustandsänderungen gelten, also auch für solche bei denen der Druck konstant bleibt ( $dp = 0$ ). Daraus folgen die Identitäten

$$c_v(T) = c_p = c_p(T) \quad (\text{A.35a})$$

$$dh = c_p(T) dT + v dp . \quad (\text{A.35b})$$

Bei inkompressiblen Stoffen sind also  $c_v$  und  $c_p$  identisch und reine Temperaturfunktionen.

## A.5 Literatur

- [A.1] Y. Çengel, J. Cimbala und R. Turner, *Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences*, 4. Aufl. New York: McGraw-Hill, 2012.
- [A.2] M. Moran und H. Shapiro, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, 6. Aufl. New York: John Wiley & Sons, 2009.
- [A.3] F.P. Incropera, D.P. DeWitt, T.L. Bergman und A.S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 6. Aufl. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007.
- [A.4] P. Stephan, K. Schaber, K. Stephan und F. Mayinger, *Thermodynamik, Band 1: Einstoffsysteme*, 18. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2009.
- [A.5] Kluge und Neugebauer, *Grundlagen der Thermodynamik*: Spektrum, 1994.

## B Aufgaben zum Selbststudium

Dieser Anhang enthält zur Unterstützung des Selbststudiums einige Aufgaben samt Lösungen.

**Aufgabe B.1 (Klappbrücke).** Um das Überqueren eines Kanals sowie das Passieren von Schiffen im Kanal zu ermöglichen, kann die Brücke aus Abbildung B.1 durch Ziehen an Seil 2 hochgeklappt werden. Die Brücke mit Masse  $m_B$  und Schwerpunkt  $S_B$  ist im Punkt B drehbar gelagert. Der Träger mit Masse  $m_T$  ist außerhalb seines Schwerpunkts  $S_T$  im Punkt A drehbar gelagert. Die Länge von Seil 1 ist so gewählt, dass Träger und Brücke stets parallel orientiert sind. Zur Reduktion der Zugkraft in Seil 2 ist am linken Ende des Trägers eine Ausgleichsmasse  $m$  montiert. Seil 2 umschlingt den zylindrischen Teil des Trägers mit Radius  $R$  und ist in Punkt C fixiert. Für die nachfolgenden Betrachtungen werden beide Seile als masselos und alle Lager als ideal reibungsfrei angenommen. Die Erdbeschleunigung  $g$  wirkt wie in Abbildung B.1 dargestellt.

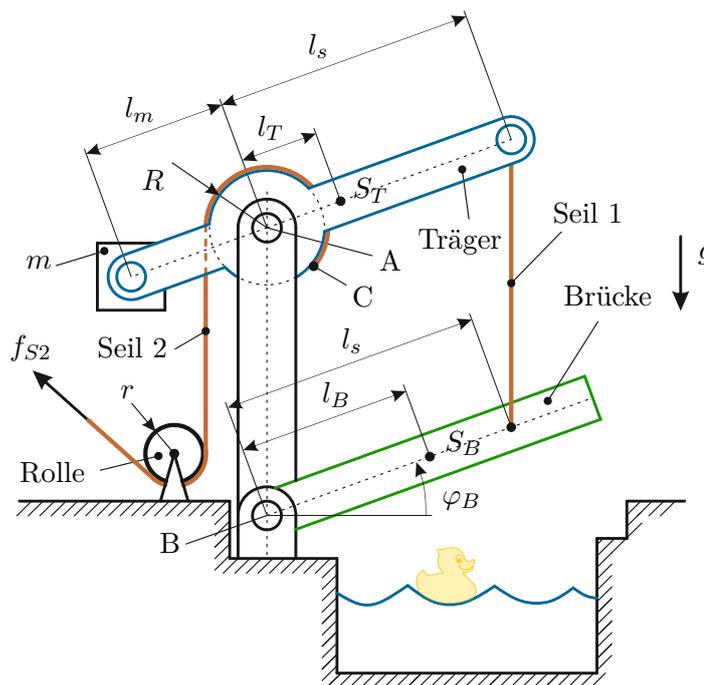


Abbildung B.1: Klappbrücke.

Es sollen die Lagerkräfte in A und B sowie die Zugkräfte in den Seilen 1 und 2 so bestimmt werden, dass sich das System in Ruhe befindet. Basierend auf diesen

Ergebnissen soll die Masse  $m$  so bestimmt werden, dass sich das System für  $f_{S2} = 0$  in Ruhe befindet.

*Lösung von Aufgabe B.1.* Aus Abbildung B.1 erkennt man, dass sich Brücke und Träger lediglich über Seil 1 gegenseitig beeinflussen. Schneidet man daher die Brücke wie in Abbildung B.2 dargestellt frei, wirkt auf diese, neben den Auflagerkräften in B, nur eine weitere Kraft in Form der Seilkraft  $f_{S1}$ .

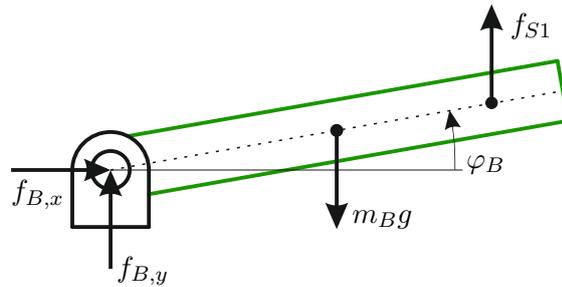


Abbildung B.2: Freigeschnittene Brücke.

Mit Abbildung B.2 erhält man die Kräftegleichgewichte in  $x$ - und  $y$ -Richtung als

$$\mathbf{e}_x : 0 = f_{B,x} \quad (\text{B.1a})$$

$$\mathbf{e}_y : 0 = f_{B,y} - m_{BG} + f_{S1}. \quad (\text{B.1b})$$

Aus dem Kräftegleichgewicht erhält man zwei Gleichungen für die drei Unbekannten  $f_{B,x}$ ,  $f_{B,y}$  und  $f_{S1}$ . Zur eindeutigen Bestimmung dieser drei Größen ist daher noch eine dritte Gleichung in Form des Momentengleichgewichts notwendig. Für die Formulierung des Momentengleichgewichts muss ein Bezugspunkt gewählt werden. Um in der resultierenden Gleichung die Anzahl der Unbekannten und damit den Aufwand für die Lösung des entstehenden Gleichungssystems möglichst gering zu halten empfiehlt es sich das Auflager B als Bezugspunkt zu wählen (analog hätte man den Angriffspunkt der Seilkraft  $f_{S1}$  wählen können). Man erhält die Momentenbilanz um die  $z$ -Achse als

$$\mathbf{e}_z : 0 = -m_{BG}l_B \cos(\varphi_B) + f_{S1}l_s \cos(\varphi_B). \quad (\text{B.2})$$

Einfaches Umformen des Kräfte- und Momentengleichgewichts führt auf

$$f_{S1} = m_{BG} \frac{l_B}{l_s} \quad (\text{B.3})$$

für die Zugkraft im Seil und

$$\mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} f_{B,x} \\ f_{B,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_{BG} \left(1 - \frac{l_B}{l_s}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

für die Lagerkraft im Punkt B.

Für die Berechnung der Lagerkraft  $\mathbf{f}_A$  im Punkt A und der Zugkraft  $f_{S2}$  im Seil 2 wird nun der Träger entsprechend Abbildung B.3 freigeschnitten.

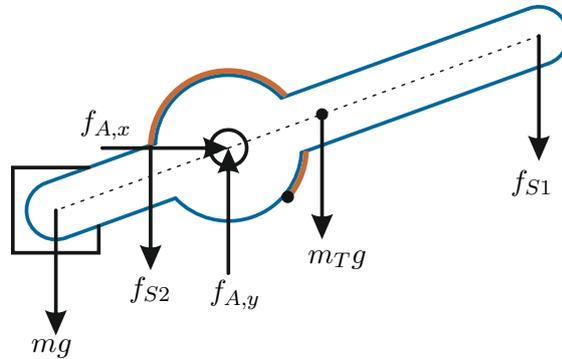


Abbildung B.3: Freigeschnittener Träger.

Aus der Skizze lassen sich sofort die Kräftegleichgewichte als

$$\mathbf{e}_x : 0 = f_{A,x} \quad (\text{B.5a})$$

$$\mathbf{e}_y : 0 = -m g - f_{S2} + f_{A,y} - m_T g - f_{S1} \quad (\text{B.5b})$$

ablesen. Da  $f_{S1}$  bereits aus den vorhergehenden Berechnungen bekannt ist, erhält man, wie bereits bei der Brücke, zwei Gleichungen für drei Unbekannte. Für die Berechnung von  $f_{A,x}$ ,  $f_{A,y}$  und  $f_{S2}$  ist daher wiederum die Formulierung der Momentenbilanz notwendig. Erneut ist es von Vorteil den Bezugspunkt für das Momentengleichgewicht im Lager zu wählen. Man erhält für die Momentenbilanz um den Punkt A in z-Richtung

$$\mathbf{e}_z : 0 = m g l_m \cos(\varphi_B) + f_{S2} R - m_T g l_T \cos(\varphi_B) - f_{S1} l_s \cos(\varphi_B). \quad (\text{B.6})$$

Durch Umformen des Kräfte- und der Momentengleichgewichts folgt

$$f_{S2} = \frac{m_B g l_B + m_T g l_T - m g l_m \cos(\varphi_B)}{R} \cos(\varphi_B) \quad (\text{B.7})$$

und

$$\mathbf{f}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ m_B g \left( \frac{l_B}{l_s} + \frac{l_B}{R} \cos(\varphi_B) \right) + m_T g \left( 1 + \frac{l_T}{R} \cos(\varphi_B) \right) - m g \left( 1 + \frac{l_m}{R} \cos(\varphi_B) \right) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Soll nun der Träger für  $f_{S2} = 0$  im Gleichgewicht sein folgt aus dem Momentengleichgewicht

$$m = \frac{m_B l_B + m_T l_T}{l_m}.$$

**Aufgabe B.2 (Mechanisches Starrkörpersystem).** In Abb. B.4 ist ein Starrkörpersystem, bestehend aus einem im Punkt  $A$  drehbar gelagerten Rahmen (homogene Massendichte  $\rho$ , Dicke  $d$ , Breite  $b$ ) sowie einer Masse  $m_m$  (Punktmasse), dargestellt. Der Rahmen ist am linken Ende durch eine lineare Feder der Steifigkeit  $c$  mit dem Boden verbunden. Auf das System wirkt die Erdbeschleunigung  $g$  in negative  $e_y$ -Richtung.

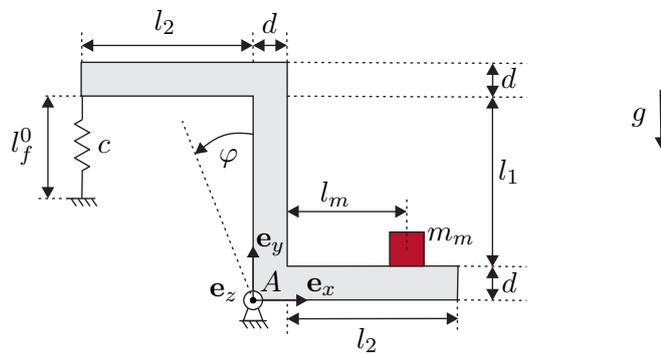


Abbildung B.4: Skizze eines drehbar gelagerten Starrkörpersystems.

Für dieses System sollen für den Fall  $\varphi = 0$  die Lagerkräfte sowie die Vorspannung der Feder so bestimmt werden, dass sich das System in Ruhe befindet. Weiterhin sollen die Bewegungsgleichungen der Drehbewegung des Starrkörpersystems mit Hilfe der Drehimpulserhaltung ermittelt werden.

**Lösung von Aufgabe B.2.** Im ersten Schritt werden die Lagerkräfte und die notwendige Federvorspannung für  $\varphi = 0$  bestimmt. Dazu muss das Lager (im Punkt  $A$ ) entfernt werden und gedanklich durch die im Lager auftretenden Kräfte und Momente ersetzt werden. Das in Abb. B.4 dargestellte Lager erlaubt keine Bewegung in  $x$ - und  $y$ -Richtung, jedoch ein Drehung um die  $z$ -Achse. Daher kann dieses Lager äquivalent durch die Kräfte  $f_x$  und  $f_y$  ersetzt werden, siehe Abb. B.5. Die Wirkung der Feder wird durch die Federkraft  $f_c$  ersetzt.

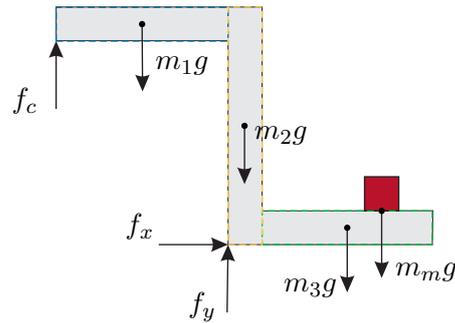


Abbildung B.5: Skizze eines drehbar gelagerten Starrkörpersystems.

Um die Wirkung der Gravitation zu berücksichtigen muss die Gravitationskraft  $m_g g$ , mit der Gesamtmasse  $m_g$ , im Schwerpunkt des Starrkörpersystems angesetzt werden. Für eine effiziente Berechnung erweist es sich als sinnvoll, das gesamte Starrkörpersystem in vier Teilkörper zu unterteilen, siehe Abb. B.5. Für jeden dieser Teilkörper kann damit die Lage des Schwerpunkts, die Masse sowie die Gravitationskraft einfach ermittelt werden.

Betrachtet man im ersten Schritt den blau umrahmten Teilkörper, so errechnet sich dessen Masse aus (2.51) zu

$$m_1 = \int_V \rho \, dV = l_2 db \rho. \tag{B.9}$$

Der Schwerpunkt des blau umrahmten Körpers errechnet sich nach (2.55). Für die Lage des Schwerpunktes in  $x$ -Richtung erhält man nach (2.56) unter der vorerst getroffenen Annahme  $\varphi = 0$

$$r_{Sm1,x} = \frac{1}{m_1} \int_{z=-b/2}^{b/2} \int_{y=l_1+d}^{l_1+2d} \int_{x=-l_2}^0 x \rho \, dx \, dy \, dz = -\frac{l_2}{2}. \tag{B.10}$$

**Hinweis:** Natürlich kann man die Lage des Schwerpunktes des homogenen Quaders der Masse  $m_1$  direkt aus der Skizze ablesen, ohne diese Integrale auszuwerten!

Auf analoge Art und Weise erhält man damit die Lage des Schwerpunkts in  $y$ - und  $z$ -Richtung. Damit gilt

$$\mathbf{r}_{Sm1}^0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_2 \\ l_1 + \frac{3}{2}d \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{B.11}$$

wobei der Index 0 verwendet wurde, um den Fall  $\varphi = 0$  zu kennzeichnen.

Die Massen der Teilkörper 2 und 3 ergeben sich zu  $m_2 = d(l_1 + 2d)b\rho$  und  $m_3 = l_2db\rho$  und die Lage der Schwerpunkte kann zu

$$\mathbf{r}_{Sm2}^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}d \\ d + \frac{1}{2}l_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{Sm3}^0 = \begin{bmatrix} d + \frac{1}{2}l_2 \\ \frac{1}{2}d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{Smm}^0 = \begin{bmatrix} d + l_m \\ \frac{1}{2}d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

ermittelt werden. Man beachte dabei, dass die Masse  $m_m$  wie in der Angabe beschrieben als Punktmasse modelliert wurde.

Für die weiteren Berechnungen benötigt man noch den Angriffspunkt  $\mathbf{r}_{fc}^0$  der Federkraft  $f_c$ . Dieser ergibt sich zu

$$\mathbf{r}_{fc}^0 = \begin{bmatrix} -l_2 \\ d + l_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

Damit sich das System nach Abb. B.5 in Ruhe befindet, muss das Kräftegleichgewicht und das Momentengleichgewicht nach (2.39) erfüllt sein. Das Kräftegleichgewicht in  $x$ -Richtung ergibt

$$f_x = 0, \quad (\text{B.14})$$

d.h. die Lagerkraft in  $x$ -Richtung muss verschwinden. Für die  $y$ -Richtung erhält man

$$f_c + f_y - m_1g - m_2g - m_3g = 0. \quad (\text{B.15})$$

Zum Aufstellen des Momentengleichgewichts für eine Drehung um die  $z$ -Achse muss ein möglicher Drehpunkt gewählt werden. Im betrachteten System liegt es natürlich nahe, den Punkt  $A$ , d.h. den realen Drehpunkt des Systems, zu wählen. Man beachte, dass aber das Momentengleichgewicht für jeden frei wählbaren Drehpunkt des freigeschnittenen Systems nach Abb. B.5 gelten muss. Durch eine geschickte Wahl des Drehpunktes kann damit erreicht werden, dass gewisse unbekannte Kräfte im Momentengleichgewicht nicht vorkommen, was eine Berechnung wesentlich vereinfachen kann.

Wählt man im betrachteten System den Punkt  $A$  als Drehpunkt, so erkennt man, dass die Kräfte  $f_x$  und  $f_y$  keinen Beitrag zum Drehmoment um diesen Punkt liefern. Würde man hingegen der Angriffspunkt der Federkraft als Drehpunkt wählen, dann würde  $f_c$  nicht im Momentengleichgewicht vorkommen.

Für den gewählten Drehpunkt  $A$  erhält man das Drehmoment  $\tau_{m1}^{(A)}$  durch Anwenden von (2.37) zu

$$\tau_{m1}^{(A),0} = \mathbf{r}_{Sm1}^0 \times \mathbf{f}_{Sm1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_2 \\ l_1 + \frac{3}{2}d \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1g\frac{1}{2}l_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

und damit  $\tau_{m1,z}^{(A),0} = m_1 g \frac{1}{2} l_2$ . Wiederum wird mit dem Index 0 der Fall  $\varphi = 0$  gekennzeichnet. Die entsprechenden Momente der anderen Teilmassen bzw. der Federkraft ergeben sich zu  $\tau_{m2,z}^{(A),0} = -m_2 g d/2$ ,  $\tau_{m3,z}^{(A),0} = -m_3 g (d + l_2/2)$ ,  $\tau_{mm,z}^{(A),0} = -m_m g (d + l_m)$  und  $\tau_{fc,z}^{(A),0} = -f_c l_2$ .

**Hinweis:** Natürlich ist für den betrachteten Fall, bei dem alle Kräfte entweder in  $x$ - oder  $y$ -Richtung gerichtet sind, eine Auswertung des Kreuzproduktes nicht unbedingt notwendig. Es kann hingegen einfach die Regel Kraft mal Kraftarm verwendet werden, um das resultierende Moment zu bestimmen. Man muss jedoch bei dieser Vorgehensweise auf das korrekte Vorzeichen des Moments achten.

Setzt man nun das Momentengleichgewicht an, so erhält man unmittelbar

$$f_c = \frac{1}{l_2} \left( m_1 g \frac{l_2}{2} - m_2 g \frac{d}{2} - m_3 g \left( d + \frac{l_2}{2} \right) - m_m g (d + l_m) \right). \quad (\text{B.17})$$

Die notwendige Federvorspannung  $l_{f0}$  kann mit der Länge  $l_f^0$  der Feder für den Fall  $\varphi = 0$  einfach aus der Gleichung

$$f_c = c (l_f^0 - l_{f0}), \quad (\text{B.18})$$

mit  $f_c$  aus (B.17) errechnet werden. Setzt man die Lösung für  $f_c$  in das Kräftegleichgewicht in  $y$ -Richtung ein, so erhält man die Lagerkraft  $f_y$ .

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen des Systems müssen die Freiheitsgrade des Systems identifiziert werden. Aus Abb. B.4 erkennt man, dass das Lager im Punkt  $A$  nur eine Drehung um die  $z$ -Achse zulässt, womit eine Drehung um den Winkel  $\varphi$  den einzigen Freiheitsgrad des Systems darstellt. Die Bewegung des Systems lässt sich damit direkt in Form der Drehimpulserhaltung nach (2.148) beschreiben. Dazu sind das effektive Trägheitsmoment des Systems um den Drehpunkt  $A$  und die um diesen Punkt wirksamen Momente notwendig.

Um das Trägheitsmoment  $\theta_{zz}^{(A)}$  um den Drehpunkt zu bestimmen, werden vorerst die Trägheitsmomente der Teilkörper nach Abb. B.5 um deren Schwerpunkte bestimmt. Nach (2.151) erhält man für den Teilkörper 1

$$\theta_{zz,m1}^{(S)} = \rho \int_{\tilde{z}=-b/2}^{b/2} \int_{\tilde{y}=-d/2}^{d/2} \int_{\tilde{x}=-l_2/2}^{l_2/2} (\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2) d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} = \frac{m_1}{12} (l_2^2 + d^2), \quad (\text{B.19})$$

wobei mit  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  und  $\tilde{z}$  der Abstand vom Schwerpunkt des Teilkörpers 1 bezeichnet wurde. Mit Hilfe des Satzes von Steiner (2.153) kann das Trägheitsmoment des Teilkörpers 1 um den Drehpunkt  $A$  zu

$$\theta_{zz,m1}^{(A)} = \theta_{zz,m1}^{(S)} + m_1 (r_{Sm1,x}^2 + r_{Sm1,y}^2) \quad (\text{B.20})$$

ermittelt werden. Die Trägheitsmomente der weiteren Teilkörper ergeben sich auf analoge Art und Weise. Da die Masse  $m_m$  als Punktmasse modelliert wurde, gilt

$\theta_{zz,mm}^{(S)} = 0$ . Man beachte aber, dass aufgrund des Satzes von Steiner damit nicht  $\theta_{zz,mm}^{(A)} = 0$  folgt, sondern  $\theta_{zz,mm}^{(A)} = m_m(r_{Smm,x}^2 + r_{Smm,y}^2)$  gilt!

**Hinweis:** Es wäre möglich, direkt das Trägheitsmoment  $\theta_{zz}^{(A)}$  zu bestimmen, indem man anstatt der Abstände  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  und  $\tilde{z}$  direkt die Abstände zum Drehpunkt verwendet. Im Allgemeinen führt diese Vorgehensweise jedoch zu wesentlich komplizierten Ausdrücken der Integrale. Weiterhin sind die Trägheitsmomente um den Schwerpunkt für viele geometrische Körper in Tabellenbüchern zu finden und können direkt übernommen werden.

Als zweiten Teil der Drehimpulsbilanz benötigt man die Summe der Drehmomente. Um diese zu bestimmen, muss die Lage der Schwerpunkte sowie des Angriffspunktes der Federkraft als Funktion des Winkels  $\varphi$  beschrieben werden. Ausgehend von der Lage des Schwerpunktes  $\mathbf{r}_{Sm1}^0$  für  $\varphi = 0$  erhält man aus geometrischen Überlegungen

$$\mathbf{r}_{Sm1}(\varphi) = \begin{bmatrix} r_{Sm1,x}^0 \cos(\varphi) - r_{Sm1,y}^0 \sin(\varphi) \\ r_{Sm1,x}^0 \sin(\varphi) + r_{Sm1,y}^0 \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

**Hinweis:** Die Änderung der Lage eines Punktes in der  $xy$ -Ebene bei einer Drehung um die  $z$ -Achse kann man durch Betrachtung der Vektoren in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung ermitteln. Wird eine Drehung um die positive  $z$ -Achse betrachtet, so ergibt sich

$$\mathbf{r}(\varphi) = \begin{bmatrix} r_x^0 \cos(\varphi) - r_y^0 \sin(\varphi) \\ r_x^0 \sin(\varphi) + r_y^0 \cos(\varphi) \\ r_z^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x^0 \\ r_y^0 \\ r_z^0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\varphi) \mathbf{r}^0. \quad (\text{B.22})$$

Die Matrix  $\mathbf{R}$  wird dabei als Drehmatrix bezeichnet.

Das Drehmoment  $\tau_{m1,z}^{(A)}(\varphi)$  ergibt sich mit diesem Ergebnis aus

$$\boldsymbol{\tau}_{m1}^{(A)}(\varphi) = \mathbf{r}_{Sm1}(\varphi) \times \mathbf{f}_{Sm1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (r_{Sm1,x}^0 \cos(\varphi) - r_{Sm1,y}^0 \sin(\varphi)) m_1 g \end{bmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

Die Drehmomente  $\tau_{m2,z}^{(A)}(\varphi)$ ,  $\tau_{m3,z}^{(A)}(\varphi)$  und  $\tau_{mm,z}^{(A)}(\varphi)$  können auf gleiche Art bestimmt werden.

Etwas schwieriger gestaltet sich die Bestimmung des Drehmoments zufolge der Federkraft  $f_c$ , die sich aufgrund der Längenänderung der Feder als Funktion des Winkels  $\varphi$  ändert. Der Angriffspunkt der Feder ergibt sich aus obigen Überlegungen

zu

$$\mathbf{r}_{fc}(\varphi) = \begin{bmatrix} r_{fc,x}^0 \cos(\varphi) - r_{fc,y}^0 \sin(\varphi) \\ r_{fc,x}^0 \sin(\varphi) + r_{fc,y}^0 \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

Zur Bestimmung der aktuellen Länge der Feder ermittelt man den Fußpunkt  $\mathbf{r}_{fcfp}$  in der Form

$$\mathbf{r}_{fcfp} = \begin{bmatrix} -l_2 \\ d + l_1 - l_f^0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

und die Länge der Feder kann aus

$$l_f(\varphi) = \|\mathbf{r}_{fc}(\varphi) - \mathbf{r}_{fcfp}\|_2 \quad (\text{B.26})$$

ermittelt werden. Die Federkraft ist natürlich in Richtung der Verbindungslinie zwischen Fußpunkt und Angriffspunkt gerichtet, womit man unmittelbar

$$\mathbf{f}_c(\varphi) = c(l_f(\varphi) - l_{f0}) \frac{\mathbf{r}_{fc}(\varphi) - \mathbf{r}_{fcfp}}{l_f(\varphi)} \quad (\text{B.27})$$

folgt. Das zugehörige Moment um den Drehpunkt  $A$  ergibt sich dann zu  $\boldsymbol{\tau}_{fc}^{(A)}(\varphi) = \mathbf{r}_{fc}(\varphi) \times \mathbf{f}_c(\varphi)$ .

Mit diesen Zwischenergebnissen kann nun die Drehimpulsbilanz für die Drehung um den Punkt  $A$  angegeben werden:

$$\theta_{zz}^{(A)} \frac{d^2}{dt^2} \varphi = \tau_z^{(A)}. \quad (\text{B.28})$$

Darin bezeichnet  $\theta_{zz}^{(A)}$  die Summe aller Trägheitsmomente und  $\tau_z^{(A)}$  ist die Summe aller Drehmomente um den Punkt  $A$ , vgl. (2.146).

**Aufgabe B.3 (Haltevorrichtung).** In einer Haltevorrichtung nach Abb. B.6 ist in einem Gehäuse eine Platte mit Hilfe einer kleinen Walze verklemmt. Die Platte hat die Masse  $m$  sowie die Breite  $b$ . Die Walze mit dem Durchmesser  $d$  besitzt eine vernachlässigbare Masse. Am Kontaktpunkt zwischen Walze und Gehäuse  $A$  sowie am Kontaktpunkt zwischen Walze und Platte  $B$  tritt jeweils der Haftreibungskoeffizient  $\mu_H$  auf. Zwischen der Platte und der Gehäusewand herrscht ein ideal glatter Kontakt. Der Winkel  $\alpha$  ist bekannt.

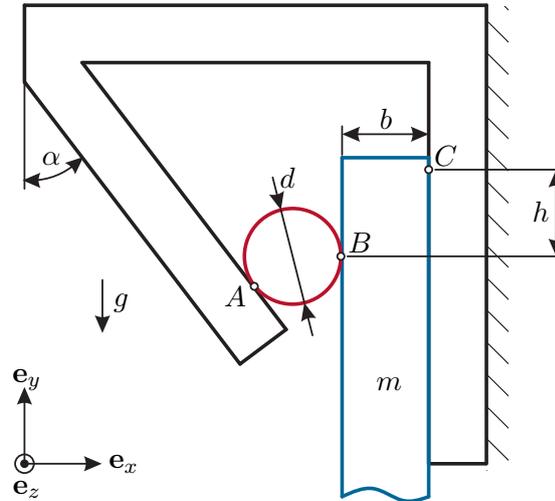


Abbildung B.6: Aufbau einer Haltevorrichtung.

Gesucht ist der mindestens erforderliche Haftreibungskoeffizient  $\mu_H$  sowie die minimale Einspannlänge  $h$  der Platte, sodass diese in der Haltevorrichtung haftet. Zusätzlich ist noch die maximal zulässige Masse der Platte gesucht, welche durch die Reibung in der Vorrichtung fixiert werden kann.

*Lösung von Aufgabe B.3.* Unter der Annahme, dass die Platte in der Vorrichtung fixiert ist, befindet sich das betrachtete System im statischen Gleichgewicht. Anhand der Kräfte- und Momentenbilanzen für die Walze und die Platte können der gesuchte Reibkoeffizient sowie die erforderliche Einspannlänge berechnet werden.

Im ersten Schritt erfolgt ein Freischnitten der Walze, der Platte und des Gehäuses. Abb. B.7 zeigt die freigeschnittenen Körper sowie die darauf wirkenden Kräfte. Die Kraft in den Punkten A und B setzt sich jeweils aus einer Normalkomponente  $F_{A,n}$  und  $F_{B,n}$  sowie einer tangentialen Komponente aufgrund der Haftreibung  $F_{A,r}$  bzw.  $F_{B,r}$  zusammen. Durch den ideal glatten Kontakt der Platte und der Wand tritt zwischen diesen beiden Körper keine Reibung auf. Infolgedessen wirkt im Punkt C nur die Normalkraft  $F_{C,n}$ .

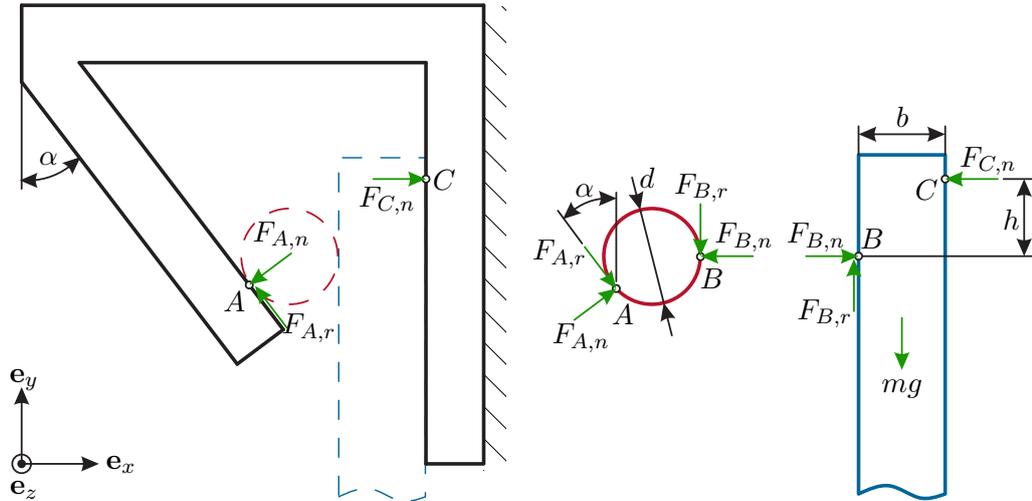


Abbildung B.7: Freigeschnittene Gehäuse, Walze und Platte der Haltevorrichtung und die darauf wirkenden Kräfte.

Das Kräftegleichgewicht an der Walze ergibt sich unter dem Winkel  $\alpha$  zu

$$\mathbf{e}_x : F_{A,n} \cos(\alpha) + F_{A,r} \sin(\alpha) - F_{B,n} = 0 \quad (\text{B.29a})$$

$$\mathbf{e}_y : F_{A,n} \sin(\alpha) - F_{A,r} \cos(\alpha) - F_{B,r} = 0 \quad (\text{B.29b})$$

für die  $x$ -Richtung bzw. für die  $y$ -Richtung. Mit dem Mittelpunkt der Walze als Bezugspunkt folgt aus der Momentenbilanz in  $z$ -Richtung

$$\mathbf{e}_z : F_{A,r} \frac{d}{2} - F_{B,r} \frac{d}{2} = 0 \quad (\text{B.30})$$

direkt  $F_{A,r} = F_{B,r}$ . Einsetzen dieses Zusammenhanges in (B.29b) und anschließendes Umformen ergibt den Zusammenhang zwischen der Normal- und Reibkraft im Punkt A zu

$$F_{A,r} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} F_{A,n}. \quad (\text{B.31})$$

Ein Vergleich mit (2.98) zeigt, dass sich der Bruch in (B.31) als Reibungskoeffizient interpretieren lässt. Damit die Walze und auch die Platte haftet, muss der Haftreibungskoeffizient  $\mu_H$  in den Punkten A und B größer sein als der Reibkoeffizient von (B.31). Daraus folgt die Bedingung

$$\mu_H \geq \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} \quad (\text{B.32})$$

für den Haftreibungskoeffizienten.

Analog zur vorhergehenden Herangehensweise, erfolgt die Ermittlung der minimalen Einspannlänge  $h$  über die Kräfte- und Momentenbilanz der Platte. Die Kräftebilanz in  $x$ -Richtung bzw. in  $y$ -Richtung lautet

$$\mathbf{e}_x : F_{B,n} - F_{C,n} = 0 \quad (\text{B.33a})$$

$$\mathbf{e}_y : F_{B,r} - mg = 0. \quad (\text{B.33b})$$

Die Momentenbilanz in  $z$ -Richtung mit dem Bezugspunkt  $B$  ergibt sich zu

$$\mathbf{e}_z : F_{C,n}h - mg\frac{b}{2} = 0. \quad (\text{B.34})$$

Anhand von Gleichung (B.33b) ist ersichtlich, dass nur die Reibung zwischen Walze und Platte der Gewichtskraft der Platte entgegengerichtet. Weiterhin folgt mit (B.30)

$$F_{B,r} = F_{A,r} = mg. \quad (\text{B.35})$$

Ein analoger Zusammenhang ergibt sich für die Normalkräfte. Einsetzen von Gleichung (B.29a) und (B.31) in (B.33a) liefert

$$F_{C,n} = F_{B,n} = F_{A,n} = \frac{1 + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} mg. \quad (\text{B.36})$$

Durch Einsetzen dieser Normalkraft in die Momentenbilanz (B.34) folgt nach Umformen die minimale Einspannlänge der Platte zu

$$h = \frac{b \sin(\alpha)}{2(1 + \cos(\alpha))}. \quad (\text{B.37})$$

Aus den Gleichungen (B.32) und (B.37) erkennt man, dass weder der Haftreibungskoeffizient noch die Einspannlänge von der Masse der Platte abhängen. Diese Eigenschaft der Haltevorrichtung ist auch unter dem Namen Selbsthemmung bekannt. Theoretisch kann somit die Masse der Platte beliebig groß sein. Diese Betrachtung ist gültig, solange es zu keiner mechanischen Deformation der einzelnen Starrkörper durch die wirkenden Kräfte kommt.

**Aufgabe B.4 (Vertikalmodell eines Viertelfahrzeuges).** Abbildung B.8 zeigt ein Vertikalmodell eines Viertelfahrzeuges. Das Rad wird dabei durch ein Ersatzsystem, bestehend aus Feder (Steifigkeit  $c_R$ ) und Dämpfer (visk. Dämpfung  $d_R$ ) modelliert. Die Radmasse ist durch  $m_R$  gegeben und das Fahrzeug wird in Form einer Ersatzmasse  $m_A$  modelliert. Die Radaufhängung wird durch eine Feder (Steifigkeit  $c_A$ ) und einen Dämpfer (geschwindigkeitsabhängiger Dämpfungskoeffizient  $d_A(v_R - v_A)$ ) beschrieben. Für  $x_A = x_R = x_U = 0$  sind alle Federn entspannt. Zur Beschreibung von Unebenheiten der Fahrbahn wird der Untergrund durch die Auslenkung  $x_U(t)$  parametrisiert. Die vertikalen Koordinaten des Rades und des Aufbaus sind durch  $x_R$  bzw.  $x_A$  definiert. Für die Massen  $m_A$  und  $m_R$  sind die

Bewegungsgleichungen und die statischen Auslenkungen für  $x_U(t) = 0$  zu bestimmen.

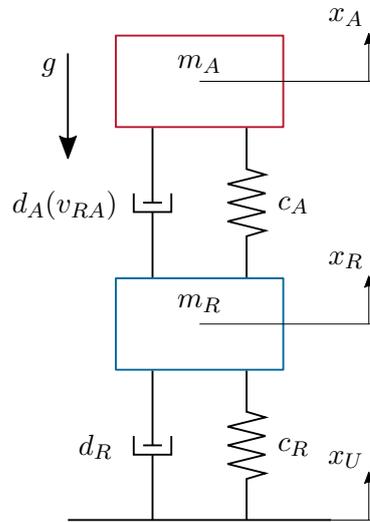


Abbildung B.8: Vertikales Modell einer Radaufhängung.

*Lösung von Aufgabe B.4.* Zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen der Ersatzmassen von Rad und Fahrzeugaufbau wird der Impulssatz verwendet. Dazu werden die Ersatzmassen freigeschnitten und die entsprechenden Feder- und Dämpferkräfte auf die Ersatzmassen aufgebracht. Für die Darstellung gemäß Abb. B.9 wird  $x_U > x_R$  und  $x_R > x_A$  angenommen. Für  $x_U > x_R$  wird die Feder des Rades komprimiert und die Federkraft wirkt der Kompression entgegen. Daher ergibt sich eine nach oben gerichtete Kraft  $F_{CR}$  auf das Rad. Für  $\dot{x}_U > \dot{x}_R$  verschiebt sich der Untergrund schneller aufwärts als die Ersatzmasse des Rades. Die Dämpferkraft  $F_{DR}$  wirkt entgegen der relativen Verschiebung und damit aufwärts auf das Rad. Analog werden die Richtungen der Feder- und Dämpferkraft zwischen Aufbau und Rad bestimmt.

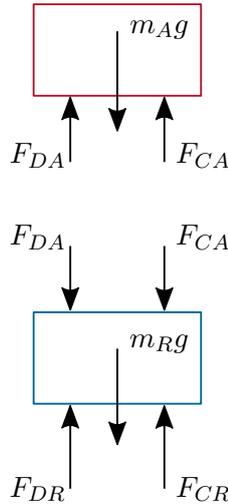


Abbildung B.9: Freigeschnittene Massen der Radaufhängung.

Die Feder- und Dämpferkräfte berechnen sich durch

$$F_{CA} = c_A(x_R - x_A) \quad F_{DA} = d_A(v_{RA})(\dot{x}_R - \dot{x}_A) \quad (\text{B.38a})$$

$$F_{CR} = c_R(x_U - x_R) \quad F_{DR} = d_R(\dot{x}_U - \dot{x}_R). \quad (\text{B.38b})$$

Nach Bestimmung der auf die Ersatzmassen wirkenden Kräfte kann die Impulserhaltung angewendet werden. Es ergeben sich damit die Bewegungsgleichungen der Ersatzmassen gemäß

$$m_A \frac{d}{dt} v_A = F_{CA} + F_{DA} - m_A g \quad (\text{B.39a})$$

$$m_R \frac{d}{dt} v_R = F_{CR} + F_{DR} - F_{CA} - F_{DA} - m_R g, \quad (\text{B.39b})$$

mit den Geschwindigkeiten  $v_A = \dot{x}_A$  und  $v_R = \dot{x}_R$ .

Die stationären Auslenkungen der Massen  $m_A$  und  $m_R$  können für  $x_U = 0$  aus der Impulserhaltung für  $\dot{x}_A = \dot{x}_R = \dot{x}_U = \ddot{x}_A = \ddot{x}_R = 0$  bestimmt werden. Es gilt dann

$$0 = F_{CA} - m_A g \quad (\text{B.40a})$$

$$0 = F_{CR} - F_{CA} - m_R g. \quad (\text{B.40b})$$

Setzt man die Federkräfte ein und löst nach den unbekannt Positionen  $x_R$  und  $x_A$  auf, so erhält man

$$x_R = -\frac{(m_A + m_R)g}{c_R}. \quad (\text{B.41})$$

und

$$x_A = -\frac{(m_A + m_R)g}{c_R} - \frac{m_A g}{c_A}. \quad (\text{B.42})$$

**Aufgabe B.5 (Radaufhängung).** Die Anordnung aus Abb. B.10 entspricht einer Aufhängung, wie sie im Rennsport Verwendung findet. Diese Aufhängung besteht aus den Querlenkern Q1 und Q2 sowie der Druckstange D. Diese sind gelenkig am Fahrzeug befestigt. Auf das Rad wirken die Normalkraft  $F_N$  und die Seitenführungskraft  $F_S$ . Es wird angenommen, dass diese zwei Kräfte, wie in der Abbildung dargestellt, punktuell auf das Rad wirken. Zu bestimmen sind die Kräfte in den Querlenkern Q1 und Q2 sowie in der Druckstange D.

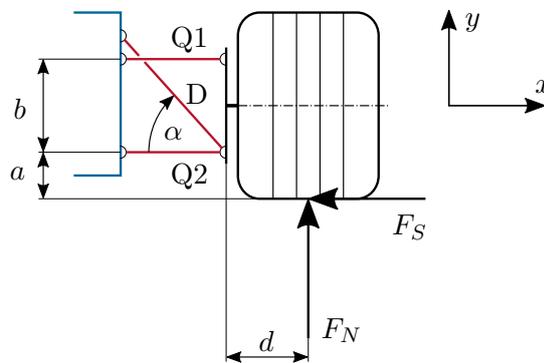


Abbildung B.10: Radaufhängung eines Rennsportwagens.

**Lösung von Aufgabe B.5.** Die Querlenker Q1 und Q2 sowie die Druckstange D werden in dieser Aufgabe als Stäbe betrachtet. Um die Kräfte in den Stäben Q1, Q2 und D berechnen zu können, muss die Radaufhängung vom Fahrzeug freigeschnitten werden. Dazu empfiehlt es sich, den Schnitt direkt durch die Stäbe zu führen, wie in Abb. B.11 gezeigt.

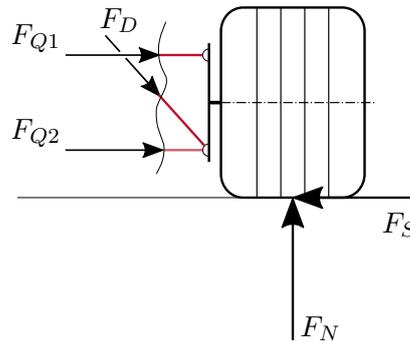


Abbildung B.11: Freigeschnittene Radaufhängung.

Nach dem Freischneiden der Radaufhängung können die Gleichgewichtsbedingungen formuliert werden. Die Kräftegleichgewichte in  $x$ - und  $y$ -Richtung lauten

$$\mathbf{e}_x : \quad 0 = F_{Q1} + F_{Q2} - F_S + F_D \cos(\alpha) \quad (\text{B.43a})$$

$$\mathbf{e}_y : \quad 0 = -F_D \sin(\alpha) + F_N. \quad (\text{B.43b})$$

Das Momentengleichgewicht kann um jeden beliebigen Punkt angeschrieben werden. Zur Vereinfachung der weiteren Rechenschritte ist es von Vorteil, das Momentengleichgewicht um einen Punkt anzuschreiben, durch den die größte Anzahl an unbekanntem Kräften verläuft. In diesem Beispiel ist es der Schnittpunkt von  $F_{Q2}$  und  $F_D$ , wodurch das Momentengleichgewicht nur mehr  $F_{Q1}$  als Unbekannte enthält. Das entsprechende Momentengleichgewicht lautet

$$\mathbf{e}_z : \quad 0 = -F_{Q1}b - F_Sa + F_Nd. \quad (\text{B.44})$$

Die Kräfte in den Stäben ergeben sich durch Lösen der drei Gleichgewichtsbedingungen zu

$$F_D = \frac{F_N}{\sin(\alpha)} \quad (\text{B.45a})$$

$$F_{Q1} = \frac{F_Nd - F_Sa}{b} \quad (\text{B.45b})$$

$$F_{Q2} = F_S \left(1 + \frac{a}{b}\right) - F_N \left(\cot(\alpha) + \frac{d}{b}\right). \quad (\text{B.45c})$$

**Aufgabe B.6 (Fliehkraftregler).** Diese Aufgabe behandelt einen sogenannten Fliehkraftregler, welcher erstmals 1788 von James Watt zur Regelung einer Dampfmaschine eingesetzt wurde. Die schematische Darstellung in Abb. B.12 zeigt ein masseloses Gestänge, welches sich um die  $\mathbf{e}_z$ -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi} = \omega$  dreht und mit dem externen Drehmoment  $\tau$  angetrieben wird. An den Enden der Stangen mit der Länge  $l$  sind zwei Punktmassen  $m$  fixiert, die aufgrund der Fliehkraft den

Winkel  $\alpha$  beeinflussen. Durch den Mechanismus gleitet der Punkt  $A$  entlang der  $\mathbf{e}_z$ -Achse nach oben und unten. Die Höhe des Punktes  $A$  stellt den Ausgang des Reglers dar.

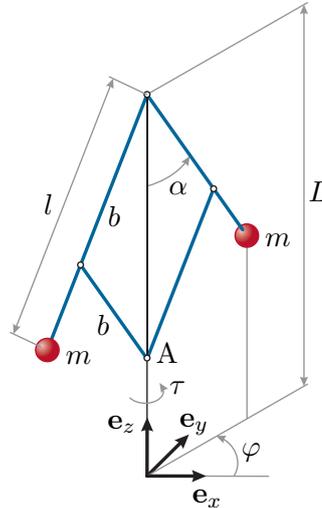


Abbildung B.12: Aufbau des Fliehkraftreglers.

Gesucht sind die Bewegungsgleichungen des Fliehkraftreglers sowie der stationäre Winkel  $\alpha_s$ , welcher sich für eine konstante Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_s = \omega_s$  einstellt.

**Lösung von Aufgabe B.6.** Eine systematische Herleitung der Bewegungsgleichung ist über energiebasierte Methoden möglich. Dazu wird im ersten Schritt die gesamte kinetische und potentielle Energie des Systems in Abhängigkeit von generalisierten Koordinaten berechnet. Für den dargestellten Fliehkraftregler entsprechen die generalisierten Koordinaten den beiden Freiheitsgraden  $\varphi$  und  $\alpha$ , welche im Vektor  $\mathbf{q}(t) = [\varphi(t) \quad \alpha(t)]^T$  zusammengefasst werden. Daraus leitet sich der Vektor der generalisierten Geschwindigkeiten zu  $\dot{\mathbf{q}}(t) = [\dot{\varphi}(t) \quad \dot{\alpha}(t)]^T$  ab.

Aufgrund des als masselos angenommene Gestänges ergibt sich die kinetische und die potentielle Energie nur durch die Energien der Punktmassen. Wegen des symmetrischen Aufbaus bezüglich der  $z$ -Achse, besitzen die beiden Punktmassen jeweils dieselbe kinetische und potentielle Energie. Somit ist es ausreichend, wenn nur eine einzelne Masse für die Berechnung der Energien herangezogen wird. Für die Punktmasse, welche um den Winkel  $\varphi$  gegenüber der  $x$ -Achse verdreht ist, lautet der Ortsvektor vom Ursprung des Koordinatensystems

$$\mathbf{r}_m = \begin{bmatrix} l \sin(\alpha) \cos(\varphi) \\ l \sin(\alpha) \sin(\varphi) \\ L - l \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{B.46})$$

und der daraus abgeleitete Geschwindigkeitsvektor folgt zu

$$\dot{\mathbf{r}}_m = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_m = l \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos(\alpha) \cos(\varphi) - \dot{\varphi} \sin(\alpha) \sin(\varphi) \\ \dot{\alpha} \cos(\alpha) \sin(\varphi) + \dot{\varphi} \sin(\alpha) \cos(\varphi) \\ \dot{\alpha} \sin(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.47})$$

Die gesamte kinetische Energie beider Punktmassen errechnet sich anhand von

$$T = m \dot{\mathbf{r}}_m^T \dot{\mathbf{r}}_m \quad (\text{B.48})$$

mit der Geschwindigkeit (B.47) zu

$$\begin{aligned} T &= ml^2 \left[ \dot{\varphi}^2 (\sin^2(\alpha) \sin^2(\varphi) + \sin^2(\alpha) \cos^2(\varphi)) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\alpha}^2 (\cos^2(\alpha) \cos^2(\varphi) + \cos^2(\alpha) \sin^2(\varphi) + \sin^2(\alpha)) \right] \\ &= ml^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\alpha)). \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Nimmt man an, dass für  $r_{m,z} = 0$  (Auslenkung der Punktmassen in  $z$ -Richtung) die potentielle Energie gleich Null ist, dann folgt mit der Erdbeschleunigung  $g$  die gesamte potentielle Energie zu

$$V = 2mg(L - l \cos(\alpha)). \quad (\text{B.50})$$

Aus der Differenz der kinetischen Energie (B.49) und der potentiellen Energie (B.50) ergibt sich die Lagrange-Funktion zu

$$L = ml^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\alpha)) - 2mg(L - l \cos(\alpha)). \quad (\text{B.51})$$

Das äußere Moment lautet  $\boldsymbol{\tau}_e = [0 \quad 0 \quad \tau]^T$  und demnach folgt für die generalisierten Kräfte

$$\begin{aligned} f_\varphi &= \tau \\ f_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Einsetzen von (B.51) und (B.52) in die Euler-Lagrange Gleichung (2.196) ergibt

$$\begin{aligned} \underbrace{2ml^2 (\ddot{\varphi} \sin^2(\alpha) + 2\dot{\varphi} \dot{\alpha} \sin(\alpha) \cos(\alpha))}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L} &- \underbrace{0}_{\frac{\partial}{\partial \varphi} L} = \tau \\ \underbrace{2ml^2 \ddot{\alpha}}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} L} &- \underbrace{2ml \sin(\alpha) (l\dot{\varphi}^2 \cos(\alpha) - g)}_{\frac{\partial}{\partial \alpha} L} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

woraus sich direkt die Bewegungsgleichungen des Fliehkraftreglers zu

$$\ddot{\varphi} = \frac{\tau - 4ml^2\dot{\varphi}\dot{\alpha} \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{2ml^2 \sin^2(\alpha)} \quad (\text{B.54a})$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{\sin(\alpha)(l\dot{\varphi}^2 \cos(\alpha) - g)}{l} \quad (\text{B.54b})$$

ableiten.

Die stationäre Auslenkung für eine konstante Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_s$  folgt durch Einsetzen von  $\dot{\alpha}_s = 0 \text{ rad/s}$  und  $\ddot{\alpha}_s = \ddot{\varphi}_s = 0 \text{ rad/s}^2$  in (B.54). Aus der ersten Gleichung (B.54a) folgt durch Null setzen der Zeitableitungen direkt das externe Moment zu  $\tau_s = 0 \text{ N m}$ . Dieses Ergebnis folgt aus der Annahme, dass im System keine Reibung auftritt, welche im stationären Punkt über das externe Moment kompensiert werden müssten. Im stationären Fall folgt aus Gleichung (B.54b) die Bedingung

$$\sin(\alpha_s)(l\dot{\varphi}_s^2 \cos(\alpha_s) - g) = 0 \quad (\text{B.55})$$

für den stationären Winkel  $\alpha_s$ . Neben der trivialen Lösung  $\alpha_s = 0 \text{ rad}$  ergibt sich als weitere Ruhelage

$$\alpha_s = \arccos\left(\frac{g}{l\dot{\varphi}_s^2}\right) \quad (\text{B.56})$$

unter der Bedingung, dass für die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi} \geq \sqrt{\frac{g}{l}}$  gilt. Ist diese Ungleichung nicht erfüllt, so existiert keine weitere Ruhelage. Der stationäre Winkel (B.56) kann alternativ auch durch Freischneiden der Punktmasse und aufstellen des Kräftegleichgewichtes, mit der Fliehkraft  $F_{zf} = m\dot{\varphi}^2 l \cos(\alpha)$ , ermittelt werden.

**Aufgabe B.7 (Gekoppeltes mechanisches System).** Ein Block mit der Masse  $m_1$  hängt nach Abb. B.13 an einem masselosen Seil. Das Seil wird reibungsfrei über eine masselose Rolle geführt und auf eine Trommel (Masse  $m_2$ , Trägheitsmoment  $\theta_2$ ) aufgewickelt. Die Trommel rollt über die Kontaktfläche ohne dabei zu gleiten. Zudem wirkt eine Feder mit der vorspannten Länge  $x_0$  mit der konstanten Federsteifigkeit  $k$  der Bewegung der Trommel entgegen. Das gesamte System befindet sich im Schwerfeld der Erde.

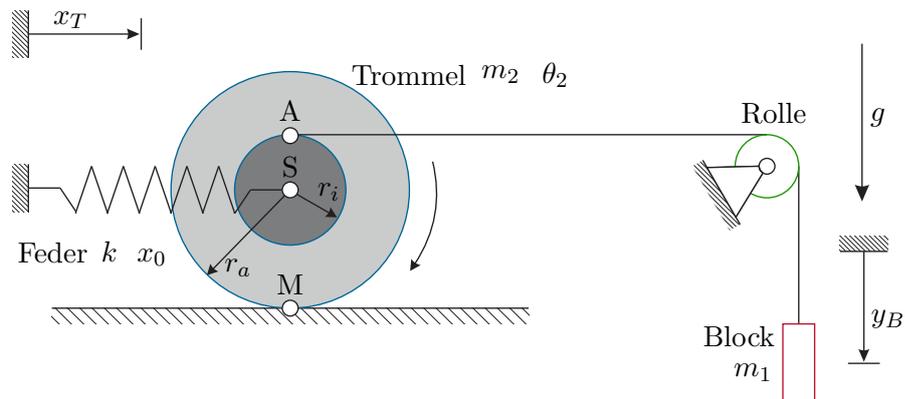


Abbildung B.13: Skizze einer Seiltrommel mit Last.

Im folgenden sollen folgende Aufgabenstellungen gelöst werden:

- Im ersten Schritt sollen die Lagerkräfte, die Seilkraft sowie die Federkraft im stationären Zustand bestimmt werden.
- Anschließend sollen die Bewegungsgleichungen des Systems mit Hilfe der Impuls- und Drehimpulserhaltung angegeben werden. Als Freiheitsgrad soll die Position  $x_T$  der Trommel verwendet werden.

*Lösung von Aufgabe B.7.* Um die Lagerkräfte, Seilkraft sowie die Federkraft zu ermitteln werden die Trommel, die Rolle und der Block freigeschnitten und die wirkenden Kräfte eingezeichnet. Dabei werden wie in Abb. 2.7 dargestellt, für die auf die Körper wirkenden Kräfte eingezeichnet. In Abb. B.14 sind diese Kräfte für das gegebene System eingezeichnet.

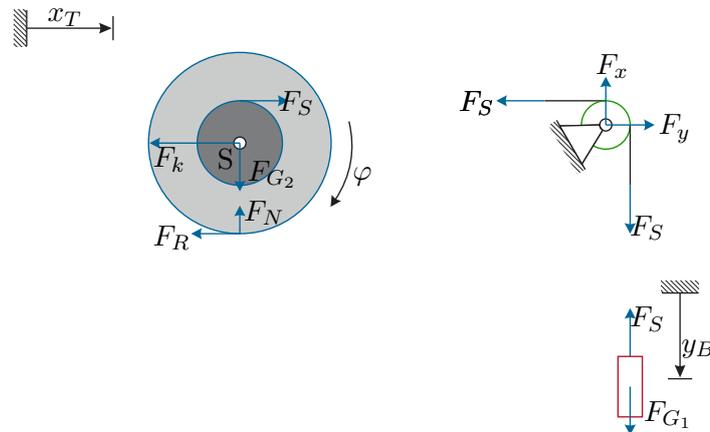


Abbildung B.14: Freigeschnittene Körper.

Auf den Block der Masse  $m_1$  wirken in  $y$ -Richtung die Gewichtskraft  $F_{G_1} = m_1g$  sowie die Seilkraft  $F_S$ . An der Umlenkrolle treten die Lagerkräfte  $F_x$  und  $F_y$  sowie die Kräfte des freigeschnittenen Seils auf. Die wirkenden Kräfte an der Trommel sind die Normalkraft  $F_N$ , die Reibkraft  $F_R$ , die Gewichtskraft  $F_{G_2} = m_2g$ , die Federkraft  $F_k = k(x_T - x_0)$  und die Seilkraft  $F_S$ .

Das Kräftegleichgewicht in  $y$ -Richtung für den Block ergibt

$$F_S = F_{G_1} = m_1g, \quad (\text{B.57})$$

und das Kräftegleichgewicht für die Rolle resultiert in

$$F_x = F_S = m_1g \quad (\text{B.58a})$$

$$F_y = F_S = m_1g. \quad (\text{B.58b})$$

Die Normalkraft  $F_N$  kann direkt aus dem Kräftegleichgewicht in  $y$ -Richtung an der Trommel in der Form

$$F_N = F_{G_2} = m_2g \quad (\text{B.59})$$

ermittelt werden. Das Kräftegleichgewicht in  $x$ -Richtung lautet

$$F_S - F_k - F_R = 0. \quad (\text{B.60})$$

Um nun die unbekanntten Kräfte  $F_k$  und  $F_R$  zu bestimmen, verwendet man das Momentengleichgewicht, angeschrieben z.B. um den Punkt S.

$$F_S r_i + F_R r_a = 0, \quad (\text{B.61})$$

womit unmittelbar

$$F_R = -\frac{r_i}{r_a} F_S = -\frac{r_i}{r_a} m_1 g \quad (\text{B.62})$$

folgt. Setzt man dieses Ergebnis in das Kräftegleichgewicht in  $x$ -Richtung ein, so erhält man die unbekannte Federkraft

$$F_k = F_S - F_R = \left(1 + \frac{r_i}{r_a}\right) m_1 g = \frac{r_i + r_a}{r_a} m_1 g. \quad (\text{B.63})$$

**Hinweis:** Man beachte, dass man das gleiche Ergebnis erhalten hätte, wenn man anstatt des Kräftegleichgewichts in  $x$ -Richtung an der Trommel zusätzlich das Momentengleichgewicht um den Punkt M angeschrieben hätte. Dieses lautet

$$F_s(r_i + r_a) - F_k r_a = 0, \quad (\text{B.64})$$

womit offensichtlich  $F_k = (r_i + r_a)/r_a m_1 g$  folgt.

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen des Systems muss im ersten Schritt die Anzahl der Freiheitsgrade bestimmt werden. Man erkennt, dass bei einer Bewegung des Blocks in  $y$ -Richtung das Seil über die Umlenkrolle zu einer Verdrehung  $\varphi$  der Trommel führt. Da weiterhin angenommen wurde, dass die Trommel ohne zu Gleiten rollt, führt eine Verdrehung der Trommel gleichzeitig zu einer Verschiebung  $x_T$  in  $x$ -Richtung. Damit besitzt das System einen Freiheitsgrad, und dieser soll entsprechend der Angabe zu  $x_T$  gewählt werden.

Im ersten Schritt muss daher der Winkel  $\varphi$  sowie die Position des Block  $y_B$  als Funktion des Freiheitsgrades ausgedrückt werden. Betrachtet man den rollenden Zylinder, so ist offensichtlich, dass die abgerollte Länge (und damit die Verschiebung der Trommel in  $x$ -Richtung) zu  $\varphi r_a$  folgt. Damit gilt

$$\varphi = \frac{x_T}{r_a}. \quad (\text{B.65})$$

Die Änderung der Seillänge (und damit die Änderung der Position  $y_B$  des Blocks) ergibt sich aus der Summe der Verschiebung der Trommel  $x_T$  im Punkt S und dem abgerollten Seil zufolge der Drehung der Trommel, d.h.

$$y_B = x_T + r_i \varphi = x_T + \frac{r_i}{r_a} x_T = \frac{r_i + r_a}{r_a} x_T. \quad (\text{B.66})$$

Die Bestimmung der Bewegungsgleichungen des Systems kann nun entweder mit Hilfe der Impulserhaltung und Drehimpulserhaltung oder durch Anwendung des Euler-Lagrange Formalismus erfolgen. In diesem Beispiel sollen die Impuls- und Drehimpulserhaltung verwendet werden. Dazu formuliert man die Impuls- und Drehimpulserhaltung für die Trommel und den Block. Da die Rolle und das Seil massefrei angenommen wurden, verschwindet der Impuls für diese Teile.

Mit der Geschwindigkeit  $v_B = \dot{y}_B$  des Blocks folgt die Impulserhaltung

$$m_1 \frac{d}{dt} v_B = m_1 g - F_S \quad (\text{B.67})$$

und damit folgt

$$F_S = -m_1 \frac{d}{dt} v_B + m_1 g = m_1 \left( g - \frac{r_i + r_a}{r_a} \frac{d}{dt} v_T \right), \quad (\text{B.68})$$

mit der Geschwindigkeit der Trommel  $v_T$ . Man beachte, dass die Seilkraft  $F_S$  aus obiger Gleichung sich von der Seilkraft im statischen Fall unterscheidet!

Die Drehimpulserhaltung für die Trommel angeschrieben um den Punkt S ergibt sich zu

$$\theta_2 \frac{d}{dt} \omega = F_S r_i + F_R r_a \quad (\text{B.69})$$

und somit gilt

$$F_R = \frac{1}{r_a} \left( \theta_2 \frac{d}{dt} \omega - F_S r_i \right), \quad (\text{B.70})$$

wobei  $\omega = \dot{\varphi}$  die Winkelgeschwindigkeit der Trommel bezeichnet. Setzt man die Seilkraft sowie den Zusammenhang zwischen  $\varphi$  und  $x_T$  ein, so erhält man

$$F_R = \frac{1}{r_a^2} (r_i (r_i + r_a) m_1 + \theta_2) \dot{v}_T - \frac{r_i}{r_a} m_1 g. \quad (\text{B.71})$$

Im letzten Schritt formuliert man die Impulserhaltung für die Trommel in  $x$ -Richtung in der Form

$$m_2 \frac{d}{dt} v_T = F_S - F_k - F_R = F_S - k(x_T - x_0) - F_R. \quad (\text{B.72})$$

Die gewünschte Bewegungsgleichung des Systems erhält man, indem man die Zwischenergebnisse für  $F_S$  und  $F_R$  einsetzt und nach  $\dot{v}_T$  auflöst. Dies ergibt

$$\dot{v}_T = \frac{(r_i + r_a) m_1 g r_a - k(x_T - x_0) r_a^2}{(r_i + r_a)^2 m_1 + \theta_2 + m_2 r_a^2}. \quad (\text{B.73})$$

**Aufgabe B.8 (Seilzug).** Gegeben ist der in Abb. B.15 dargestellte Seilzug, bestehend aus einer Last  $L$  (Masse  $m_L$ ), einer reibungsfrei gelagerten Seiltrommel  $R_1$  (Masse  $m_1$ , Trägheitsmoment  $\theta_1$ , Radius außen  $r_1$ , Radius innen  $r_2$ ) und einer frei beweglichen Rolle  $R_2$  (Masse  $m_2$ , Trägheitsmoment  $\theta_2$ , Radius  $r_2$ ) an der eine externe vertikale Kraft  $F$  wirkt. Die Last ist auf einer schiefen Ebene (Winkel  $\varphi$ ) gelagert, wobei zwischen der Last und der Ebene trockene Gleitreibung mit dem Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_c$  auftritt. Zum Zeitpunkt  $t_0$  besitzt die Last die Geschwindigkeit  $v_0$  (bergauf). Über die Kraft  $F$  soll die Last innerhalb der Wegstrecke  $s$  auf die Geschwindigkeit  $v_1$

beschleunigt werden. Die Radien  $r_1$  sowie  $r_2$  der Seiltrommel  $R_1$  können als konstant und die Seile als masselos angenommen werden. Betrachten Sie die folgenden Größen als gegeben:  $s, v_0, v_1, m_L, m_1, m_2, \theta_1, \theta_2, r_1, r_2, \varphi, \mu_c$ .

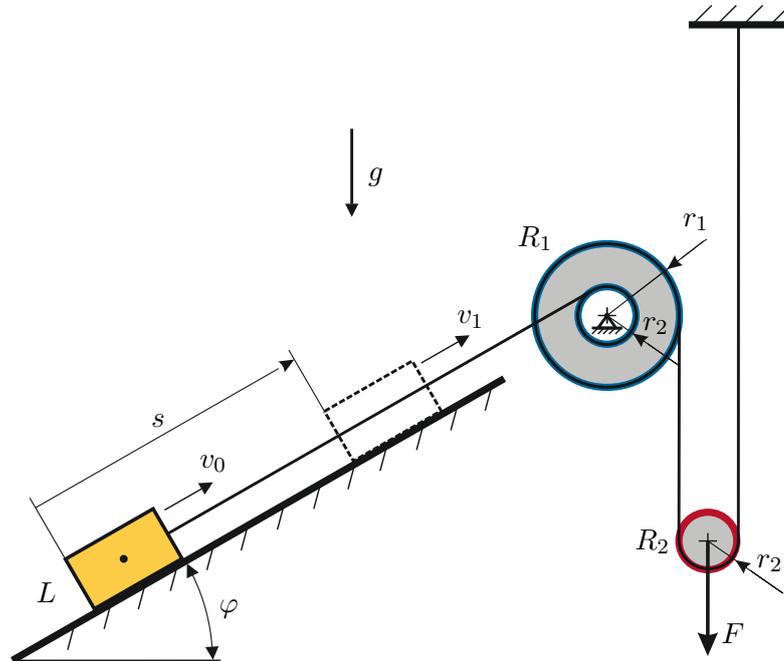


Abbildung B.15: Skizze eines Seilzugs.

Gesucht ist die zeitlich konstante Kraft  $F$ , welche die Masse  $L$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  innerhalb der Wegstrecke  $s_1 - s_0$  auf die Geschwindigkeit  $v_1$  beschleunigt. Nehmen Sie dabei an, dass die Position  $s$  zu Beginn  $s(t_0) = s_0 = 0$  ist.

*Lösung von Aufgabe B.8.* Eine elegante Möglichkeit zum Berechnen der erforderlichen Kraft besteht durch Anwendung des Energieerhaltungsprinzips in Form des Vergleichs der Energie zum Zeitpunkt  $t_0$  und zum Zeitpunkt  $t_1$ , an dem die Last die Geschwindigkeit  $v_1$  erreicht. Aufgrund des Energieerhaltungsprinzips gilt

$$T(t_0) + V(t_0) + W_F - W_R = T(t_1) + V(t_1) , \quad (\text{B.74})$$

wobei  $T$  die kinetische Energie und  $V$  die potentielle Energie des Systems sind.  $W_F$  bezeichnet die verrichtete Arbeit zufolge der Kraft  $F$  und  $W_R$  die dissipierte Energie aufgrund der auftretenden Reibung.

Im ersten Schritt zur Lösung der Aufgabenstellung ist eine Betrachtung der Kinematik, insbesondere die Bestimmung der Freiheitsgrade des Systems, notwendig. Wäre kein gespanntes Seil vorhanden, dann ergeben sich die folgenden 4 Freiheitsgrade: die Position  $s$  der Last, der Winkel  $\phi_{R_1}$  der Rolle  $R_1$  sowie die Position  $s_{R_2}$  und

der Winkel  $\phi_{R2}$  der Rolle  $R_2$ . Für jede Seilverknüpfung fällt ein Freiheitsgrad weg und somit ergibt sich für 3 Verbindungen zwischen den Objekten 1 Freiheitsgrad. Es ist also möglich, die gesamte Kinematik des Systems durch eine unabhängige Größe (Freiheitsgrad) auszudrücken. Für das Lösen der Aufgabe ist es vorteilhaft die Position  $s$  der Last zu wählen.

Die kinetische Energie  $T$  des Systems ergibt sich zu

$$T = \frac{m_L v^2}{2} + \frac{\theta_1 \omega_{R1}^2}{2} + \frac{\theta_2 \omega_{R2}^2}{2} + \frac{m_2 v_{R2}^2}{2} . \quad (\text{B.75})$$

Für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{R1}$  der Rolle  $R_1$  gilt der Zusammenhang

$$\omega_{R1} = \frac{v}{r_2} \quad (\text{B.76})$$

und für die Austrittsgeschwindigkeit  $v_2$  des Seils aus der Rolle  $R_1$  erhält man

$$v_2 = r_1 \omega_{R1} = v \frac{r_1}{r_2} . \quad (\text{B.77})$$

An der beweglichen Rolle  $R_2$  gelten die Beziehungen für einen Flaschenzug (siehe (2.22)), d.h.

$$v_{R2} = \frac{v_2}{2} = v \frac{r_1}{2r_2}, \quad \omega_{R2} = \frac{v_{R2}}{r_2} = v \frac{r_1}{2r_2^2} . \quad (\text{B.78})$$

Die potentielle Energie des System zum Zeitpunkt  $t_1$

$$V(t_1) = m_L g s_1 \sin(\varphi) - m_2 g s_1 \frac{r_1}{2r_2} + V(t_0) , \quad (\text{B.79})$$

setzt sich aus dem Anstieg der Last und dem Absenken der Rolle  $R_2$  zusammen. Da sich  $V(t_0)$  in der Energiebilanz kürzt, kann  $V(t_0) = 0$  gewählt werden. Die verrichtete Arbeit der Kraft  $F$  errechnet sich zu

$$W_F = \int_{\tilde{x}=0}^x F(\tilde{x}) d\tilde{x} = F s_1 \frac{r_1}{2r_2}, \quad (\text{B.80})$$

wobei für den letzten Schritt eine konstante Kraft  $F$  angenommen wurde.

Zur Berechnung der dissipierten Energie  $W_R$  zufolge der auftretenden Gleitreibung benötigt man die Normalkraft  $F_N$ , welche die Last auf die schiefe Ebene ausübt:

$$F_N = m_L g \cos(\varphi) . \quad (\text{B.81})$$

Die verrichtete Arbeit ergibt sich mit der Tangentialkraft  $F_T = F_N \mu_c$  zu

$$W_R = s_1 F_T = s_1 \mu_c m_L g \cos(\varphi) . \quad (\text{B.82})$$

Einsetzen der Ausdrücke für die Energiebilanz und Umformen ergibt den gesuchten Ausdruck für die Kraft  $F$ :

$$F = \frac{2r_2}{s_1 r_1} \left( m_L \frac{v_1^2 - v_0^2}{2} + \theta_1 \frac{\omega_{R1}(t_1)^2 - \omega_{R1}(t_0)^2}{2} + \theta_2 \frac{\omega_{R2}(t_1)^2 - \omega_{R2}(t_0)^2}{2} + m_2 \frac{v_{R2}(t_1)^2 - v_{R2}(t_0)^2}{2} + m_L g s_1 (\sin(\varphi) + \mu_c \cos(\varphi)) - m_2 g s_1 \frac{r_1}{2r_2} \right) \quad (\text{B.83})$$

mit den vorher definierten Größen  $\omega_{R1}$ ,  $\omega_{R2}$  und  $v_{R2}$ .

**Aufgabe B.9 (Kniehebelpresse).** In Abb. B.16 ist eine Kniehebelpresse, wie sie z.B. bei der Massivumformung von Stahl verwendet wird, skizziert. Durch Aufbringen einer Kraft  $F$  am Knie der Presse lässt sich der Schlitten horizontal verfahren. Der Vorteil dieser Konstruktion besteht darin, dass bei fast ausgestrecktem Knie sehr große Kräfte in die horizontale Richtung aufgebaut werden können. Die beiden Schenkel haben die Massen  $m_1$  und  $m_2$  sowie die Trägheitsmomente  $\theta_1$  und  $\theta_2$  um die  $z$ -Achse. Die Längen  $L_1$  und  $L_2$  zwischen den Gelenken sind ebenfalls bekannt. Näherungsweise kann man annehmen, dass die Schwerpunkte der Schenkel in deren Mitte liegen. Die Rückstellfeder hat die Federkonstante  $c_F$  und eine entspannte Länge  $x_{F,0}$ . Die Schwerkraft mit der Erdbeschleunigung  $g$  wirkt in negative  $y$ -Richtung.

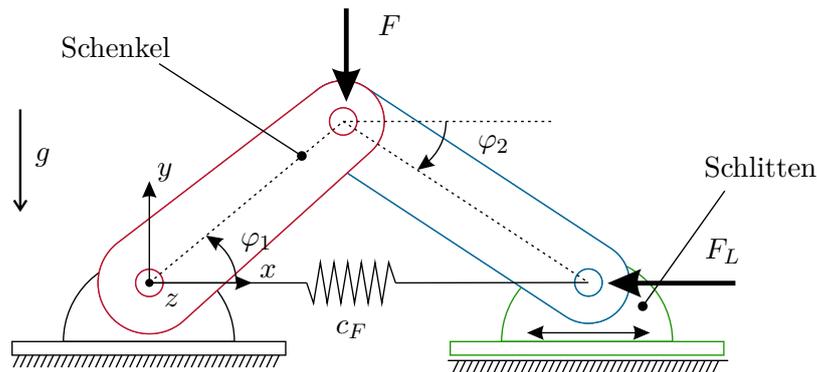


Abbildung B.16: Skizze einer Kniehebelpresse.

Es sollen nun die potentielle und kinetische Energie des Systems sowie der Vektor der generalisierten Kräfte ermittelt werden.

**Lösung von Aufgabe B.9.** Bevor mit der mathematischen Beschreibung der Kniehebelpresse begonnen wird, müssen einige Überlegungen zu den Freiheitsgraden des Systems angestellt werden. Der erste Schenkel ist im Koordinatenursprung drehbar gelagert, jedoch weder in  $x$ - noch in  $y$ -Richtung verschiebbar. Er besitzt also nur einen Freiheitsgrad. Der zweite Schenkel ist am Knie mit dem ersten Schenkel drehbar verbunden. Ohne Schlitten hätte auch dieser Schenkel einen Freiheitsgrad, jedoch

wird dessen Bewegung durch den Schlitten eingeschränkt. Durch diese Einschränkung ist die Drehung des zweiten Schenkels nicht unabhängig von der Bewegung des ersten. Folglich reicht ein Freiheitsgrad aus um die Bewegung des Systems vollständig zu beschreiben.

Die Wahl der Koordinaten zur Beschreibung des Systems ist nicht eindeutig. Bisher wurde lediglich bestimmt, dass ein Freiheitsgrad ausreicht um das System vollständig zu beschreiben. Zur Beschreibung des Systems kann beispielsweise der Winkel  $\varphi_1$  oder die  $x$ -Koordinate des Schlittens verwendet werden. Es zeigt sich jedoch, dass eine günstige Wahl des Freiheitsgrads die Herleitung der Bewegungsgleichungen stark vereinfachen kann.

In den weiteren Schritten soll als Freiheitsgrad  $q$  der Winkel

$$q = \varphi_1(t) \quad (\text{B.84})$$

des ersten Schenkels zur Beschreibung der Bewegung der Kniehebelpresse verwendet werden. Da nur eine generalisierte Koordinate benötigt wird, muss der Winkel  $\varphi_2$  von dieser abhängig sein. Die Zwangsbedingung des Schlittens besagt nun, dass der Endpunkt des zweiten Schenkels

$$\mathbf{r}_e = L_1 \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.85})$$

für alle Zeiten auf der  $x$ -Achse verbleibt, also dass die Gleichung

$$L_1 \sin(\varphi_1) - L_2 \sin(\varphi_2) = 0 \quad (\text{B.86})$$

erfüllt sein muss. Der Winkel  $\varphi_2$  lässt sich somit durch

$$\varphi_2(q) = \arcsin\left(\frac{L_1}{L_2} \sin(q)\right) \quad (\text{B.87})$$

ausdrücken.

Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen mithilfe der Euler-Lagrange Gleichungen müssen die Lagrange-Funktion des Systems und die generalisierten Kräfte bestimmt werden. Dazu werden zuerst die Ortsvektoren zu den Schwerpunkten der beiden Schenkel bestimmt. Da die Schwerpunkte laut Angabe in der Mitte der Schenkel (also bei  $L_1/2$  bzw.  $L_2/2$ ) liegen, lassen sich die Ausdrücke

$$\mathbf{r}_1 = \frac{L_1}{2} \begin{bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.88})$$

$$\mathbf{r}_2 = L_1 \begin{bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{bmatrix} + \frac{L_2}{2} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2(q)) \\ -\sin(\varphi_2(q)) \end{bmatrix} \quad (\text{B.89})$$

für die Schwerpunktvektoren angeben. Die translatorischen Geschwindigkeiten der

Schwerpunkte ergeben sich durch zeitliches Ableiten der Ortsvektoren zu

$$\mathbf{v}_1 = \frac{L_1}{2} \begin{bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{bmatrix} \dot{q} \quad (\text{B.90})$$

$$\mathbf{v}_2 = L_1 \begin{bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{bmatrix} \dot{q} + \frac{L_2}{2} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_2(q)) \\ -\cos(\varphi_2(q)) \end{bmatrix} \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \dot{q} \quad (\text{B.91})$$

und die Winkelgeschwindigkeiten der Schenkel lauten

$$\omega_1 = \dot{q} \quad (\text{B.92})$$

$$\omega_2 = -\frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \dot{q}. \quad (\text{B.93})$$

Zur besseren Übersicht, wurde die Ableitung von  $\varphi_2(q)$  hier nicht ausgewertet.

Damit ergibt sich die kinetische Energie nach (2.81) bzw. (2.192) zu

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{8} m_1 L_1^2 \dot{q}^2 + \\ & \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{8} m_2 L_2^2 \left( \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \cos(q + \varphi_2(q)) \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \dot{q}^2 + \\ & \frac{1}{2} \theta_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \theta_2 \left( \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \dot{q} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.94})$$

wobei sich die auftretenden trigonometrischen Funktionen mit  $\sin(\varphi_1)^2 + \cos(\varphi_1)^2 = 1$  und  $\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$  stark vereinfachen lassen.

Die potentielle Energie zufolge der Gewichtskräfte der Schenkel ergibt sich nach (2.85) zu

$$V_g = m_1 g \frac{L_1}{2} \sin(q) + m_2 g L_1 \sin(q) - m_2 g \frac{L_2}{2} \sin(\varphi_2(q)) + V_{g,0} \quad (\text{B.95})$$

und die potentielle Energie der Feder folgt nach (2.91) und der  $x$ -Koordinate des Endpunkts  $\mathbf{r}_e$  zu

$$V_F = \frac{1}{2} c_F (L_1 \cos(q) + L_2 \cos(\varphi_2(q)) - x_{F,0})^2. \quad (\text{B.96})$$

Die generalisierten Kräfte zufolge die Kniekraft  $F$  und der Last  $F_L$  ergeben sich nach (2.187) somit zu

$$f_F = \begin{bmatrix} 0 & -F \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q} \begin{bmatrix} L_1 \cos(q) \\ L_1 \sin(q) \end{bmatrix} = -F L_1 \cos(q) \quad (\text{B.97})$$

$$f_{FL} = \begin{bmatrix} -F_L & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial q} = F_L \left( L_1 \sin(q) + L_2 \sin(\varphi_2(q)) \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \right). \quad (\text{B.98})$$

Damit lassen sich die Euler-Lagrange Gleichungen mit der Lagrange-Funktion  $L = T - V_g - V_F$  und den generalisierten Kräften  $f_F$  und  $f_{FL}$  anschreiben.

**Aufgabe B.10 (Planarer Manipulator).** In dieser Aufgabe wird das mechanische System (planarer Manipulator) aus Abbildung B.17 betrachtet. Der Aufbau besteht aus drei Segmenten  $i = \{1, 2, 3\}$  mit den Längen  $l_i$ , den Massen  $m_i$  und den Trägheitsmomenten  $\theta_i$  bezogen auf den jeweiligen Schwerpunkt  $S_i$ . Segment 1 ist in der konstanten Höhe  $h$  drehbar gelagert. Die Lagerung kann dabei als ideal reibungsfrei angenommen werden. An den beiden Enden von Segment 1 sind die Segmente 2 und 3 wiederum ideal reibungsfrei drehbar gelagert. Bei allen Segmenten kann von einer homogenen Dichte sowohl über den Querschnitt als auch über die Länge ausgegangen werden. Wie aus Abbildung B.17 ersichtlich, wirkt die Erdbeschleunigung  $g$  in negative  $\mathbf{e}_y$ -Richtung. Außerdem greift am freien Ende von Segment 2 eine externe Kraft  $\mathbf{f}_e = [-f_{e,x} \ 0]^T$  an.

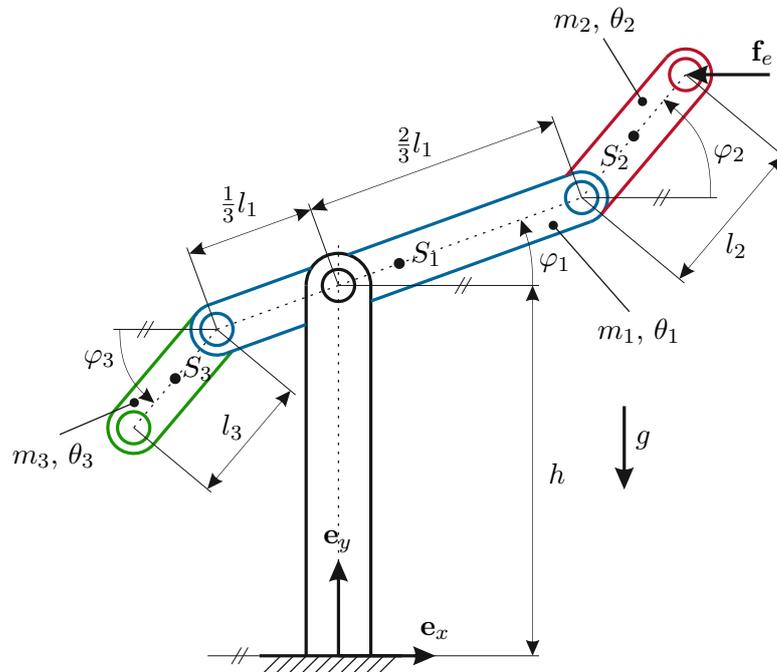


Abbildung B.17: Einfacher planarer Manipulator.

Für das gegebene mechanische System sollen die Bewegungsgleichungen mittels Euler-Lagrange-Formalismus hergeleitet werden.

**Lösung von Aufgabe B.10.** Das betrachtete System besitzt drei Freiheitsgrade (die Rotationen der drei Segmente). Im ersten Schritt wird der Vektor der generalisierten Koordinaten definiert. In Hinblick auf eine einfache Berechnung der kinetischen und

potentiellen Energie erweist sich die Wahl

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]^T \quad (\text{B.99})$$

als sinnvoll.

**Hinweis:** Die Wahl der generalisierten Koordinaten ist nicht eindeutig. Im vorliegenden Beispiel wäre auch die Wahl

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T = [\varphi_1 \quad \varphi_2 - \varphi_1 \quad \varphi_3 - \varphi_1]^T \quad (\text{B.100})$$

denkbar. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die abgeleiteten Bewegungsgleichungen stets in den gewählten generalisierten Koordinaten formuliert sind. Für die Wahl (B.100) ergäbe dies also Gleichungen in  $\varphi_1$  und den Differenzwinkeln  $\varphi_2 - \varphi_1$  und  $\varphi_3 - \varphi_1$ .

Die zentrale Größe für die Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen ist die Lagrange-Funktion  $L = T - V$ . Dabei berechnet sich die kinetische Energie im System aus der Summe der kinetischen Energien der Einzelkörper als

$$T = \sum_{i=1}^3 (T_{trans,i} + T_{rot,i}), \quad (\text{B.101})$$

mit den translatorischen Energien entsprechend (2.81)

$$T_{trans,i} = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_{S_i}^T \dot{\mathbf{r}}_{S_i} \quad (\text{B.102})$$

und den rotatorischen Energien entsprechend (2.148)

$$T_{rot,i} = \frac{1}{2} \theta_i \dot{\varphi}_i^2. \quad (\text{B.103})$$

Die Ortsvektoren zu den Schwerpunkten der Segmente ergeben sich aus Abbildung B.17 zu

$$\mathbf{r}_{S_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{l_1}{6} \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} \quad (\text{B.104a})$$

$$\mathbf{r}_{S_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{2l_1}{3} \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} + \frac{l_2}{2} \begin{bmatrix} \cos(q_2) \\ \sin(q_2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.104b})$$

$$\mathbf{r}_{S_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{l_1}{3} \begin{bmatrix} -\cos(q_1) \\ -\sin(q_1) \end{bmatrix} + \frac{l_3}{2} \begin{bmatrix} -\cos(q_3) \\ -\sin(q_3) \end{bmatrix} \quad (\text{B.104c})$$

womit sich die Schwerpunktgeschwindigkeiten zu

$$\dot{\mathbf{r}}_{S_1} = \frac{l_1}{6} \begin{bmatrix} -\sin(q_1) \\ \cos(q_1) \end{bmatrix} \dot{q}_1 \quad (\text{B.105a})$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{S_2} = \frac{2l_1}{3} \begin{bmatrix} -\sin(q_1) \\ \cos(q_1) \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \frac{l_2}{2} \begin{bmatrix} -\sin(q_2) \\ \cos(q_2) \end{bmatrix} \dot{q}_2 \quad (\text{B.105b})$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{S_3} = \frac{l_1}{3} \begin{bmatrix} \sin(q_1) \\ -\cos(q_1) \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \frac{l_3}{2} \begin{bmatrix} \sin(q_3) \\ -\cos(q_3) \end{bmatrix} \dot{q}_3 \quad (\text{B.105c})$$

ergeben.

**Hinweis:** Da es sich bei dieser Aufgabe um ein planares Problem handelt ist die dritte Ortskoordinate stets 0 und muss daher in den Berechnungen nicht extra berücksichtigt werden.

Für die Quadrate der Geschwindigkeitsvektoren erhält man nach kurzer Rechnung

$$\dot{\mathbf{r}}_{S_1}^T \dot{\mathbf{r}}_{S_1} = \left(\frac{l_1}{6}\right)^2 \dot{q}_1^2 \quad (\text{B.106a})$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{S_2}^T \dot{\mathbf{r}}_{S_2} = \left(\frac{2l_1}{3}\right)^2 \dot{q}_1^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{q}_2^2 + \frac{2}{3} l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (\text{B.106b})$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{S_3}^T \dot{\mathbf{r}}_{S_3} = \left(\frac{l_1}{3}\right)^2 \dot{q}_1^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{3} l_1 l_3 \cos(q_1 - q_3) \dot{q}_1 \dot{q}_3, \quad (\text{B.106c})$$

wobei die trigonometrische Identität  $\cos(q_1 - q_i) = \cos(q_1) \cos(q_i) + \sin(q_1) \sin(q_i)$  für  $i = \{2, 3\}$  zur Vereinfachung der Ausdrücke herangezogen wurde.

Mit diesen Vorbereitungen berechnet sich nun die kinetische Energie im System zu

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left( m_1 \left(\frac{l_1}{6}\right)^2 + m_2 \left(\frac{2l_1}{3}\right)^2 + m_3 \left(\frac{l_1}{3}\right)^2 + \theta_1 \right) \dot{q}_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + \theta_2 \right) \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \left( m_3 \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 + \theta_3 \right) \dot{q}_3^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{6} m_3 l_1 l_3 \cos(q_1 - q_3) \dot{q}_1 \dot{q}_3. \end{aligned} \quad (\text{B.107})$$

Die potentielle Energie des Systems resultiert nur zufolge der Gravitation. Wählt man das Bezugspotential bei  $y = 0$  erhält man, mit der Erdbeschleunigung  $g$  entsprechend Abbildung B.17, die potentielle Energie als

$$\begin{aligned} V &= m_1 g \mathbf{e}_y^T \mathbf{r}_1 + m_2 g \mathbf{e}_y^T \mathbf{r}_2 + m_3 g \mathbf{e}_y^T \mathbf{r}_3 \\ &= m_1 g \left( h + \frac{l_1}{6} \sin(q_1) \right) + m_2 g \left( h + \frac{2l_1}{3} \sin(q_1) + \frac{l_2}{2} \sin(q_2) \right) \\ &\quad + m_3 g \left( h - \frac{l_1}{3} \sin(q_1) - \frac{l_3}{2} \sin(q_3) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.108})$$

Für die Beschreibung der Bewegungsgleichung sind noch die generalisierten Kräfte notwendig. Entsprechend (2.187) erhält man die generalisierte Kräfte aus

$$\mathbf{f}_q = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \mathbf{f}_e \quad (\text{B.109})$$

mit dem Ortsvektor des Kraftangriffs

$$\mathbf{r}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{2l_1}{3} \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} \cos(q_2) \\ \sin(q_2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.110})$$

zu

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} \frac{2l_1}{3} \sin(q_1) \\ l_2 \sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix} f_{e,x}. \quad (\text{B.111})$$

Mit diesen Vorbereitungen lassen sich die Bewegungsgleichungen des Systems entsprechend (2.196) aus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_{q,i}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{B.112})$$

berechnen. Aufgrund der speziellen Struktur der Gleichungen können diese kompakt als

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_q \quad (\text{B.113})$$

mit

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{l_1^2}{36}(m_1 + 16m_2 + 4m_3) + \theta_1 & \frac{l_1 l_2}{3} m_2 \cos(q_1 - q_2) & \frac{l_1 l_3}{6} m_3 \cos(q_1 - q_3) \\ \frac{l_1 l_2}{3} m_2 \cos(q_1 - q_2) & \frac{l_2^2}{4} m_2 + \theta_2 & 0 \\ \frac{l_1 l_3}{6} m_3 \cos(q_1 - q_3) & 0 & \frac{l_3^2}{4} m_3 + \theta_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.114a})$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{l_1 l_2}{3} m_2 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2 & \frac{l_1 l_3}{6} m_3 \sin(q_1 - q_3) \dot{q}_3 \\ -\frac{l_1 l_2}{3} m_2 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2 & 0 & 0 \\ \frac{l_1 l_3}{6} m_3 \sin(q_1 - q_3) \dot{q}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.114b})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{6} m_1 g \cos(q_1) + \frac{2l_1}{3} m_2 g \cos(q_1) - \frac{l_1}{3} m_3 g \cos(q_1) \\ \frac{l_2}{2} m_2 g \cos(q_2) \\ -\frac{l_3}{2} m_3 g \cos(q_3) \end{bmatrix} \quad (\text{B.114c})$$

angeschrieben werden.

**Aufgabe B.11 (Drehteller mit Masse).** Betrachtet wird ein Drehteller aus Abbildung B.18, welches sich mit einer konstanten Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht. Dabei wird die Masse mit  $m$ , der Haftreibungskoeffizient zwischen Oberfläche und der Masse mit  $\mu_H$ , die Neigung des Drehtellers mit dem Winkel  $\beta$ , der Abstand der Masse zum Aufhängepunkt der Feder mit  $x_m$ , die entspannte Länge der Feder mit  $x_0$ , die Distanz zwischen Aufhängepunkt der Feder und der Drehachse in Bezug auf die Oberfläche mit  $l$  und die Erdbeschleunigung mit  $g$  bezeichnet.

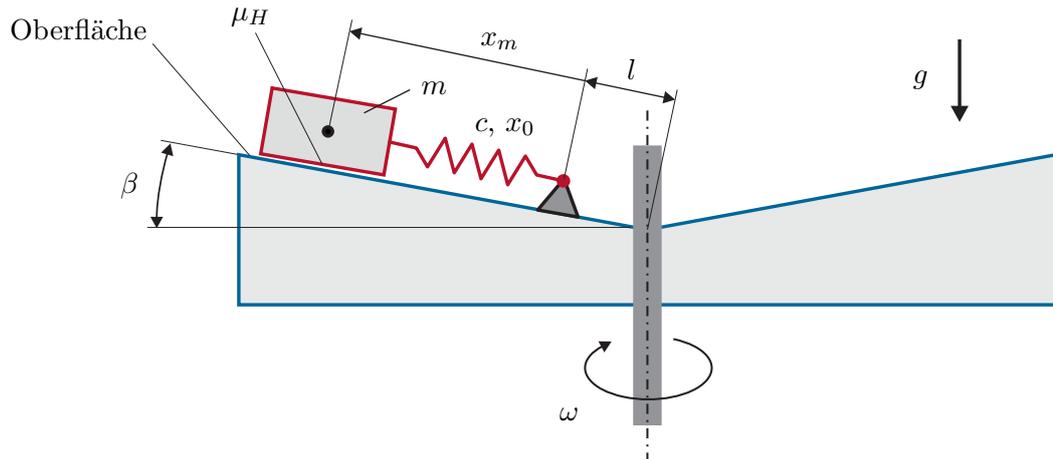


Abbildung B.18: Skizze des Drehtellers mit Masse.

In den folgenden Untersuchungen wird ein stationärer Punkt betrachtet, d.h. die Geschwindigkeit  $\dot{x}_m$  und die Beschleunigung  $\ddot{x}_m$  der Masse  $m$  sind Null. Für dieses System sollen alle auftretenden Kräfte skizziert und benannt werden, wobei die Kräfte als Funktion der gegebenen Größen ausgedrückt werden sollen. Weiters sollen die Haftbedingungen, welche für die Masse  $m$  gelten, ermittelt werden. Abschließend ist die kritische Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega_{krit}$  zu ermitteln, ab welcher sich die Masse  $m$  in Bewegung setzen würde.

**Lösung von Aufgabe B.11.** Im ersten Schritt wird die Fliehkraft, welche auf die Masse  $m$  wirkt, berechnet. Im Allgemeinen lässt sich eine Fliehkraft mit  $F_f = mr\omega^2$  ausdrücken, wobei  $m$  die Masse,  $r$  den Abstand bezüglich der Drehachse und  $\omega$  die Drehwinkelgeschwindigkeit um die Drehachse darstellen (vgl. Abbildung 2.5). Angewandt auf das Drehteller ergibt sich für den Abstand  $r = (x_m + l) \cos(\beta)$ . Damit lässt sich die Fliehkraft der Masse  $m$  in der Form

$$F_f = m(x_m + l) \cos(\beta) \omega^2 \quad (\text{B.115})$$

angeben. Zudem wirkt aufgrund des Gravitationsfeldes eine Gewichtskraft  $F_g$  auf die

Masse  $m$ ,

$$F_g = mg. \quad (\text{B.116})$$

Da die Masse  $m$  auch über eine Feder mit dem Drehteller gekoppelt ist, wirkt die Federkraft  $F_c$ ,

$$F_c = c(x_m - x_0), \quad (\text{B.117})$$

mit der entspannten Länge  $x_0$  der Feder.

Weiterhin wirkt eine Reibkraft  $F_r$  auf die Masse. Zur Beschreibung dieser Kraft ist es vorteilhaft die bisherigen Kräfte in ihre Normal- und Tangentialkomponenten bezüglich der Oberfläche zu separieren. Die Komponenten der Gewichtskraft  $F_g$  lassen sich mit

$$F_{g,n} = mg \cos(\beta) \quad (\text{B.118a})$$

$$F_{g,t} = mg \sin(\beta) \quad (\text{B.118b})$$

beschreiben. Die Fliehkraft  $F_f$  setzt sich äquivalent aus

$$F_{f,n} = m(x_m + l) \cos(\beta) \sin(\beta) \omega^2 \quad (\text{B.119a})$$

$$F_{f,t} = m(x_m + l) \cos^2(\beta) \omega^2 \quad (\text{B.119b})$$

zusammen. Die Federkraft ist bereits tangential zur Oberfläche ausgerichtet.

Damit lässt sich die Reibkraft  $F_r$  in der Form

$$F_r = \mu_H (F_{g,n} + F_{f,n}) = \mu_H m (g \cos(\beta) + (x_m + l) \cos(\beta) \sin(\beta) \omega^2) \quad (\text{B.120})$$

angeben. In Abbildung B.19 sind die Kräfte und deren Normal- und Tangentialkomponenten angeführt.

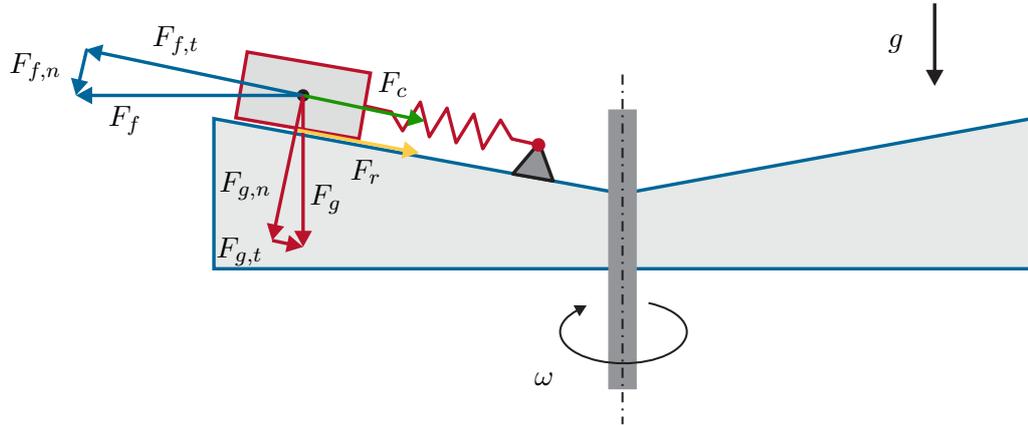


Abbildung B.19: Auf die Masse wirkende Kräfte.

Damit ist es möglich die Haftbedingungen aufzustellen. Aufgrund des Winkels  $\beta$  und der Kopplung der Masse  $m$  mit der Feder kann sich die Masse auch bei einer Drehbewegung trotz der Fliehkräfte nach Innen bewegt. Daher erfolgt bei den Haftbedingungen ein Trennung in Bewegung nach Außen und nach Innen. Diese Bedingungen lassen sich für die Bewegung nach Außen in der Form

$$F_{f,t} - F_{g,t} - F_c < \underbrace{\mu_H(F_{g,n} + F_{f,n})}_{F_r} \quad (\text{B.121})$$

und für die Bewegung nach Innen mit

$$F_{f,t} - F_{g,t} - F_c < - \underbrace{\mu_H(F_{g,n} + F_{f,n})}_{F_r} \quad (\text{B.122})$$

ausdrücken.

Im nächsten Schritt werden die kritischen Drehwinkelgeschwindigkeiten  $\omega_{krit}$  berechnet. Die Grundlage dazu bilden die Haftbedingungen von B.121 und B.122. Beginnend bei B.121 ergibt sich nach dem Einsetzen der Normal- und Tangentialkomponenten die Ungleichung

$$m(x_m + l) \cos^2(\beta) \omega^2 - mg \sin(\beta) - c(x_m - x_0) > \mu_H m (g \cos(\beta) + (x_m + l) \cos(\beta) \sin(\beta) \omega^2). \quad (\text{B.123})$$

Dabei ist darauf zu achten, dass in diesem Fall die Haftreibungskraft  $F_r$  kleiner als die resultierende Kräfte aus  $F_{f,t}$ ,  $F_{g,t}$  und  $F_c$  gelten muss. Hieraus kann leicht die Bedingung für  $\omega_{krit}^2$  gemäß

$$\omega_{krit}^2 = \frac{mg \sin(\beta) + \mu_H mg \cos(\beta) + c(x_m - x_0)}{m(x_m + l) \cos^2(\beta) - \mu_H m(x_m + l) \cos(\beta) \sin(\beta)} \quad (\text{B.124})$$

ermittelt werden, womit unmittelbar

$$\omega_{krit} = \pm \sqrt{\frac{mg \sin(\beta) + \mu_H mg \cos(\beta) + c(x_m - x_0)}{m(x_m + l) \cos^2(\beta) - \mu_H m(x_m + l) \cos(\beta) \sin(\beta)}}. \quad (\text{B.125})$$

Vollkommen analog ist die Vorgangsweise zur Ermittlung der kritischen Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega_{krit}$  für eine Bewegung nach Innen. Die Basis bildet die Haftbedingung gemäß B.122. Entsprechendes Substituieren der Normal- und Tangentialkomponenten führt zu der Ungleichung

$$m(x_m + l) \cos^2(\beta) \omega^2 - mg \sin(\beta) - c(x_m - x_0) > -\mu_H m \left( g \cos(\beta) + (x_m + l) \cos(\beta) \sin(\beta) \omega^2 \right). \quad (\text{B.126})$$

und damit

$$\omega_{krit} = \pm \sqrt{\frac{mg \sin(\beta) - \mu_H mg \cos(\beta) + c(x_m - x_0)}{m(x_m + l) \cos^2(\beta) + \mu_H m(x_m + l) \cos(\beta) \sin(\beta)}}. \quad (\text{B.127})$$

**Aufgabe B.12 (Drehgelagerter Hohlzylinder).** Auf einem im Punkt  $K$  drehbar gelagerten Hohlzylinder (Masse  $m_1$ , Länge  $l_1$ , Außendurchmesser  $d_1$ , Innendurchmesser  $d_2$ ) wirkt ein externes Drehmoment  $\tau_e$ , siehe Abb. B.20. Ein zweiter zylindrischer Stab (Masse  $m_2$ , Länge  $l_2$ , Durchmesser  $d_2$ ) ist über ein Federelement (Federkonstante  $c$ , entspannte Länge  $s_0$ ) mit dem Hohlzylinder verbunden.

Bei einer Relativbewegung beider Zylinder wirkt eine geschwindigkeitsproportionale Reibkraft  $f_D$ , mit dem Reibungskoeffizienten  $d(s)$ . Der Reibungskoeffizient ist mit  $d(s) = d_0 A(s)$  proportional zur Kontaktfläche zwischen den Zylindern. Auf beide Zylinder wirkt die Erdbeschleunigung  $g$ . Die Massenträgheitsmomente  $\theta_{1,zz}^{(S)}$  und  $\theta_{2,zz}^{(S)}$  der Zylinder um die jeweiligen  $\mathbf{e}_z^S$ -Achsen sind als bekannt anzunehmen. Für die Bestimmung der Schwerpunktskoordinate des Hohlzylinders, kann die Grundfläche vernachlässigt werden.

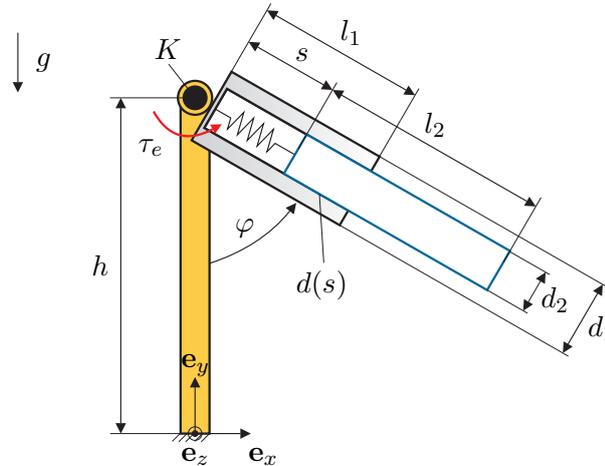


Abbildung B.20: Aufbau einer Haltevorrichtung.

Für diese Konfiguration sollen die Bewegungsgleichungen mithilfe des Euler-Lagrange-Formalismus abgeleitet werden. Weiterhin soll der stationäre Punkt (Ruhelage) des Systems für  $\tau_e = 0$  bestimmt werden.

*Lösung von Aufgabe B.12.* Im ersten Schritt muss eine geeignete Wahl der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$  (d.h. der Freiheitsgrade des Systems) getroffen werden. Das vorliegende System besteht aus 2 Starrkörper, deren unbeschränkte planare Bewegung jeweils drei Freiheitsgrade aufweist (Verschiebungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung sowie Drehung um  $z$ -Achse). Im betrachteten Fall ist das System 4 Zwangsbedingungen unterworfen: (i) Die  $x$ - und  $y$ -Position des Zylinders 1 ist fixiert, womit dieser nur mehr die Drehung um den Winkel  $\varphi$  als Freiheitsgrad aufweist. (2) Der Zylinder 2 ist mit dem Zylinder 1 verbunden, womit dieser die gleiche Drehung ausführen muss. Als einziger Freiheitsgrad dieses Zylinders bleibt eine Bewegung in Richtung des Freiheitsgrades  $s$ .

Aus diesen Überlegungen ergibt sich folgende mögliche Wahl der generalisierten Koordinaten (Freiheitsgrade)

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi \\ s \end{bmatrix}. \quad (\text{B.128})$$

Im nächsten Schritt werden die Ortsvektoren zu den Massenschwerpunkten der jeweiligen Zylinder formuliert. Der Ortsvektor  $\mathbf{r}_1$  zum Schwerpunkt des Hohlzylinders ergibt sich aus geometrischer Überlegung zu

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{l_1}{2} \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.129})$$

und der Ortsvektor  $\mathbf{r}_2$  zum zweiten Zylinder errechnet sich zu

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \left( s + \frac{l_2}{2} \right) \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.130})$$

Die für die Berechnung der kinetischen Energie notwendigen translatorischen Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  der Schwerpunkte der beiden Zylinder ergeben sich zu

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{l_1}{2} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} \dot{\varphi} \quad (\text{B.131a})$$

$$\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{bmatrix} \dot{s} + \left( s + \frac{l_2}{2} \right) \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} \dot{\varphi}. \quad (\text{B.131b})$$

Der rotatorische Anteil der kinetischen Energie ergibt sich unmittelbar zu

$$T_r = \frac{1}{2} \left( \theta_{1,zz}^{(S)} + \theta_{2,zz}^{(S)} \right) \dot{\varphi}^2, \quad (\text{B.132})$$

wobei darauf hingewiesen werden muss, dass die Trägheitsmomente  $\theta_{1,zz}^{(S)}$  und  $\theta_{2,zz}^{(S)}$  um den jeweiligen Schwerpunkt der Zylinder definiert sind.

Der translatorische Anteil ergibt sich mit den Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  zu  $T_t = T_{t1} + T_{t2}$ , mit

$$T_{t1} = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = \frac{1}{8} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2 \quad (\text{B.133a})$$

$$T_{t2} = \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} m_2 \left( \dot{s}^2 + \dot{\varphi}^2 \left( s + \frac{l_2}{2} \right)^2 \right). \quad (\text{B.133b})$$

Die potentielle Energie  $V_f$  der linearen Feder ergibt sich zu

$$V_f = \frac{1}{2} c (s - s_0)^2, \quad (\text{B.134})$$

wobei  $s_0$  die entspannte Länge der Feder beschreibt. Die potenziellen Energien zufolge der Gravitation lassen sich in der Form

$$V_1 = m_1 g \left( h - \frac{l_1}{2} \cos(\varphi) \right) \quad (\text{B.135a})$$

$$V_2 = m_2 g \left( h - \left( s + \frac{l_2}{2} \right) \cos(\varphi) \right). \quad (\text{B.135b})$$

beschreiben. Diesen Ausdruck erhält man direkt indem man die  $y$ -Komponente der Schwerpunktsvektoren verwendet. Die gesamte potenzielle Energie errechnet sich damit zu  $V = V_f + V_1 + V_2$ .

Verwendet man die Lagrange-Funktion

$$L = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}) \quad (\text{B.136})$$

so können die Bewegungsgleichungen des mechanischen Systems mit Hilfe von (2.141) berechnet werden. Die wesentlichen Zwischenergebnisse sind wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L = \frac{1}{4} m_1 l_1^2 \dot{\varphi} + m_2 \left( s + \frac{l_2}{2} \right)^2 \dot{\varphi} + (\theta_{1,zz}^S + \theta_{2,zz}^S) \dot{\varphi}, \quad (\text{B.137a})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L \right) = \frac{1}{4} m_1 l_1^2 \ddot{\varphi} + m_2 \left( s + \frac{l_2}{2} \right)^2 \ddot{\varphi} + 2m_2 \left( s + \frac{l_2}{2} \right) \dot{\varphi} \dot{s} + (\theta_{1,zz}^S + \theta_{2,zz}^S) \ddot{\varphi}, \quad (\text{B.137b})$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} L = -m_1 g \frac{l_1}{2} \sin(\varphi) - m_2 g \left( s + \frac{l_2}{2} \right) \sin(\varphi), \quad (\text{B.137c})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{s}} L = m_2 \dot{s}, \quad (\text{B.137d})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{s}} L \right) = m_2 \ddot{s}, \quad (\text{B.137e})$$

$$\frac{\partial}{\partial s} L = m_2 \dot{\varphi}^2 \left( s + \frac{l_2}{2} \right) - c(s - s_0) + m_2 g \cos(\varphi) \quad (\text{B.137f})$$

Um die Wirkung der Reibungskraft  $f_d$  zu berücksichtigen, verwendet man das Prinzip der virtuellen Verschiebung. Die Reibkraft wurde proportional zur Relativgeschwindigkeit der Oberflächen des Zylinders 1 und 2 angenommen, d.h. proportional zu  $\dot{s}$ . Weiterhin wurde angenommen, dass die Reibung proportional zur Kontaktfläche  $A(s)$  ist. Diese ergibt sich zu  $A(s) = (l_1 - s)d_2\pi$ , wobei  $d_2$  der Durchmesser des Zylinders 2 darstellt. Damit gilt

$$\mathbf{f}_d = d_0(l_1 - s)d_2\pi\dot{s} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos \varphi \end{bmatrix} = f_d \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (\text{B.138})$$

Der Angriffspunkt  $\mathbf{r}_d$  der Reibkraft  $\mathbf{f}_d$  kann vereinfacht am Anfang des Zylinders 2 angenommen werden (Kräfte dürfen entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden). Somit gilt

$$\mathbf{r}_d = \begin{bmatrix} s \sin(\varphi) \\ h - s \cos(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.139})$$

Verwendet man nun das D'Alembertsche Prinzip, so errechnet sich die verallgemeinerte Kräfte bezüglich der Freiheitsgrade nach (2.184) zu

$$\tau_{f_d,s} = -f_d \quad (\text{B.140a})$$

$$\tau_{f_d,\varphi} = 0 \quad (\text{B.140b})$$

Dieses Ergebnis hätte man auch (mit etwas Übung im Umgang mit der Berechnung der verallgemeinerten Kräfte) direkt aus der Tatsache ableiten können, dass eine Veränderung des Freiheitsgrades  $\varphi$  keine Verschiebung der Reibkraft und somit keine (virtuelle) Arbeit erzeugt.

Durch analoge Überlegung erhält man die verallgemeinerten Kräfte zu Folge des externen Moments  $\tau_e$ . Hier bewirkt eine Verschiebung bezüglich des Freiheitsgrades  $s$  keine virtuelle Arbeit, während eine Verdrehung bezüglich des Freiheitsgrades  $\varphi$  mit dem externen Moment  $\tau_e$  direkt eine Arbeit ergibt. Damit erhält man

$$\tau_{\tau_e, s} = 0 \quad (\text{B.141a})$$

$$\tau_{\tau_e, \varphi} = \tau_e \quad (\text{B.141b})$$

und schließlich

$$\tau_s = \tau_{f_d, s} + \tau_{\tau_e, s} = -f_d \quad (\text{B.142a})$$

$$\tau_\varphi = \tau_{f_d, \varphi} + \tau_{\tau_e, \varphi} = \tau_e \quad (\text{B.142b})$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich durch Zusammensetzen der Zwischenergebnisse zu

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{4} m_1 l_1^2 + m_2 \left( s + \frac{l_2}{2} \right)^2 + \theta_{1,zz}^{(s)} + \theta_{2,zz}^{(s)} \right) \ddot{\varphi} + 2m_2 \left( s + \frac{l_2}{2} \right) \dot{\varphi} \dot{s} \\ + g \left( m_1 \frac{l_1}{2} + m_2 \left( s + \frac{l_2}{2} \right) \right) \sin(\varphi) = \tau_e \end{aligned} \quad (\text{B.143a})$$

$$m_2 \ddot{s} + c(s - s_0) - m_2 g \cos(\varphi) - m_2 \dot{\varphi}^2 \left( s + \frac{l_2}{2} \right) = -f_d \quad (\text{B.143b})$$

Die Ruhelagen (stationäre Punkte) eines Systems sind durch  $\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  charakterisiert. Damit folgen die Ruhelagen des Systems für  $\tau_e = 0$  zu

$$\varphi_R = k\pi \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{B.144})$$

$$s_R = \frac{m_2 g \cos(\varphi_R)}{c} + s_0 = s_0 \pm \frac{m_2 g}{c}. \quad (\text{B.145})$$

Offensichtlich wird die Feder in der unteren Ruhelage  $\varphi_R = 0$  gedehnt ( $s_R > s_0$ ) und in der oberen Ruhelage  $\varphi = \pi$  gestaucht ( $s_R < s_0$ ). Weiterhin ist unmittelbar klar, dass eine Verdrehung des Mechanismus um  $k2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , keine Veränderung der stationären Verhältnisse bewirkt. Somit weist das System zwar unendlich viele Ruhelagen auf, das stationäre Verhalten lässt sich jedoch den zwei wesentlichen Ruhelagen (obere und untere Ruhelage) vollständig charakterisieren.

**Aufgabe B.13 (Starrkörper mit Drehfeder).** Gegeben ist das in Abbildung B.21 dargestellte mechanische System. Ein Träger ist im Ursprung drehbar um den Winkel  $\varphi$  gelagert und setzt sich aus zwei starr miteinander verbundenen Stäben zusammen. Die

Stäbe haben die Länge  $L$  bzw.  $L/2$  und die Massen  $m$  bzw.  $m/2$ . Das Massenträgheitsmoment eines Stabes um den Schwerpunkt kann näherungsweise mit  $\theta_{zz,s}^{(S)} = \frac{m_s L_s^2}{12}$  angegeben werden. Die Erdbeschleunigung  $g$  wirkt in negative  $\mathbf{e}_y$ -Richtung und die Feder ist für  $\varphi = 0$  entspannt. Die Kraft  $\mathbf{F}$  mit dem Betrag  $F$  wirkt in Richtung der Stabachse des zweiten Stabes.

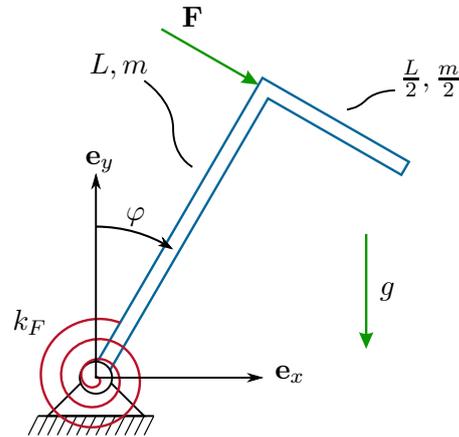


Abbildung B.21: Starrkörpersystem mit Drehfeder.

Für dieses System soll im ersten Schritt die Lage des Schwerpunktes sowie das gesamte Trägheitsmoment um diesen Schwerpunkt berechnet werden. Anschließend sollen die Bewegungsgleichung des Systems mithilfe der Euler-Lagrange Gleichungen ermittelt werden.

**Lösung von Aufgabe B.13.** Im ersten Schritt wird der Vektor  $\mathbf{r}_S^0$  des gesamten Trägers für  $\varphi = 0$  und das Massenträgheitsmoment des Trägers um den Schwerpunkt bestimmt. Hierzu werden zunächst die Schwerpunktsvektoren und die Massenträgheitsmomente der einzelnen Stäbe angegeben. Die Schwerpunktsvektoren der beiden Stäbe des Trägers können direkt aus der Skizze abgelesen werden und lauten

$$\mathbf{r}_{S,1}^0 = \left[ 0, \frac{L}{2}, 0 \right]^T. \quad (\text{B.146})$$

bzw.

$$\mathbf{r}_{S,2}^0 = \left[ \frac{L}{4}, L, 0 \right]^T. \quad (\text{B.147})$$

Durch Anwendung von Formel (2.58) lässt sich der resultierende Schwerpunkt des Trägers zu

$$\mathbf{r}_S^0 = \frac{m\mathbf{r}_{S,1}^0 + \frac{m}{2}\mathbf{r}_{S,2}^0}{m + \frac{m}{2}} = \left[ \frac{L}{12}, \frac{2L}{3}, 0 \right]^T, \quad (\text{B.148})$$

bestimmen. Die Massenträgheitsmomente der beiden Stäbe um deren jeweiligen Schwerpunkt ergeben sich laut Angabe zu

$$\theta_{zz}^{(S,1)} = \frac{mL^2}{12} \quad (\text{B.149a})$$

$$\theta_{zz}^{(S,2)} = \frac{mL^2}{96}. \quad (\text{B.149b})$$

Das gesamte Massenträgheitsmoment des Trägers um den gesamten Schwerpunkt wird durch Anwendung der Formel (2.153) zu

$$\theta_{zz}^{(S)} = \theta_{zz}^{(S,1)} + m(x_{S,S1}^2 + y_{S,S1}^2) + \theta_{zz}^{(S,2)} + \frac{m}{2}(x_{S,S2}^2 + y_{S,S2}^2) = \frac{19mL^2}{96} \quad (\text{B.150})$$

berechnet, wobei die Variablen  $x_{S,S1}$ ,  $y_{S,S1}$  bzw.  $x_{S,S2}$ ,  $y_{S,S2}$  die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten der Vektoren

$$\mathbf{r}_{S,S1} = \mathbf{r}_S^0 - \mathbf{r}_{S,1}^0 = \left[ \frac{L}{12}, \frac{L}{6}, 0 \right]^T \quad (\text{B.151a})$$

$$\mathbf{r}_{S,S2} = \mathbf{r}_S^0 - \mathbf{r}_{S,2}^0 = \left[ -\frac{L}{6}, -\frac{L}{3}, 0 \right]^T \quad (\text{B.151b})$$

bezeichnen.

Im nächsten Schritt werden der Schwerpunktsvektor und die Schwerpunktsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der generalisierten Koordinate  $\varphi$  bestimmt. Der Schwerpunktsvektor lässt sich ausgehend von  $\mathbf{r}_S^0$  für  $\varphi = 0$  über geometrische Überlegungen als

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} \frac{L}{12} \cos(\varphi) + \frac{2L}{3} \sin(\varphi) \\ -\frac{L}{12} \sin(\varphi) + \frac{2L}{3} \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.152})$$

angeben. Die translatorische Geschwindigkeit des Schwerpunkts ergibt sich anschließend durch zeitliche Ableitung des Schwerpunktsvektors zu

$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} -\frac{L}{12} \sin(\varphi) \dot{\varphi} + \frac{2L}{3} \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ -\frac{L}{12} \cos(\varphi) \dot{\varphi} - \frac{2L}{3} \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.153})$$

Die translatorische kinetische Energie lautet zufolge (2.80)

$$T_t = \frac{1}{2} \frac{3m}{2} \mathbf{v}_S^T \mathbf{v}_S = \frac{65}{192} m \dot{\varphi}^2 L^2, \quad (\text{B.154})$$

die rotatorische zufolge (2.148)

$$T_r = \frac{1}{2} \theta_{zz}^{(S)} \dot{\varphi}^2 = \frac{19}{192} m \dot{\varphi}^2 L. \quad (\text{B.155})$$

Die potentielle Energie setzt sich aus der potentiellen Energie im Gravitationsfeld und der potentiellen Federenergie zusammen und kann mit (2.85) bzw. (2.90) zu

$$V = V_g + V_F = -\frac{L}{8}mg \sin(\varphi) + mgL \cos(\varphi) + \frac{1}{2}k_F \varphi^2 \quad (\text{B.156})$$

berechnet werden.

Die eingeprägte generalisierte Kraft zufolge der Kraft  $\mathbf{F}$  lautet  $f_{np} = FL$ . Dies erhält man unmittelbar aus der Tatsache, dass die Kraft  $\mathbf{F}$  immer in Richtung des Stabs 2 (und damit orthogonal auf den Stab 1) wirkt. Die generalisierte Kraft  $f_{np}$  entspricht damit dem um den Drehpunkt wirkenden Moment. Dieses Ergebnis würde man auch erhalten, indem man das D'Alembertsche Prinzip (2.184) anwendet. Der Angriffspunkt  $\mathbf{r}_F$  der Kraft  $\mathbf{F}$  errechnet sich zu

$$\mathbf{r}_F = \begin{bmatrix} L \sin(\varphi) \\ L \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.157})$$

und die Kraft kann als Funktion des Winkels  $\varphi$  in der Form

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F \cos(\varphi) \\ -F \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.158})$$

errechnet werden. Die generalisierte Kraft kann damit über

$$f_{np} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{r}_F}{\partial \varphi} = FL \quad (\text{B.159})$$

ermittelt werden.

Im letzten Schritt wird die Bewegungsgleichung des System mithilfe der Euler-Lagrange Gleichungen berechnet. Hierzu wird die Lagrange-Funktion

$$L = T_r + T_t - V = \frac{7}{16}m\dot{\varphi}^2 L^2 + \frac{L}{8}mg \sin(\varphi) - mgL \cos(\varphi) - \frac{1}{2}k_F \varphi^2 \quad (\text{B.160})$$

verwendet und in die Euler-Lagrange Gleichungen (2.196) eingesetzt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L - \frac{\partial}{\partial \varphi} L = f_{np}. \quad (\text{B.161})$$

Die Auswertung der Euler-Lagrange Gleichungen ergibt die Bewegungsgleichung des Systems

$$\frac{7}{8}mL^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{8}mgL \cos(\varphi) - mgL \sin(\varphi) + k_F \varphi = FL. \quad (\text{B.162})$$

**Aufgabe B.14 (Elastisch gelagerter Ausleger).** Ein Balken  $B$  (stückweise quaderförmig, konstante Dicke  $d$  und homogene Dichte  $\rho$ , Trägheitsmoment  $\theta_{B,zz}^S$  um den Schwerpunkt) ist, wie in Abbildung B.22 dargestellt, im Gelenk  $A$  auf einem Schlitten  $S$  (Masse  $m_s$ ) drehbar gelagert. Im Lager  $A$  tritt viskose Reibung (proportional zur Drehwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$ ) mit dem konstanten Reibungsparameter  $d_2 > 0$  auf. Zwischen Balken  $B$  und Schlitten  $S$  wirkt eine Drehfeder deren Moment linear mit der Auslenkung  $\varphi$  des Balkens ansteigt (Federkonstante  $c_2 > 0$ ). Der Schlitten  $S$  ist auf der Schlittenführung  $SF$  gelagert, welche nur einen translatorischen Freiheitsgrad in Richtung  $s$  zulässt. In der Schlittenlagerung tritt eine geschwindigkeitsproportionale Reibung mit dem konstanten Reibungsparameter  $d_1 > 0$  auf. Zwischen Schlitten  $S$  und dem Boden befindet sich eine lineare Feder mit der konstanten Federsteifigkeit  $c_1 > 0$ . Auf dem Balken greift eine externe Kraft  $\mathbf{F}_e$  mit  $\|\mathbf{F}_e\| = F$  an, welche stets orthogonal auf den Balken steht. In Abbildung B.22 ist das System mit entspannten Federn dargestellt ( $s = s_{10}, \varphi = 0$ ).

Betrachten Sie für die Rechnungen die folgenden Größen als gegeben:  $m_s, \rho, J_B, b_1, b_2, b_3, d, l_1, l_2, l_3, c_1, s_{10}, c_2, d_1, d_2, F$ .

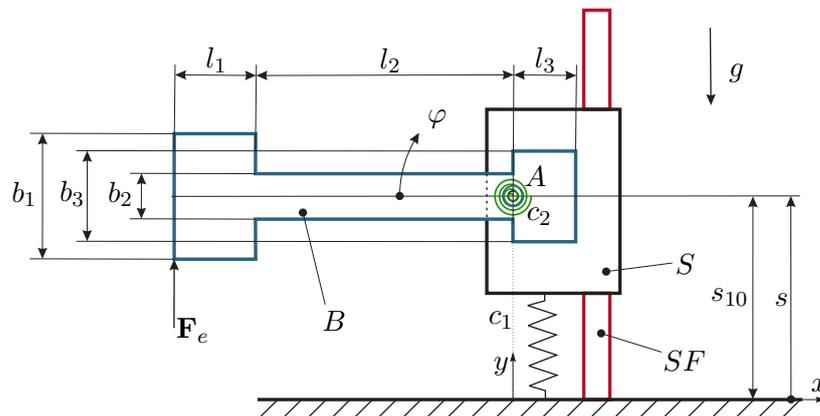


Abbildung B.22: Elastisch gelagerter Ausleger.

Für dieses System sollen die Bewegungsgleichungen mithilfe der Euler-Lagrange Gleichungen (2.196) ermittelt werden.

**Lösung von Aufgabe B.14.** Um die Euler-Lagrange Gleichungen aufzustellen, muss die Lagrange-Funktion  $L = T - V$  mit der kinetischen Energie  $T$  und der potentiellen Energie  $V$  bestimmt werden. Die generalisierten Koordinaten (Freiheitsgrade) sind durch  $\mathbf{q}^T = [s \quad \varphi]$  gegeben.

Im ersten Schritt wird die potentielle Energie  $V = V_g + V_f$  ermittelt. Diese setzt sich aus der potentiellen Energie  $V_g$  zufolge der Gravitation und der potentiellen Energie  $V_f$ , welche in den beiden Federn gespeichert ist, zusammen.

Die für Berechnungen der Energien benötigte Masse  $m_B$  des Balkens  $B$  ergibt sich

aus (2.51) zu

$$m_B = \int_{\mathcal{V}} \rho \, dV = \rho d(b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3). \quad (\text{B.163})$$

Der Schwerpunkt des Balkens  $B$  liegt aufgrund der konstanten Dicke  $d$ , der homogenen Dichte  $\rho$  sowie der vertikalen Symmetrie für  $\varphi = 0$  auf der horizontalen Linie durch das Lager  $A$ . Den Abstand  $l_s$  des Schwerpunktes des Balkens  $B$  von der Gelenkachse  $A$  erhält man nach (2.56) zu

$$l_s = \frac{b_1 l_1 \left( \frac{l_1}{2} + l_2 \right) + \frac{b_2 l_2^2}{2} - \frac{b_3 l_3^2}{2}}{b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3}. \quad (\text{B.164})$$

Somit ergibt sich der Vektor  $\mathbf{r}_{Bs}$  zum Schwerpunkt des Balkens als Funktion der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}^T = [s, \varphi]$  zu

$$\mathbf{r}_{Bs} = \begin{bmatrix} -l_s \cos(\varphi) \\ s + l_s \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.165})$$

Mit diesen Ergebnissen kann die potentielle Energie zufolge der Gravitation mit dem Bezugsniveau  $y = 0$  für den Balken zu

$$V_{B,g} = gm_B(s + l_s \sin(\varphi)) \quad (\text{B.166})$$

sowie des Schlittens  $S$  zu

$$V_{S,g} = gm_S s \quad (\text{B.167})$$

errechnet werden.

Da die Federn in diesem Beispiel als linear definiert wurden, d.h.  $c_1 = \text{konst.}$  und  $c_2 = \text{konst.}$ , ist deren potentielle Energie nach (2.91) durch

$$V_{c1} = \frac{1}{2} c_1 (s - s_{10})^2 \quad (\text{B.168a})$$

$$V_{c2} = \frac{1}{2} c_2 \varphi^2 \quad (\text{B.168b})$$

bestimmt. Die gesamte potentielle Energie beträgt schließlich

$$V = V_{B,g} + V_{S,g} + V_{c1} + V_{c2}. \quad (\text{B.169})$$

Die kinetische Energie  $T = T_S + T_{B,t} + T_{B,r}$  setzt sich aus der translatorischen kinetischen Energie des Schlittens  $T_S$ , der translatorischen kinetischen Energie des Balkens  $T_{B,t}$ , sowie der rotatorischen kinetischen Energie des Balkens  $T_{B,r}$  zusammen. Nach (2.80) folgt die translatorische kinetische Energie des Schlittens zu

$$T_S = \frac{1}{2} m_S \dot{s}^2 \quad (\text{B.170})$$

und die des Balkens zu

$$T_{B,t} = \frac{1}{2} m_B \dot{\mathbf{r}}_{Bs}^T \dot{\mathbf{r}}_{Bs} = \frac{1}{2} m_B (\dot{\varphi}^2 l_s^2 + \dot{s}^2 + 2l_s \dot{\varphi} \dot{s} \cos(\varphi)) . \quad (\text{B.171})$$

Das Trägheitsmoment  $\theta_{B,zz}^{(S)}$  des Balkens  $B$  ist um eine durch den Schwerpunkt gehenden Achse definiert. Mit (2.160) erhält man damit für den rotatorischen Anteil der kinetischen Energie des Balkens

$$T_{B,r} = \frac{1}{2} \theta_{B,zz}^{(S)} \dot{\varphi}^2 . \quad (\text{B.172})$$

Mit diesen Ergebnissen ist die Lagrange-Funktion  $L = T - V$  komplett bestimmt.

Nun fehlt noch der Vektor der generalisierten Kräfte  $\mathbf{f}_q^T = [f_{q,s} \quad f_{q,\varphi}]$ , welche sich aus der Wirkung der externen Kraft  $\mathbf{f}_e$  und den dissipativen Kräften zusammensetzt. Die externe Kraft kann in der Form

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} F \sin(\varphi) \\ F \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (\text{B.173})$$

dargestellt werden und der Vektor  $\mathbf{r}_f$  zum Angriffspunkt der externen Kraft  $\mathbf{f}_e$  ergibt sich zu

$$\mathbf{r}_f = \begin{bmatrix} -(l_1 + l_2) \cos(\varphi) - \frac{b_1}{2} \sin(\varphi) \\ s + (l_1 + l_2) \sin(\varphi) - \frac{b_1}{2} \cos(\varphi) \end{bmatrix} . \quad (\text{B.174})$$

Die Beiträge zur generalisierten Kraft zufolge der externen Kraft  $\mathbf{f}_e$  errechnen sich aus (2.201) zu

$$f_{q,e,s} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial s} \right)^T \mathbf{f}_e = F \cos(\varphi) \quad (\text{B.175a})$$

$$f_{q,e,\varphi} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \varphi} \right)^T \mathbf{f}_e = F(l_1 + l_2) . \quad (\text{B.175b})$$

Da die Reibung geschwindigkeitsproportional mit konstanten Reibungsparametern angenommen wird, erhält man den Anteil der generalisierten Kraft zufolge der Reibungskräfte bzw. -momente zu

$$f_{q,d,s} = -d_1 \dot{s} \quad (\text{B.176a})$$

$$f_{q,d,\varphi} = -d_2 \dot{\varphi} . \quad (\text{B.176b})$$

In Summe ergibt sich der Vektor der generalisierten Kraft zu

$$f_{q,s} = f_{q,e,s} + f_{q,d,s} \quad (\text{B.177a})$$

$$f_{q,\varphi} = f_{q,e,\varphi} + f_{q,d,\varphi} . \quad (\text{B.177b})$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen (2.196) für das drehbar gelagerte Starrkörpersystem aus Abbildung B.22 lauten daher

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = f_{q,s} \quad (\text{B.178a})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = f_{q,\varphi} . \quad (\text{B.178b})$$

Auf eine Darstellung der Auswertung von (B.178) wird hier verzichtet, da diese sehr umfangreich ist. Zur Kontrolle empfiehlt es sich, die obigen Gleichungen mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms wie Maple zu berechnen.

*Aufgabe B.15 (Flachdach).*

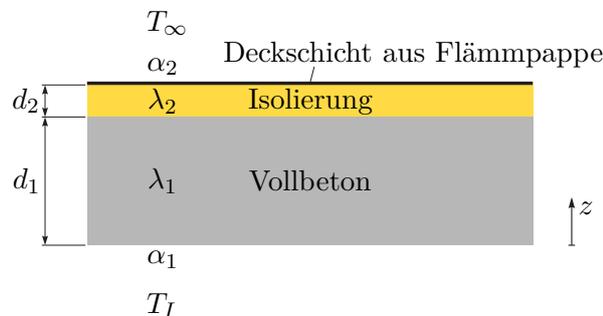


Abbildung B.23: Flachdach.

Bei Ihrem neu gebauten Haus haben Sie sich für ein Flachdach mit Sichtbetondecke entschieden. Wie in Abbildung B.23 angedeutet besteht das Flachdach aus einer  $d_1 = 0.2 \text{ m}$  dicken Vollbetondecke (Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_1 = 2 \text{ W}/(\text{m K})$ ), einer  $d_2 = 0.05 \text{ m}$  dicken Isolierschicht (Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_2 = 0.5 \text{ W}/(\text{m K})$ ) und einer Deckschicht aus Dachpappe, welche aufgrund ihrer geringen Dicke für die Berechnung des Wärmedurchganges vernachlässigt werden kann. Innenseitig erfolgt zwischen der Raumluft mit der Temperatur  $T_I$  und der Betondecke ein konvektiver Wärmeaustausch mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_1 = 5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ . Außenseitig erfolgt zwischen der Umgebungsluft mit der Temperatur  $T_\infty$  und der Deckschicht ein konvektiver Wärmeaustausch mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_2 = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ . Der Wärmeaustausch durch thermische Strahlung sei vernachlässigbar gering. Leider wurde nun die Deckschicht ihres Flachdachs undicht und es regnet ein. (Der Wassereintritt soll auf den Wärmedurchgang keinen Einfluss haben.)

1. Gehen Sie von einer Außentemperatur  $T_\infty = -5^\circ \text{C}$  aus. Auf welchen Wert  $T_I$  müssen Sie die Raumtemperatur einstellen, damit die Deckschicht gerade gefriert und so ein weiterer Wassereintritt verhindert wird? Welche Verlustleistung stellt sich je  $\text{m}^2$  Deckenfläche ein?

2. Ihre Heizungsregelung hält die Raumtemperatur konstant. Draußen kühlt es auf  $T_\infty = -15^\circ\text{C}$  ab und es beginnt zu schneien (Wärmeleitfähigkeit von Schnee  $\lambda_3 = 0.4 \text{ W}/(\text{m K})$ , Wärmeübergangskoeffizient zwischen Schneeoberfläche und Umgebungsluft  $\alpha_3 = 20 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ). Ab welcher Dicke der Schneeschicht müssen Sie wieder einen Wassereintritt befürchten?

*Lösung von Aufgabe B.15.* Es handelt sich um ein stationäres 1-dimensionales Wärmeleitproblem mit konvektiven Randbedingungen. Die Decke ist aus zwei Schichten mit jeweils homogener Wärmeleitfähigkeit aufgebaut.

1. Für die Wärmestromdichte folgt gemäß (3.87)

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \alpha_1(T_I - T(0)) = \frac{\lambda_1}{d_1}(T(0) - T(d_1)) \\ &= \frac{\lambda_2}{d_2}(T(d_1) - T(d_1 + d_2)) = \alpha_2(T(d_1 + d_2) - T_\infty),\end{aligned}\tag{B.179}$$

wobei das Wandtemperaturprofil mit  $T(z)$  bezeichnet wird. Die Deckschicht gefriert, wenn  $T(d_1 + d_2) = 0^\circ\text{C}$  gilt. Daraus folgt die Verlustleistung je  $\text{m}^2$  Deckenfläche

$$\dot{q} = \alpha_2(T(d_1 + d_2) - T_\infty) = 50 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.\tag{B.180}$$

Unter Verwendung von (B.179) führt dies auf die Innentemperatur

$$\begin{aligned}T_I &= T_I - T(0) + T(0) - T(d_1) + T(d_1) - T(d_1 + d_2) + T(d_1 + d_2) = \\ &= \frac{\dot{q}}{\alpha_1} + \frac{\dot{q}d_1}{\lambda_1} + \frac{\dot{q}d_2}{\lambda_2} + T(d_1 + d_2) = 20^\circ\text{C}.\end{aligned}\tag{B.181}$$

2. Die Wärmestromdichte muss weiterhin den Wert  $\dot{q} = 50 \text{ W}/\text{m}^2$  gemäß (B.180) haben, da sich unterhalb der Deckschicht nichts ändert. Es wird von einem idealen Wärmeübergang zwischen Deckschicht und Schnee ausgegangen. Für die Wärmestromdichte durch die Schneeschicht mit der unbekanntem Dicke  $d_3$  gilt analog zu (3.89)

$$\dot{q} = \frac{T(d_1 + d_2) - T_\infty}{\frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_3}}.\tag{B.182}$$

Mit  $T(d_1 + d_2) = 0^\circ\text{C}$  und  $T_\infty = -15^\circ\text{C}$  folgt daraus die Dicke der Schneeschicht

$$d_3 = \lambda_3 \left( \frac{T(d_1 + d_2) - T_\infty}{\dot{q}} - \frac{1}{\alpha_3} \right) = 0.1 \text{ m}.\tag{B.183}$$

*Aufgabe B.16 (Abkühlen eines Zylinders).* In Abbildung B.24 ist der Querschnitt eines zylindrischen Festkörpers mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = 0.1 \text{ W}/(\text{m K})$ , dem Radius  $R = 0.2 \text{ m}$ , dem aktuellen Temperaturfeld  $T(t, x, y, z)$  und der homogen

verteilten aktuellen Oberflächentemperatur  $T_S = 50^\circ\text{C}$  skizziert. Zwischen dem Zylinder und dem umgebenden Fluid mit der Temperatur  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$  kommt es über die Mantelfläche ausschließlich zu konvektivem Wärmeaustausch mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha = 5\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$ . An den Stirnflächen des Zylinders treten adiabate Randbedingungen auf.

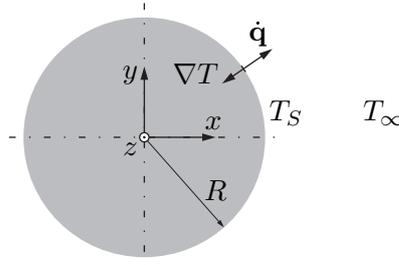


Abbildung B.24: Zylinder.

Für die Mantelfläche des Zylinders sollen die aktuelle Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}$  und der aktuelle Temperaturgradient  $\nabla T$  berechnet werden. Wie groß ist der aktuell pro Einheitslänge des Zylinders über dessen Mantelfläche abgegebene Wärmestrom  $\dot{q}^\circ$ ? Wie ändert sich der Temperaturgradient qualitativ im Laufe der Zeit, wenn die Anfangstemperatur des Zylinders homogen war?

*Lösung von Aufgabe B.16.* Da die Oberflächentemperatur  $T_S$  aktuell homogen ist, müssen  $\nabla T$  und  $\dot{\mathbf{q}}$  an der Mantelfläche stets normal auf diese stehen. Zuzufolge der konvektiven Randbedingung ergibt sich aus (3.23) die Wärmestromdichte

$$\dot{\mathbf{q}}(t, R \cos(\varphi), R \sin(\varphi), z) = \alpha(T_S - T_\infty)\mathbf{e}_r = 150\text{ W}/\text{m}^2 \mathbf{e}_r \quad (\text{B.184})$$

mit dem nach außen gerichteten Einheitsvektor  $\mathbf{e}_r = [\cos(\varphi) \quad \sin(\varphi) \quad 0]^T$  gemäß Abbildung 3.2a. Mit dem Fourierschen Wärmeleitgesetz führt dies auf den Gradientenvektor

$$\nabla T(t, R \cos(\varphi), R \sin(\varphi), z) = -\frac{\dot{\mathbf{q}}}{\lambda} = -\frac{\alpha(T_S - T_\infty)}{\lambda}\mathbf{e}_r = -1500\text{ K}/\text{m} \mathbf{e}_r . \quad (\text{B.185})$$

Um den pro Einheitslänge des Zylinders über die Mantelfläche abgegebenen Wärmestrom  $\dot{q}^\circ$  zu berechnen, wird  $\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}_r$  (vgl. (A.11)) über den Umfang integriert.

$$\dot{q}^\circ = \int_0^{2\pi} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}_r R \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \alpha(T_S - T_\infty)R \, d\varphi = \alpha(T_S - T_\infty)R2\pi = 60\pi\text{ W}/\text{m} . \quad (\text{B.186})$$

Durch den Abkühlvorgang sinkt die Oberflächentemperatur des Zylinders im Laufe der Zeit. Folglich nimmt auch die Amplitude des Temperaturgradienten  $\nabla T$

an der Mantelfläche ab. Nachdem der Zylinder vollständig abgekühlt ist (theoretisch erst nach unendlich langer Zeit), gilt  $\dot{\mathbf{q}}(t, R \cos(\varphi), R \sin(\varphi), z) = \mathbf{0} \text{ W/m}^2$  und  $\nabla T(t, R \cos(\varphi), R \sin(\varphi), z) = \mathbf{0} \text{ K/m}$ .

**Aufgabe B.17 (Elektronisches Bauteil).** Ein elektronisches Bauteil mit der Höhe  $h$  ist wie in Abbildung B.25 skizziert auf der Oberfläche einer Platine angebracht. Betrachtet wird der stationäre Zustand. Während des Betriebes wird die konstante volumetrische Verlustleistung  $g_0$  (Einheit  $\text{W/m}^3$ ) homogen im gesamten Inneren des Bauteils frei. Die homogene Wärmeleitfähigkeit des Bauteils ist mit  $\lambda$  gegeben. Über die Bodenfläche (Kontakttrandbedingung) wird an die Platine die konstante Wärmestromdichte  $\dot{q}_b$  abgeführt. An der Deckfläche tritt nur konvektive Wärmeübertragung mit dem homogenen Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  auf. Die in einiger Entfernung der Platine vorherrschende ungestörte Umgebungstemperatur sei  $T_\infty$ .

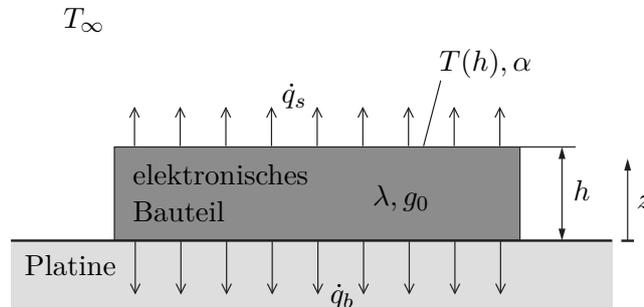


Abbildung B.25: Elektronisches Bauteil auf Platine.

Es wird angenommen, dass die Temperaturverteilung im Bauteil homogen in Breiten- und Tiefenrichtung ist, und somit nur von der Koordinate  $z$  abhängt. Ein allfälliger Wärmeaustausch über die Seitenflächen des Bauteils sei vernachlässigbar klein.

Berechnen Sie die aus der Oberfläche  $z = h$  austretende Wärmestromdichte  $\dot{q}_s$  und in weiter Folge die dort herrschende Oberflächentemperatur  $T(h)$  des Bauteils. Berechnen Sie die Temperaturverteilung  $T(z)$  im Bauteil.

**Lösung von Aufgabe B.17.** Aufgrund der angegebenen Randbedingungen (Seitenflächen adiabatisch, homogene Verhältnisse an der Bodenfläche, homogene Verhältnisse an der Deckfläche) sind alle Größen im Bauteil homogen in Breiten- und Tiefenrichtung. Folglich handelt es sich um ein 1-dimensionales Wärmeleitproblem (in Richtung  $z$ ) für die unbekannte Temperaturverteilung  $T(z)$ . Als Kontrollvolumen kann das gesamte Bauteil verwendet werden. Wir nehmen an, dass dieses Bauteil die Grundfläche  $A$  besitzt (welche sich im Zuge der Rechnung zwangsläufig wegkürzen muss).

Aus der Energieerhaltung für ein geschlossenes System (A.10) erhält man im

stationären Fall

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \dot{Q} + P_{el} . \quad (\text{B.187})$$

Eine allfällige mechanische Leistung ist nicht zu berücksichtigen ( $P_{me} = 0$ ), da es sich um einen inkompressiblen Bauteil handelt.  $\dot{Q}$  ergibt sich aus den Wärmestromdichten an der Boden- und Deckfläche in der Form

$$\dot{Q} = -A\dot{q}_b - A\dot{q}_s . \quad (\text{B.188})$$

Hier sind beide Vorzeichen negativ, da  $\dot{Q}$  bei einem Wärmeeintrag in das Kontrollvolumen positiv gezählt wird. Die gesamte elektrische Verlustleistung ergibt sich in der Form

$$P_{el} = Ahg_0 . \quad (\text{B.189})$$

Einsetzen in (B.187) und Umformen nach  $\dot{q}_s$  liefert

$$\dot{q}_s = g_0h - \dot{q}_b . \quad (\text{B.190})$$

Da an der Deckfläche ausschließlich Konvektion auftritt, gilt

$$\dot{q}_s = \alpha(T(h) - T_\infty) , \quad (\text{B.191})$$

woraus

$$T(h) = T_\infty + \frac{\dot{q}_s}{\alpha} = T_\infty + \frac{g_0h - \dot{q}_b}{\alpha} \quad (\text{B.192})$$

folgt.

Zur Berechnung der Temperaturverteilung  $T(z)$  wird zunächst basierend auf (3.5) die stationäre 1-dimensionale Wärmeleitgleichung

$$0 = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + g_0 \quad (\text{B.193})$$

angeschrieben. Am Rand  $z = 0$  folgt die Randbedingung

$$\dot{q}_b = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} . \quad (\text{B.194})$$

Am Rand  $z = h$  kann (B.192) als Dirichletsche Randbedingung verwendet werden. Zweifache Integration von (B.193) liefert

$$T(z) = C_0 + C_1z - \frac{g_0z^2}{2\lambda} \quad (\text{B.195})$$

mit den noch zu bestimmenden Integrationskonstanten  $C_0$  und  $C_1$ . Aus der Randbedingung (B.194) folgt

$$C_1 = \frac{\dot{q}_b}{\lambda} \quad (\text{B.196})$$

und damit weiters aus (B.195) und (B.192)

$$C_0 = T(h) + \frac{g_0 h^2}{2\lambda} - \frac{\dot{q}_b h}{\lambda} = T_\infty + \frac{g_0 h - \dot{q}_b}{\alpha} + \frac{g_0 h^2}{2\lambda} - \frac{\dot{q}_b h}{\lambda} . \quad (\text{B.197})$$

Rückeinsetzen in (B.195) liefert die gesuchte Temperaturverteilung

$$T(z) = T_\infty + \frac{g_0 h - \dot{q}_b}{\alpha} + \frac{g_0}{2\lambda}(h^2 - z^2) + \frac{\dot{q}_b}{\lambda}(z - h) . \quad (\text{B.198})$$

**Aufgabe B.18 (Elektrisches Kabel).** In Abbildung B.26 ist ein elektrisches Kabel bestehend aus einem elektrischen Leiter und einer Isolierung dargestellt.

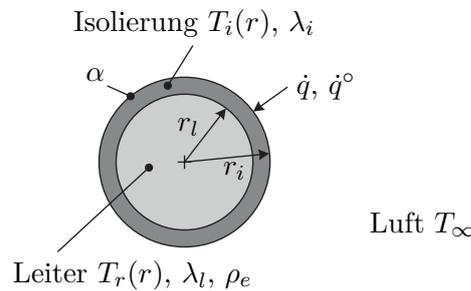


Abbildung B.26: Elektrisches Kabel bestehend aus einem Leiter und einer Isolation.

Durch den Leiter fließt der Strom  $I$  und erzeugt dadurch Wärme (ohmsche Wärmequelle). Das Kabel hängt frei in der Luft, welche eine konstante Temperatur  $T_\infty$  aufweist. Zwischen der Isolierung und ihrer Umgebung findet ein Wärmeaustausch statt. Die nach innen positiv gezählte Wärmestromdichte an der Oberfläche der Isolierung sei  $\dot{q}$ .

Der elektrische Leiter hat den Radius  $r_l$ , die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_l$  und den spezifischen ohmschen Widerstand  $\rho_e$ . Die Temperatur im Leiter wird mit  $T_l(r)$  bezeichnet. Die Isolierung hat den Außenradius  $r_i$  und die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_i$ . Die Temperatur in der Isolierung wird mit  $T_i(r)$  bezeichnet. Zwischen der Isolierung und dem Leiter herrscht ein idealer Wärmeübergang, d. h.  $T_l(r_l) = T_i(r_l)$ . Alle Materialparameter sind konstant und die Länge des Kabels ist sehr viel größer als die Querschnittsabmessungen  $r_l$  und  $r_i$ .

Gesucht ist der stationäre radiale Temperaturverlauf im Kabel. Wie muss der Außenradius  $r_i$  der Isolierung gewählt werden, um eine minimale Kerntemperatur  $T_l(0)$  zu erreichen?

**Lösung von Aufgabe B.18.** Aufgrund der Rotationssymmetrie und der großen Länge des Kabels kann das stationäre Temperaturfeld im Leiter, d. h. im Bereich  $r \in [0, r_l]$ , aus der stationären Form

$$0 = \lambda_l \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} T_l(r) \right) + g \quad (\text{B.199a})$$

der Wärmeleitgleichung (3.5b) in Zylinderkoordinaten berechnet werden. Hierbei ist  $g$  die homogene volumetrische Ohmsche Wärmequelle. Als Randbedingung bei  $r = 0$  folgt aus dem Fourierschen Gesetz (3.1)

$$\left. \frac{d}{dr} T_l(r) \right|_{r=0} = 0. \quad (\text{B.199b})$$

Eine zweite Randbedingung ist mit

$$T_l(r_l) = T_i(r_l) \quad (\text{B.199c})$$

gegeben. Für die Isolierung im Bereich  $r \in (r_l, r_i]$  gilt analog

$$0 = \lambda_i \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} T_i(r) \right), \quad (\text{B.200a})$$

wobei es hier keine Wärmequelle gibt. An der Oberfläche tauscht das isolierte Kabel Energie mit der Umgebung aus. Mit dem Fourierschen Gesetz folgt an dieser Stelle

$$\left. \frac{d}{dr} T_i(r) \right|_{r=r_i} = \frac{\dot{q}}{\lambda_i}. \quad (\text{B.200b})$$

Im nächsten Schritt sollen die Lösungen obiger Differenzialgleichungen bestimmt werden. Durch Umformen und Integration von (B.199a) folgt

$$\frac{d}{dr} T_l(r) = -g \frac{r}{2\lambda_l} + \frac{C_1}{r} \quad (\text{B.201})$$

mit der Integrationskonstante  $C_1$ . Sie muss gemäß der Randbedingung (B.199b) den Wert  $C_1 = 0$  haben. Durch erneute Integration und Einführung der Kontakttemperatur  $T_k = T_l(r_l)$  folgt das Temperaturprofil im Leiter zu

$$T_l(r) = T_k + g \frac{r_l^2 - r^2}{4\lambda_l}. \quad (\text{B.202})$$

Für die volumetrische Wärmequelle gilt gemäß (3.77)

$$g = \rho_e \|\mathbf{J}\|_2^2 = \rho_e \left( \frac{I}{r_l^2 \pi} \right)^2, \quad (\text{B.203})$$

wobei  $\mathbf{J}$  der Stromdichtevektor ist. Für die auf die Kabellänge bezogene erzeugte Wärme (dissipierte Leistung je Einheitslänge) ergibt sich daher

$$g r_l^2 \pi = \rho_e \frac{I^2}{r_l^2 \pi}. \quad (\text{B.204})$$

Für die Isolierung folgt durch zweifache Integration von (B.200a) und Einsetzen der Randbedingungen  $T_k = T_i(r_l)$  und  $T_o = T_i(r_i)$  das stationäre Temperaturprofil

$$T_i(r) = T_k + (T_o - T_k) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_l}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_l}\right)}. \quad (\text{B.205})$$

Die durch die Ohmschen Verluste eingebrachte Wärme gemäß (B.204) muss im stationären Fall vollständig über die Mantelfläche des Kabels abgeführt werden. Folglich gilt für den auf die Kabellänge bezogenen konvektiven Wärmestrom  $\dot{q}^\circ$  an der Oberfläche der Isolierung

$$-\rho_e \frac{I^2}{r_l^2 \pi} = \dot{q}^\circ = \dot{q} 2\pi r_i = \alpha (T_\infty - T_o) 2\pi r_i. \quad (\text{B.206})$$

Daraus kann mit (B.204) die Oberflächentemperatur

$$T_o = T_\infty + \frac{\rho_e I^2}{\alpha 2r_i r_l^2 \pi^2} \quad (\text{B.207})$$

berechnet werden. Weiters muss das Fouriersche Gesetz auch an der Kontaktfläche  $r = r_l$  gelten, d. h.

$$\lambda_i \frac{d}{dr} T_i(r) \Big|_{r=r_l} = \frac{\dot{q}^\circ}{2\pi r_l}. \quad (\text{B.208})$$

Einsetzen von (B.205) in (B.208) liefert unter Berücksichtigung von (B.204) und (B.207) den Zusammenhang

$$T_k = T_\infty + \frac{\rho_e I^2}{2r_l^2 \pi^2} \left( \frac{1}{\alpha r_i} + \frac{\ln\left(\frac{r_i}{r_l}\right)}{\lambda_i} \right). \quad (\text{B.209})$$

Nun kann mit (B.202) und (B.203) die Kerntemperatur des Leiters

$$T_l(0) = T_\infty + \frac{\rho_e I^2}{2r_l^2 \pi^2} \left( \frac{1}{\alpha r_i} + \frac{\ln\left(\frac{r_i}{r_l}\right)}{\lambda_i} + \frac{1}{2\lambda_l} \right) \quad (\text{B.210})$$

angegeben werden. In Abbildung B.27 ist ein exemplarischer Temperaturverlauf im Kabel gezeigt.

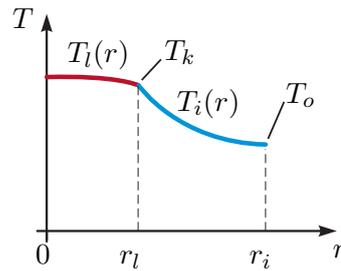


Abbildung B.27: Temperaturverlauf im Kabel.

Die Kerntemperatur wird vom Radius der Isolierung  $r_i$  wie folgt beeinflusst: Für größeres  $r_i$  steigt die abgegebene Wärme durch Konvektion wegen der größer werdenden Oberfläche. Es sinkt jedoch der Wärmestrom aufgrund der Wärmeleitung mit größerer Dicke der Isolierung. Es kann also eine Extremwertaufgabe formuliert werden und der optimale Radius  $r_i^*$  der Isolierung folgt aus

$$\frac{d}{dr_i} T_l(0) = 0 \quad (\text{B.211})$$

in der Form

$$r_i^* = \frac{\lambda_i}{\alpha}. \quad (\text{B.212})$$

**Aufgabe B.19 (Platte mit erzwungener Konvektion).** Es soll die konvektive Wärmeübertragung an einer längs angeströmten Platte mit konstanter Oberflächentemperatur (vgl. Abbildung 3.3) diskutiert und anhand von exemplarischen Parametern durchgerechnet werden.

Das strömende Fluid (Luft) habe dabei die konstante Temperatur  $T_\infty$ . Die konstante Strömungsgeschwindigkeit vor der Platte sei  $u_\infty = 5 \text{ m/s}$ . Die Stoffwerte von Luft seien konstant und bekannt (siehe Tabelle B.1).

Parameter	Wert
Wärmeleitfähigkeit $\lambda$	0.026 W/(m K)
Dichte $\rho$	1.18 kg/m <sup>3</sup>
Kinematische Viskosität $\nu$	15.424 · 10 <sup>-6</sup> m/s
Spezifische Wärmekapazität $c_p$	1005 J/(kg K)
Kritische Reynolds-Zahl $Re_c$	3.2 · 10 <sup>5</sup>

Tabelle B.1: Stoffwerte des Fluids (Luft).

Gesucht:

1. Wie groß ist die Prandtl-Zahl  $Pr$  des Fluids? Ist die termische Grenzschicht

- $\delta_T(x)$  oder die Strömungsgrenzschicht  $\delta_u(x)$  dicker?
- Wie lange darf die überströmte Platte maximal sein, damit sich keine turbulenten Strömungen ausbilden?
  - Bestimmen Sie den lokalen Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_x$  an den Stellen  $x_1 = 1 \text{ cm}$  und  $x_2 = 60 \text{ cm}$ . Wie erklären Sie den Unterschied der beiden Koeffizienten?
  - Sie kennen nun den genauen Verlauf des lokalen Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_x$  im Bereich laminarer Strömung. Wie lautet die Berechnungsvorschrift für einen mittleren Wärmeübergangskoeffizienten? Berechnen Sie den mittleren Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  für eine Plattenlänge  $L$  von 60 cm.
  - Welche Dicken haben die thermische Grenzschicht  $\delta_T(x)$  und die Strömungsgrenzschicht  $\delta_u(x)$  bei  $x_2 = 60 \text{ cm}$ ?

*Lösung von Aufgabe B.19.*

- Die Temperaturleitfähigkeit  $a$  und die Prandtl-Zahl  $\text{Pr}$  errechnen sich mit den Beziehungen (3.6) und (3.14) zu

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (\text{B.213a})$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}, \quad \text{Pr} = 696.52 \cdot 10^{-9}. \quad (\text{B.213b})$$

Aus (3.15) folgt damit, dass die Strömungsgrenzschicht  $\delta_u(x)$  immer dünner ist als die thermische Grenzschicht  $\delta_T(x)$ .

- Mit der kritischen Reynoldszahl  $\text{Re}_c$  und der konstanten Strömungsgeschwindigkeit  $u_\infty$  laut Tabelle B.1 und (3.11) ergibt sich die kritische Länge  $x_c$  zu

$$x_c = \text{Re}_c \frac{\nu}{u_\infty} = 0.987 \text{ m}. \quad (\text{B.214})$$

- Aus (3.18) folgt

$$\alpha_x = \text{Nu}_x \frac{\lambda}{x} \quad (\text{B.215})$$

da sowohl  $x_1$  und  $x_2$  kleiner als  $x_c$  sind, kann zur Berechnung der Nußelt Zahl  $\text{Nu}_x$  die semiempirische Formulierung (3.19) verwendet werden. Es folgt

$$\alpha_{x_1} = 69.23 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \quad (\text{B.216a})$$

und

$$\alpha_{x_2} = 8.94 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}. \quad (\text{B.216b})$$

Da die thermische Grenzschicht mit zunehmendem  $x$  dicker wird und der Wärmeübergangskoeffizient in Bereichen laminarer Strömung die Proportionalität  $\alpha_x \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$  aufweist, erscheint das Ergebnis (B.216) sinnvoll. Der Zusammenhang  $\alpha_x \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$  ergibt sich, wenn (3.18) nach  $\alpha_x$  umgeformt wird und die beiden Gleichungen (3.19) und (3.11) eingesetzt werden.

4. Aus (3.23)

$$\dot{q} = \frac{1}{L} \int_0^L \dot{q}_x \, dx = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_x \, dx (T_p - T_\infty) = \alpha (T_p - T_\infty) \quad (\text{B.217})$$

folgt

$$\alpha = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_x \, dx . \quad (\text{B.218})$$

Der Integrand  $\alpha_x$  ist für den laminaren Bereich durch

$$\alpha_x = \text{Nu}_x \frac{\lambda}{x} = \sqrt{\text{Re}_x} \varphi(\text{Pr}) \frac{\lambda}{x} = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \varphi(\text{Pr}) \lambda \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (\text{B.219})$$

gegeben und der gemittelte Wärmeübertragungskoeffizient (B.218) lautet

$$\alpha = 2 \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \varphi(\text{Pr}) \lambda \sqrt{L} . \quad (\text{B.220})$$

Für eine Plattenlänge  $L = 60 \text{ cm}$  folgt durch numerische Auswertung der gemittelte Wärmeübertragungskoeffizient

$$\alpha = 10.725 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} . \quad (\text{B.221})$$

5. Mit der Näherung (3.13) und der Beziehung (3.15) folgen die Dicken der beiden Grenzschichten bei  $x_2 = 60 \text{ cm}$  zu

$$\delta_u(x_2) = 6.8 \text{ mm} \quad (\text{B.222a})$$

$$\delta_T(x_2) = 7.6 \text{ mm} . \quad (\text{B.222b})$$

Wie es sein muss steht dies mit dem Ergebnis aus Unterpunkt 1 im Einklang.

**Aufgabe B.20 (Temperaturmessung in einem Lüftungsrohr).** Sie wollen die Lufttemperatur ( $T_\infty$ ) in einem Lüftungsrohr messen. Dazu installieren Sie ein Thermometer ( $th$ ) mittig im Rohr. Um eine möglichst genaue Messung zu erhalten sollen die Wärmeübertragung durch thermische Strahlung zwischen Thermometer und Rohrwand ( $w$ ) berücksichtigt und die Messung entsprechend korrigiert werden.

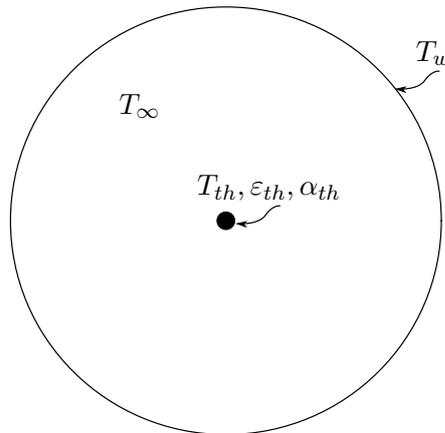


Abbildung B.28: Temperaturmessung in einem Lüftungsrohr.

**Annahmen:**

Das Thermometer wird als vernachlässigbar klein im Vergleich zur Umgebung (Rohr) und als konvexer Körper angenommen. D. h. das Thermometer beeinflusst die Strahlungsverhältnisse im Rohr nicht. Weiters seien die Wandtemperatur  $T_w$ , die Emissivität der Thermometeroberfläche  $\varepsilon_{th}$  sowie der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Luft und Thermometer  $\alpha_{th}$  bekannt und konstant. Sowohl Wand als auch Thermometer werden als diffuse, graue Strahler behandelt. Die Gasstrahlung in der Luft wird vernachlässigt.

Die Größen  $T_w$ ,  $T_{th}$ ,  $\varepsilon_{th}$  und  $\alpha_{th}$  sind bekannt. Die Lufttemperatur  $T_\infty$  ist gesucht. Es sind dazu folgende Punkte zu bearbeiten.

1. Stellen Sie die Sichtfaktormatrix für die gegebene Geometrie unter Berücksichtigung der getroffenen Annahmen auf.
2. Berechnen Sie die Nettowärmestromdichte  $\dot{q}_{th,s}$  welche das Thermometer zufolge von thermischer Strahlung verlässt in Abhängigkeit der Temperaturen  $T_w$  und  $T_{th}$  für allgemeine Werte  $\varepsilon_w > 0$  und  $\varepsilon_{th}$ .
3. Geben Sie die Gleichung zur Berechnung der Lufttemperatur  $T_\infty$  unter der Annahme stationärer Bedingungen an. Bestimmen Sie die Lufttemperatur  $T_\infty$  für  $T_w = 20^\circ\text{C}$ ,  $\varepsilon_{th} = 0.9$ ,  $T_{th} = 3^\circ\text{C}$ .
4. Wie kann das Messsystem verändert werden um den für die Messung störenden Einfluss der Wärmeübertragung durch thermische Strahlung zu verringern.

**Lösung von Aufgabe B.20.**

1. Da die einzigen strahlenden Körper die Wand ( $w$ ) und das Thermometer ( $th$ )

sind, hat die Sichtfaktormatrix  $\mathbf{F}$  die Dimension  $2 \times 2$ .

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{w,w} & F_{w,th} \\ F_{th,w} & F_{th,th} \end{bmatrix} \quad (\text{B.223})$$

Durch die geschlossene Wandfläche ist ein abgeschlossener Strahlungsraum gegeben, was die Anwendung der Summationsregel erlaubt.

Die erste Annahme besagt, dass die Abmessungen des Thermometers verschwindend sind. Daraus folgt zwangsläufig

$$F_{w,th} = 0 . \quad (\text{B.224})$$

Mit der Summationsregel (3.48) ergibt sich folglich

$$F_{w,w} = 1 . \quad (\text{B.225})$$

Das Thermometer ist ein konvexer Körper, weshalb

$$F_{th,th} = 0 \quad (\text{B.226})$$

gilt. Mit der Summationsregel folgt daraus noch

$$F_{th,w} = 1 . \quad (\text{B.227})$$

Die vollständige Sichtfaktormatrix (B.223) lautet damit

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \quad (\text{B.228})$$

2. Es werden nun die Nettowärmestromdichten zufolge thermischer Strahlung

gemäß (3.52) berechnet. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \dot{q}_w \\ \dot{q}_{th,s} \end{bmatrix} = (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\})\mathbf{F})^{-1} \text{diag}\{\varepsilon\}\sigma\mathbf{T}^4 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon_w & 0 \\ 0 & 1 - \varepsilon_{th} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_w & 0 \\ 0 & \varepsilon_{th} \end{bmatrix} \sigma \begin{bmatrix} T_w^4 \\ T_{th}^4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_w & 0 \\ \varepsilon_{th} - 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{= \frac{1}{\varepsilon_w} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \varepsilon_{th} & \varepsilon_w \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \varepsilon_w & 0 \\ 0 & \varepsilon_{th} \end{bmatrix} \sigma \begin{bmatrix} T_w^4 \\ T_{th}^4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{th}\sigma(T_{th}^4 - T_w^4) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{B.229}$$

Hierbei ist  $\dot{q}_w$  die Nettowärmestromdichte, welche die Wand zufolge von thermischer Strahlung abgibt. Auffällig sind hier der Wert  $\dot{q}_w = 0$  und die Unabhängigkeit der Lösung von  $\varepsilon_w$ . Da die Rohrwand ausschließlich mit sich selbst thermische Strahlung austauscht, muss für die Nettowärmestromdichte  $\dot{q}_w = 0$  gelten (die Ausstrahlung entspricht der Einstrahlung). Bei der Unabhängigkeit der Lösung von  $\varepsilon_w$  ist allerdings zu beachten, dass obige Rechnung nur für  $\varepsilon_w > 0$  gültig ist. Nur dann emittiert die Rohrwand tatsächlich thermische Strahlung.

3. Neben der thermischen Strahlung zwischen Thermometer und Rohrwand kommt es auch zu einer konvektiven Wärmeübertragung zwischen Thermometer und Luft. Mit dem Wärmeübertragungskoeffizienten  $\alpha_{th}$  ergibt sich für die konvektive Wärmestromdichte (vgl. (3.9c))

$$\dot{q}_{th,k} = \alpha_{th}(T_{th} - T_\infty). \tag{B.230}$$

Die Wärmestromdichte  $\dot{q}_{th,k}$  wurde hier vom Thermometer abgehend positiv angenommen, wie dies auch für die Wärmestromdichte  $\dot{q}_{th,s}$  zufolge von thermischer Strahlung gilt. Stationär muss

$$\dot{q}_{th,s} + \dot{q}_{th,k} = 0 \tag{B.231}$$

d. h.

$$\alpha_{th}(T_{th} - T_\infty) + \varepsilon_{th}\sigma(T_{th}^4 - T_w^4) = 0 \tag{B.232}$$

gelten. Daraus folgt die gesuchte Gleichung

$$T_{\infty} = T_{th} + \frac{\varepsilon_{th}\sigma}{\alpha_{th}}(T_{th}^4 - T_w^4). \quad (\text{B.233})$$

Mit den gegebenen Werten  $T_w = 20^\circ\text{C}$ ,  $\varepsilon_{th} = 0.9$  und  $T_{th} = 3^\circ\text{C}$  folgt  $T_{\infty} = 1.66^\circ\text{C}$ .

Dieses Ergebnis ist plausibel. Nachdem die Wand wesentlich wärmer als das Thermometer ist, wird dem Thermometer durch Strahlung Energie zugeführt. Damit diese Energie wieder durch Konvektion abgeführt wird, muss die Lufttemperatur  $T_{\infty}$  somit niedriger als die Temperatur  $T_{th}$  des Thermometers sein.

4. Aus Gleichung (B.233) folgt, dass für einen geringeren Strahlungseinfluss die Emissivität des Thermometers  $\varepsilon_{th}$  verringert oder der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_{th}$  erhöht werden muss. Ersteres kann durch geeignete Wahl des Materials für die Thermometeroberfläche (spiegelnde Oberfläche) erreicht werden. Um den Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_{th}$  zu erhöhen, kann die Umströmung des Thermometers verändert werden. Zum Beispiel könnte versucht werden turbulente Strömungsverhältnisse zu erzeugen (kleine Abmessungen des Thermometers, hohe Strömungsgeschwindigkeit des Fluides), da im turbulenten Bereich der Wärmeübergangskoeffizient höher als im laminaren Bereich ist (vgl. hierzu auch Abschnitt 3.2.1).

*Aufgabe B.21 (Sichtfaktorberechnung für einen Industrieofen).* Im Innenraum eines Industrieofens liegen drei lange Stahlblöcke  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$ . Die Situation ist in Abbildung B.29 dargestellt. Die Blöcke haben einen quadratischen Querschnitt mit der Seitenlänge  $a$  und liegen im Abstand  $a$  nebeneinander. Der innere Umfang  $U_4$  des Querschnitts der Ofenwand beträgt  $24a$ . Der Ofen wird so betrieben, dass die innere Wandoberfläche stets die konstante Temperatur  $T_4$  hat. Die Gasatmosphäre im Ofen ist für Wärmestrahlung durchlässig.

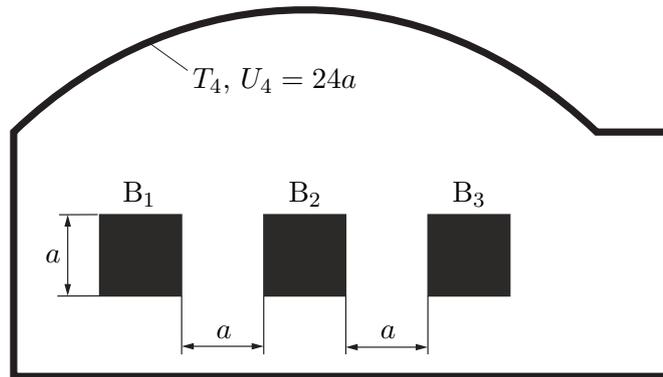


Abbildung B.29: Ofen mit drei Stahlblöcken.

Für die vorliegende Geometrie ist der Strahlungsaustausch zu modellieren. Dabei kann die Temperatur der einzelnen Körper und Oberflächen homogen angenommen werden. Weiters soll untersucht werden, ob die Stahlblöcke gleich schnell erwärmt werden, sofern sie gleiche Emissivität, Wärmekapazität und Anfangstemperatur  $T_0 < T_4$  haben. Der Wärmeaustausch durch Konvektion ist dabei zu vernachlässigen.

*Lösung von Aufgabe B.21.* Die Ofengeometrie wird aufgrund der Länge der Stahlblöcke nur im Querschnitt betrachtet, also zweidimensional. Der Strahlungsaustausch zwischen den Blöcken und der Ofenwand wird mit der Netto-Strahlungsmethode beschrieben.

Die Sichtfaktormatrix  $\mathbf{F}$  wird zunächst entlang der Hauptdiagonale für jede konvexe Fläche mit Null befüllt.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{B.234})$$

Zusätzlich ist die Sicht zwischen  $B_1$  und  $B_3$  durch  $B_2$  blockiert, sodass

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{B.235})$$

gilt.

Als nächstes soll  $F_{12}$  berechnet werden. Hierzu gibt es zwei Möglichkeiten:

- **Crossed-Strings Methode:** Da die Konturen von  $B_1$  und  $B_2$  jeweils geschlossene Kurven darstellen, wählt man zuerst einen (weitgehend beliebigen) Anfangs- bzw. Endpunkt für die jeweilige Kontur (siehe Abbildung B.30). Gemäß der Crossed-Strings Methode (siehe (3.73)) ergibt sich

$$F_{12} = \frac{(2a + \sqrt{2}a) + (4a + \sqrt{2}a) - 4a - 4a}{2 \times 4a} = \frac{2\sqrt{2}a - 2a}{8a} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4} . \quad (\text{B.236})$$

- **Aufteilung der Oberfläche:** Der Sichtfaktor  $F_{12}$  beschreibt den Teil  $J_{12}$  der Ausstrahlung  $J_1$ , welcher von  $B_1$  abgestrahlt wird und auf  $B_2$  auftrifft, d. h.

$$F_{12} = \frac{J_{12}}{J_1} . \quad (\text{B.237})$$

Nun wird, aufgrund der homogen angenommenen Oberflächentemperatur von  $B_1$ , gerade ein Viertel der gesamten Ausstrahlung  $J_1$  an der rechten Seitenfläche abgegeben. Es ist damit nur noch erforderlich, den Sichtfaktor zwischen rechter Seite von  $B_1$  und der Oberfläche von  $B_2$  zu berechnen. Gemäß der ersten Zeile von Tabelle 3.1 ergibt sich daher

$$F_{12} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2a} (2\sqrt{2}a - 2a) \right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{4} . \quad (\text{B.238})$$

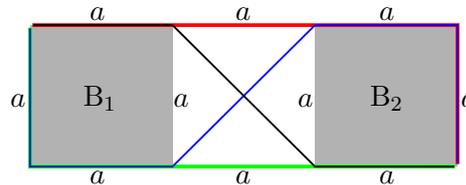


Abbildung B.30: Crossed Strings Methode für den Sichtfaktor  $F_{12}$ .

Da die geometrischen Beziehungen zwischen den Körpern  $B_1$  und  $B_2$  sowie  $B_2$  und  $B_3$  äquivalent und symmetrisch sind, gilt  $F_{12} = F_{21} = F_{23} = F_{32}$ . Für die Sichtfaktormatrix folgt damit

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F_{12} & 0 & \cdot \\ F_{12} & 0 & F_{12} & \cdot \\ 0 & F_{12} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} . \quad (\text{B.239})$$

Die übrigen Einträge können durch Anwenden der Sichtfaktoralgebra ergänzt werden, d. h. mithilfe der Summationsregel (3.48) und dem Reziprozitätsgesetz (3.46).

Aus (3.48) ergeben sich zunächst die Einträge  $F_{14}$ ,  $F_{24}$ ,  $F_{34}$  in der Form

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F_{12} & 0 & 1 - F_{12} \\ F_{12} & 0 & F_{12} & 1 - 2F_{12} \\ 0 & F_{12} & 0 & 1 - F_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}. \quad (\text{B.240})$$

Weiters ergeben sich mit (3.46) die Einträge  $F_{41}$ ,  $F_{42}$ ,  $F_{43}$  und schließlich mit (3.48) der Eintrag  $F_{44}$ . Dies liefert die vollständig berechnete Sichtfaktormatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F_{12} & 0 & 1 - F_{12} \\ F_{12} & 0 & F_{12} & 1 - 2F_{12} \\ 0 & F_{12} & 0 & 1 - F_{12} \\ \frac{1-F_{12}}{6} & \frac{1-2F_{12}}{6} & \frac{1-F_{12}}{6} & \frac{3+4F_{12}}{6} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.241})$$

Aus (3.52) folgen damit die Nettowärmestromdichten

$$\dot{\mathbf{q}} = \text{diag}\{\varepsilon\}(\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\}))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{F})\sigma\mathbf{T}^4. \quad (\text{B.242})$$

Es wird nun angenommen, dass die Blöcke  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$  mit gleicher Anfangstemperatur  $T_0$  und zum gleichen Zeitpunkt in den Ofen eingelegt werden. Außerdem besitzen sie die gleichen Materialeigenschaften (Emissivität  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_B$  und Wärmekapazität). Um zu prüfen, ob die Blöcke gleich schnell erwärmt werden, genügt es, den Fall  $T_1 = T_2 = T_3 = T_B$  mit einer beliebigen Temperatur  $T_B < T_4$  und die zugehörigen Nettowärmestromdichten  $\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_2$  und  $\dot{q}_3$ , zu betrachten. Der Block mit der kleinsten Nettowärmestromdichte (positiv bei Wärmeabgabe) erwärmt zum jeweiligen Zeitpunkt am schnellsten. Zum Startzeitpunkt ist  $T_1 = T_2 = T_3 = T_B$  mit  $T_B = T_0$  jedenfalls erfüllt. Würde sich die Temperatur der Blöcke zu einem späteren Zeitpunkt wieder angleichen, so gilt wieder dieselbe Argumentation wie zum Startzeitpunkt.

Wertet man (3.50) in Vektorschreibweise für dieses Beispiel aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{F}(\sigma \text{diag}\{\varepsilon\}\mathbf{T}^4 + (\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\})\mathbf{G}) = \\ \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & F_{12} & 0 & 1 - F_{12} \\ F_{12} & 0 & F_{12} & 1 - 2F_{12} \\ 0 & F_{12} & 0 & 1 - F_{12} \\ \frac{1-F_{12}}{6} & \frac{1-2F_{12}}{6} & \frac{1-F_{12}}{6} & \frac{3+4F_{12}}{6} \end{bmatrix} \left( \sigma \begin{bmatrix} \varepsilon_B T_B^4 \\ \varepsilon_B T_B^4 \\ \varepsilon_B T_B^4 \\ \varepsilon_4 T_4^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 - \varepsilon_B)G_1 \\ (1 - \varepsilon_B)G_2 \\ (1 - \varepsilon_B)G_3 \\ (1 - \varepsilon_4)G_4 \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.243})$$

Da hier  $G_1$  und  $G_3$  vollkommen symmetrisch auftreten (der Block  $B_1$  und der Block  $B_3$  werden genau gleich erwärmt), gilt  $G_1 = G_3$ . Subtrahiert man unter Berücksichtigung dieser Identität das  $(1 - F_{12})$ -fache der zweiten Zeile von (B.243) vom  $(1 - 2F_{12})$ -fachen

der ersten Zeile von (B.243), so ergibt sich

$$(1 - 2F_{12})G_1 - (1 - F_{12})G_2 = -F_{12}\sigma\varepsilon_B T_B^4 - 2F_{12}(1 - \varepsilon_B)(1 - F_{12})G_1 + F_{12}(1 - \varepsilon_B)(1 - 2F_{12})G_2, \quad (\text{B.244})$$

so dass nach kurzer Umformung und Berücksichtigung von (3.51)

$$\underbrace{\frac{1 - F_{12} + F_{12}(1 - \varepsilon_B)(1 - 2F_{12})}{F_{12}}}_{> 0} (G_2 - G_1) = \varepsilon_B(\sigma T_B^4 - G_1) = \dot{q}_1 \quad (\text{B.245})$$

folgt. Wegen  $T_B < T_4$  stellen die Blöcke die kältesten Punkte im Ofen dar und es müssen folgende Ungleichungen erfüllt sein  $\dot{q}_1 = \dot{q}_3 \leq 0$ ,  $\dot{q}_2 \leq 0$  und  $\dot{q}_4 \geq 0$ . Folglich gilt  $G_1 \geq G_2$ , was unter Verwendung von (3.51) auf

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_3 = \varepsilon_B(\sigma T_B^4 - G_1) \leq \varepsilon_B(\sigma T_B^4 - G_2) = \dot{q}_2 \leq 0 \quad (\text{B.246})$$

bzw.

$$|\dot{q}_1| = |\dot{q}_3| \geq |\dot{q}_2| \quad (\text{B.247})$$

führt. Die Wärmeströme in die Blöcke  $B_1$  und  $B_3$  sind also betraglich höher als der Wärmestrom in den Block  $B_2$ . Daher werden die Blöcke  $B_1$  und  $B_3$  schneller aufgewärmt als der Block  $B_2$ .

**Aufgabe B.22 (Sichtfaktorberechnung für einen Reflow-Lötofen).** Beim Reflow-Löten zur Herstellung elektronischer Schaltungen wird eine mit SMD-Bauelementen bestückte Platine möglichst homogen erhitzt, so dass das geschmolzene Lot die Bauelemente mit der Leiterplatte verbindet. Abbildung B.31 zeigt einen schematischen Aufbau eines Reflow-Lötofens (Breite  $4L$ , Höhe  $2L$ , Tiefe  $\gg 4L$ ). Aufgrund der Größenverhältnisse kann von 2-dimensionaler Strahlung ausgegangen werden. Die drei elektrisch beheizten, zylinderförmigen Heizstrahler (Radius  $R$ ) geben Strahlungsenergie an ihre Umgebung und damit auch an die Oberseite der Platine ab.

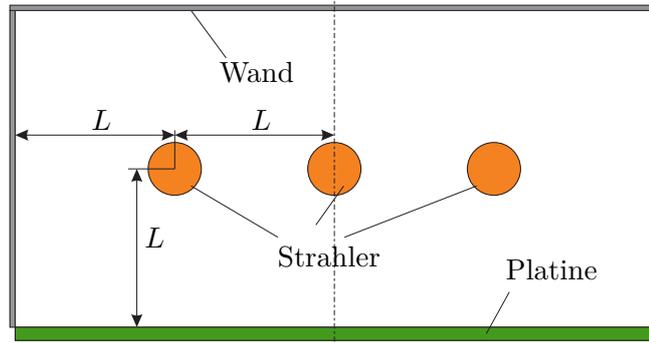


Abbildung B.31: Schematischer Aufbau eines Reflow-Lötovens mit zylinderförmigen Heizstrahlern.

Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung der  $5 \times 5$  Sichtfaktormatrix  $\mathbf{F} = [F_{ij}]_{i,j=1,\dots,5}$  für das Innere des Ofenraums. Der Strahlungsraum besteht dabei aus den drei Strahlern, der Platine und der Wand des Ofens. Für die Berechnung der Sichtfaktoren kann die *Crossed-Strings Methode* in Kombination mit dem Reziprozitätsgesetz und der Summationsregel verwendet werden.

*Lösung von Aufgabe B.22.* Zur Berechnung der Sichtfaktoren wird zunächst Abbildung B.32 betrachtet.

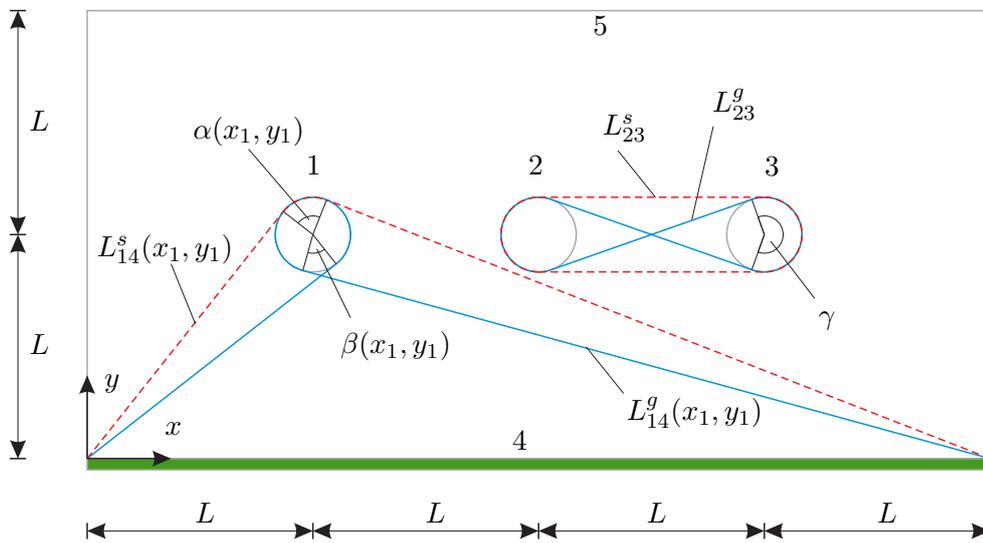


Abbildung B.32: Sichtfaktorberechnung für einen Reflow-Lötoven mittels Crossed-Strings Methode.

Vier Schnüre sind im Inneren des Strahlungsraums gespannt. Es werden die Winkel

$\alpha(x_1, y_1)$  und  $\beta(x_1, y_1)$  definiert durch die rote und die blaue Schnur um den Heizstrahler 1 als Funktionen der Koordinaten  $(x_1, y_1)$  des Mittelpunktes von Heizstrahler 1 bestimmt. Diese Winkel ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, y_1) = & 2\pi - \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - R^2}}{R}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{(4L - x_1)^2 + y_1^2 - R^2}}{R}\right) \\ & - \operatorname{atan}\left(\frac{x_1}{y_1}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{4L - x_1}{y_1}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.248})$$

$$\begin{aligned} \beta(x_1, y_1) = & \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - R^2}}{R}\right) + \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{(4L - x_1)^2 + y_1^2 - R^2}}{R}\right) \\ & - \operatorname{atan}\left(\frac{x_1}{y_1}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{4L - x_1}{y_1}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.249})$$

Der Umschlingungswinkel  $\gamma$  der um die Heizstrahler 2 und 3 gespannten blauen Schnur lässt sich mittels

$$\gamma = 2\pi - 2 \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{L^2 - (2R)^2}}{2R}\right) \quad (\text{B.250})$$

berechnen. Im nächsten Schritt werden die abgewickelten Längen der seitlichen (roten) und der gekreuzten (blauen) Schnüre bestimmt. Diese lauten

$$L_{14}^s(x_1, y_1) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - R^2} + \sqrt{(4L - x_1)^2 + y_1^2 - R^2} + R\alpha(x_1, y_1) \quad (\text{B.251})$$

$$L_{14}^g(x_1, y_1) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - R^2} + \sqrt{(4L - x_1)^2 + y_1^2 - R^2} + R(2\pi - \beta(x_1, y_1)) \quad (\text{B.252})$$

$$L_{23}^s = 2L + 2\pi R \quad (\text{B.253})$$

$$L_{23}^g = 2\sqrt{L^2 - (2R)^2} + 2\gamma R. \quad (\text{B.254})$$

Mit den obigen Vorbereitungen können nun die Sichtfaktoren  $F_{14}$ ,  $F_{24}$  und  $F_{23}$  unter Verwendung der Crossed-Strings Methode (3.73) bestimmt werden.

$$F_{14} = \frac{1}{4\pi R} (L_{14}^g(x_1, y_1) - L_{14}^s(x_1, y_1)) = \frac{1}{4\pi} (2\pi - \beta(L, L) - \alpha(L, L)) \quad (\text{B.255})$$

$$F_{24} = \frac{1}{4\pi} (2\pi - \beta(2L, L) - \alpha(2L, L)) \quad (\text{B.256})$$

$$F_{23} = \frac{1}{4\pi R} (L_{23}^g - L_{23}^s) = \frac{1}{4\pi R} (2\sqrt{L^2 - (2R)^2} + 2\gamma R - 2L - 2\pi R) \quad (\text{B.257})$$

Da die Heizstrahler konvexe Körper sind und der Heizstrahler 2 die Sicht zwischen den Heizstrahlern 1 und 3 vollständig verdeckt, gilt

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{13} = F_{31} = 0.$$

Mit dem Reziprozitätsgesetz, der Summationsregel und unter Verwendung der Symmetrie folgen für die Heizstrahler 1, 2 und 3

$$\begin{aligned}
 F_{12} &= F_{21} = F_{32} = F_{23} \\
 F_{34} &= F_{14} \\
 F_{15} &= F_{35} = 1 - F_{14} - F_{12} \\
 F_{25} &= 1 - F_{21} - F_{23} - F_{24} .
 \end{aligned}$$

Die übrigen Sichtfaktoren ergeben sich mit dem Reziprozitätsgesetz und der Summationsregel in der Form

$$\begin{aligned}
 F_{41} = F_{43} &= \frac{2\pi R}{4L} F_{14} & F_{51} = F_{53} &= \frac{2\pi R}{8L} F_{15} \\
 F_{42} &= \frac{2\pi R}{4L} F_{24} & F_{52} &= \frac{2\pi R}{8L} F_{25} \\
 F_{44} &= 0 & F_{54} &= \frac{4L}{8L} F_{45} \\
 F_{45} &= 1 - F_{41} - F_{42} - F_{43} & F_{55} &= 1 - F_{51} - F_{52} - F_{53} - F_{54} .
 \end{aligned}$$

**Aufgabe B.23 (Strahlungsschild).** Abbildung B.33a zeigt einen Querschnitt durch Ihre zylinderförmige Edelstahlthermoskanne. Sie besteht aus zwei durch eine Vakuumkammer getrennte Edelstahlrohre mit den Durchmessern  $d_0$  und  $d_2$ . Die Wanddicke der Rohre sei vernachlässigbar klein. Die Grund- und die Deckfläche der Thermoskanne soll ideal isolierend sein (adiabate Randbedingung). Vereinfachend soll die Temperatur des inneren Rohres stets exakt der Temperatur der warmzuhaltenden Flüssigkeit  $T_0$  entsprechen. Außerdem soll die Temperatur des äußeren Rohres stets exakt der Umgebungstemperatur  $T_2$  entsprechen.

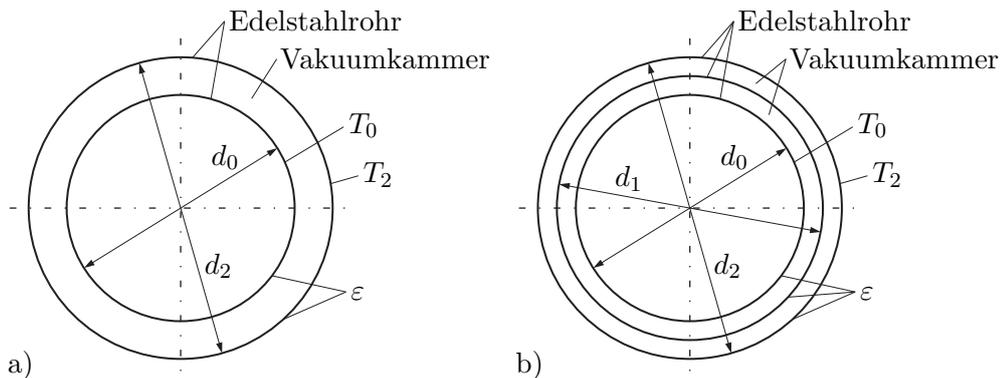


Abbildung B.33: Querschnitt einer Thermoskanne, a) mit zwei Rohren, b) mit drei Rohren.

Leider hält Ihre Thermoskanne den Inhalt für einen langen Tag an der Universität

nicht ausreichend warm. Überlegen Sie, ob die Situation durch Einziehen eines dritten Rohres mit einem Durchmesser  $d_1 \in (d_0, d_2)$  in die Vakuumkammer verbessert werden kann (siehe Abbildung B.33b). Um welchen Faktor ändert sich durch diese Maßnahme der Gesamtverlustwärmestrom? Gehen Sie davon aus, dass alle Rohre graue Strahler sind und die gleiche totale Emissivität  $\varepsilon$  besitzen.

*Lösung von Aufgabe B.23.* Zunächst soll für den aktuellen Aufbau der Thermoskanne (Abbildung B.33a) der Verlustwärmestrom berechnet werden. In der Vakuumkammer kann Wärme ausschließlich durch thermische Strahlung übertragen werden. Da das innere Rohr von außen gesehen ein konvexer Körper ist, gilt für den Sichtfaktor  $F_{00} = 0$  und aus der Summationsregel (3.48) folgt

$$F_{00} + F_{02} = F_{02} = 1 . \quad (\text{B.258})$$

Mit dem Reziprozitätsgesetz (3.46) folgt daraus

$$F_{20} = \frac{d_0}{d_2} F_{02} = \frac{d_0}{d_2} . \quad (\text{B.259})$$

Für den Sichtfaktor  $F_{22}$  ergibt sich gemäß der Summationsregel (3.48)  $F_{20} + F_{22} = 1$

$$F_{22} = 1 - \frac{d_0}{d_2} . \quad (\text{B.260})$$

Mit der Sichtfaktormatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{d_0}{d_2} & 1 - \frac{d_0}{d_2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.261})$$

errechnen sich die Nettowärmestromdichten gemäß (3.52) in der Form

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ -\dot{q}_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{d_0}{d_2} & \frac{d_0}{d_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}-\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -(1-\varepsilon) \\ -(1-\varepsilon)\frac{d_0}{d_2} & 1 - (1-\varepsilon)\left(1 - \frac{d_0}{d_2}\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\})\mathbf{F}}^{-1} \sigma \underbrace{\varepsilon \mathbf{E}}_{\text{diag}\{\varepsilon\}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_0^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^4} \\ &= \frac{\varepsilon \sigma}{1 + (1-\varepsilon)\frac{d_0}{d_2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{d_0}{d_2} & \frac{d_0}{d_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (\text{B.262})$$

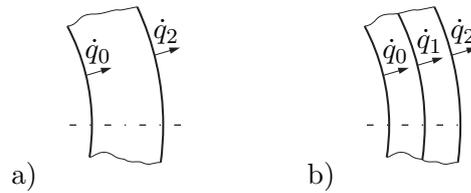


Abbildung B.34: Wärmestromdichten in den Wänden einer Thermoskanne, a) mit zwei Rohren, b) mit drei Rohren.

Hierbei wurden, wie in Abbildung B.34a skizziert, sowohl  $\dot{q}_0$  als auch  $\dot{q}_2$  nach außen hin positiv gezählt. Für den aktuellen Aufbau der Thermoskanne ergibt sich daher der auf die Rohrlänge bezogene Verlustwärmestrom

$$\dot{q}^\circ = \dot{q}_0 d_0 \pi = \dot{q}_2 d_2 \pi = k_{02} (T_0^4 - T_2^4) \quad (\text{B.263a})$$

mit der Abkürzung

$$k_{02} = \frac{\varepsilon \sigma \pi}{\frac{1}{d_0} + (1 - \varepsilon) \frac{1}{d_2}}. \quad (\text{B.263b})$$

Hieraus folgt, dass die Rohre für eine gute Isolierwirkung möglichst aus Material mit einer kleinen totalen Emissivität  $\varepsilon$  sein sollten. Rostfreier Stahl erfüllt dies (je nach Oberflächenstruktur) einigermaßen gut.

Es sei nun  $T_1$  die Temperatur des im geänderten Aufbau neu eingezogenen Rohres mit dem Durchmesser  $d_1$ . Da auch die Wanddicke dieses Rohres vernachlässigbar klein ist, kann dieses keine Wärme speichern. Folglich müssen die Wärmestromdichten an dessen innerer und äußerer Oberfläche gleich sein. Diese Wärmestromdichte soll mit  $\dot{q}_1$  (positiv nach außen, siehe Abbildung B.34b) bezeichnet werden. Völlig analog zu (B.263) ergibt sich für den geänderten Aufbau bei individueller Betrachtung der beiden Vakuunkammern

$$\dot{q}^\circ = \dot{q}_0 d_0 \pi = \dot{q}_1 d_1 \pi = \dot{q}_2 d_2 \pi = k_{01} (T_0^4 - T_1^4) = k_{12} (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{B.264a})$$

mit den Abkürzungen

$$k_{01} = \frac{\varepsilon \sigma \pi}{\frac{1}{d_0} + (1 - \varepsilon) \frac{1}{d_1}} \quad (\text{B.264b})$$

$$k_{12} = \frac{\varepsilon \sigma \pi}{\frac{1}{d_1} + (1 - \varepsilon) \frac{1}{d_2}}. \quad (\text{B.264c})$$

Wird in (B.264a)  $T_1$  eliminiert, so folgt daraus

$$\dot{q}^\circ = \frac{k_{01} k_{12}}{k_{01} + k_{12}} (T_0^4 - T_2^4). \quad (\text{B.265})$$

Ein Vergleich mit (B.263) ergibt, dass sich der Gesamtverlustwärmestrom durch das Einziehen des dritten Rohres um den Faktor

$$\frac{\frac{k_{01}k_{12}}{k_{01}+k_{12}}}{k_{02}} = \frac{\frac{1}{d_0} + (1-\varepsilon)\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_0} + (2-\varepsilon)\frac{1}{d_1} + (1-\varepsilon)\frac{1}{d_2}} \leq 1 \quad (\text{B.266})$$

ändert. D. h. der Gesamtverlustwärmestrom nimmt durch die Maßnahme signifikant ab. Das eingezogene dritte Rohr wirkt als *Strahlungsschild*, ohne dass dabei die Baugröße der Thermoskanne verändert wird. Soll der Gesamtverlustwärmestrom durch die Maßnahme beispielsweise halbiert werden, so folgt aus (B.266) der erforderliche Durchmesser des zusätzlichen Rohres mit

$$d_1 = \frac{2-\varepsilon}{\frac{1}{d_0} + (1-\varepsilon)\frac{1}{d_2}}. \quad (\text{B.267})$$

Das Ergebnis (B.266) zeigt außerdem, dass die größtmögliche Verbesserung erzielt wird, wenn das zusätzliche Rohr den Durchmesser  $d_1 \rightarrow d_0$  aufweist.

**Hinweis:** Die Zeitdauer, die verstreicht während der Inhalt der Thermoskanne von einer gewissen Anfangstemperatur auf ein bestimmtes Temperaturniveau abkühlt, ändert sich durch die Maßnahme um den Kehrwert von (B.266). Diese Aussage folgt z. B. aus der (hier nicht betrachteten) Differentialgleichung für die Temperatur  $T_0$ . Diese Differentialgleichung ergibt sich aus dem Energieerhaltungssatz (A.17) angewandt auf den Inhalt der Thermoskanne.

**Aufgabe B.24 (Rettungsdecke).** In diesem Beispiel soll der Nutzen einer Rettungsdecke zum Warmhalten eines Körpers analysiert werden. Dazu soll in weiterer Folge die idealisierte 2-dimensionale Situation in Abbildung B.35 betrachtet werden.

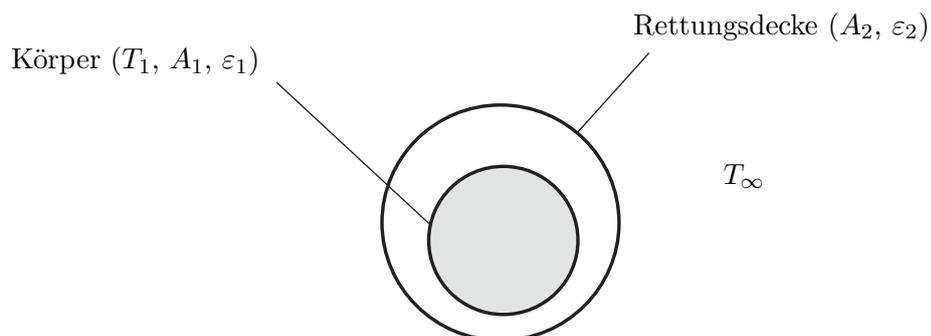


Abbildung B.35: Körper mit Rettungsdecke.

Der Körper sein konvex und ist charakterisiert durch die Oberfläche  $A_1$ , die Emissivität  $\varepsilon_1 = 0.5$  und die homogene Oberflächentemperatur  $T_1$ . Die Rettungsdecke besteht aus einer dünnen, metallisierten Kunststoffolie, hat die Oberfläche  $A_2$  und

besitzt eine beidseitige Emissivität  $\varepsilon_2 = 0.5$ . Da die Rettungsdecke sehr dünn ist, kann angenommen werden, dass ihre Wärmekapazität und ihr Wärmeübergangswiderstand gegen Null gehen. Daraus lässt sich ableiten, dass die Temperatur an der Innenseite und Außenseite der Decke gleich sein muss. Vereinfachend soll in weiterer Folge  $A_2 = A_1$  gelten, d.h. die Decke ist eng anliegend um den Körper gewickelt. Es kann angenommen werden, dass die Umgebungstemperatur  $T_\infty$  konstant ist und es gilt  $T_\infty < T_1$ . Weiters soll ausschließlich Wärmeübertragung durch thermische Strahlung berücksichtigt werden, d. h. die Wärmeleitung durch Kontakt sei vernachlässigbar gering.

Um wie viel reduziert sich der Wärmestrom  $\dot{Q}$  an die Umgebung zufolge thermischer Strahlung, wenn der Körper in die Rettungsdecke gewickelt wird?

*Lösung von Aufgabe B.24.* Zu Beginn wird die thermische Abstrahlung des Körpers ohne Rettungsdecke an die Umgebung mithilfe der Netto-Strahlungsmethode berechnet. Die Variablen dieser Rechnung werden mit hochgestelltem  $I$  bezeichnet.

Da der Körper konvex ist, gilt für seinen Sichtfaktor auf sich selbst  $F_{11}^I = 0$ . Zuzufolge der Summationsregel (3.48) muss dann  $F_{1\infty}^I = 1$  gelten. Weiters bildet die Umgebung (welche als unendlich ausgedehnte Hohlkugel betrachtet werden kann) für sich einen unendlich ausgedehnten, geschlossenen Strahlungsraum. In diesem Strahlungsraum ist der Körper mit finiter Größe vernachlässigbar klein, d. h. als einzige Oberfläche tritt die Umgebung selbst auf, so dass für die Sichtfaktoren der Umgebung unter Einhaltung der Summationsregel (3.48)  $F_{\infty\infty}^I = 1$  und (3.48)  $F_{\infty 1}^I = 0$  gelten müssen. Dies ergibt in Matrixschreibweise

$$\mathbf{F}^I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.268})$$

Die Nettowärmestromdichten ergeben sich nun laut (3.52) zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}^I &= (\mathbf{E} - \mathbf{F}^I) \left( \mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}^I)) \mathbf{F}^I \right)^{-1} \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}^I) \sigma \mathbf{T}_{1-\infty}^4 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 + \varepsilon_1 \\ 0 & \varepsilon_\infty \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\infty \end{bmatrix} \sigma \mathbf{T}_{1-\infty}^4 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sigma \mathbf{T}_{1-\infty}^4. \end{aligned} \quad (\text{B.269})$$

Hierbei enthält der Vektor  $\boldsymbol{\varepsilon}^I = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_\infty]^T$  die Emissivitäten und  $\mathbf{T}_{1-\infty}^4 = [T_1^4 \quad T_\infty^4]^T$  die vierten Potenzen der Oberflächentemperaturen. Erwartungsgemäß ist die vom Körper abgestrahlte Wärmestromdichte unabhängig von der Emissivität der Umgebung. Aus der ersten Zeile von (B.269) lässt sich die vom Körper abgestrahlte Nettowärmestromdichte ablesen. Der abgestrahlte Gesamtwärmestrom ergibt sich somit zu

$$\dot{Q}^I = \sigma \varepsilon_1 A_1 (T_1^4 - T_\infty^4). \quad (\text{B.270})$$

Die Variablen im Falle des mit der Rettungsdecke umwickelten Körpers werden mit hochgestelltem  $II$  bezeichnet. In diesem Fall sind zwei getrennte Strahlungsräume separat zu berücksichtigen. Ein Strahlungsraum wird von der Körperoberfläche und der Innenseite der Rettungsdecke gebildet. Der zweite Strahlungsraum wird von Außenseite der Rettungsdecke und der Umgebung gebildet. Wird der Körper dicht in die Rettungsdecke gewickelt, so sieht der Körper genau die innere Oberfläche der Rettungsdecke und vice versa. Unter Verwendung der Summationsregel (3.48) ergeben sich damit die Sichtfaktoren in Matrixschreibweise zu

$$\mathbf{F}^{II} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.271})$$

Die Nettowärmestromdichten zwischen dem Körper und der Rettungsdecke ergeben sich nun laut (3.52) zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{1-2} &= (\mathbf{E} - \mathbf{F}^{II}) \left( \mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}^{II}) \mathbf{F}^{II}) \right)^{-1} \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}^{II}) \sigma \mathbf{T}_{1-2}^4 \\ &= \sigma \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_1 - 1 \\ \varepsilon_2 - 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \mathbf{T}_{1-2}^4 \\ &= \frac{\sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{T}_{1-2}^4. \end{aligned} \quad (\text{B.272})$$

Hierbei enthält der Vektor  $\boldsymbol{\varepsilon}^{II} = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2]^T$  wieder die Emissivitäten und  $\mathbf{T}_{1-2}^4 = [T_1^4 \quad T_2^4]^T$  die vierten Potenzen der Oberflächentemperaturen. Aus der ersten Zeile von (B.272) lässt sich die vom eingewickelten Körper abgestrahlte Nettowärmestromdichte ablesen. Der abgestrahlte Gesamtwärmestrom ergibt sich somit zu

$$\dot{Q}_{1-2}^{II} = \frac{\sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 A_1}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} (T_1^4 - T_2^4). \quad (\text{B.273})$$

Analoge Überlegungen wie im Falle des Körpers ohne Rettungsdecke ergeben die den abgestrahlten Gesamtwärmestrom an der Außenseite der Rettungsdecke in der Form

$$\dot{Q}_{2-\infty}^{II} = \varepsilon_2 A_1 \sigma (T_2^4 - T_\infty^4). \quad (\text{B.274})$$

Durch Vernachlässigung der Wärmekapazität der Rettungsdecke folgt aus dem Energieerhaltungssatz

$$\dot{Q}_{1-2}^{II} = \dot{Q}_{2-\infty}^{II}. \quad (\text{B.275})$$

Wird in (B.273) und (B.274)  $T_2$  eliminiert, so ergibt sich

$$\dot{Q}^{II} = \frac{\sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 A_1}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_1} (T_1^4 - T_\infty^4). \quad (\text{B.276})$$

Somit kann die relative Reduktion des Wärmestromes aus dem Verhältnis

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}^{II}}{\dot{Q}^I} &= \frac{\frac{\sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 A_1}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_1} (T_1^4 - T_\infty^4)}{\sigma \varepsilon_1 A_1 (T_1^4 - T_\infty^4)} = \frac{\varepsilon_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_1} \\ &= \frac{0.5}{1 + (1 - 0.5)(1 - 0.5) + 0.5} = 0.4 \end{aligned} \quad (\text{B.277})$$

bestimmt werden. Die Verwendung einer Rettungsdecke reduziert den Wärmestrom durch thermische Strahlung also erheblich. Die Rettungsdecke wirkt als *Strahlungsschild*.

**Aufgabe B.25 (Wärmestrahlung in zylindrischem Sackloch).** Das in Abb. B.36 dargestellte, kreisrunde Sackloch gibt durch Strahlung Wärme an die Umgebung mit der Temperatur  $T_\infty$  ab. Die Mantelfläche besitzt die homogene Temperatur  $T_1$ . Die Bodenfläche besitzt die homogene Temperatur  $T_2$ . Beide Flächen können als schwarze Körper angesehen werden. Das im Sackloch enthaltene Gas sei für die Wärmestrahlung transparent.

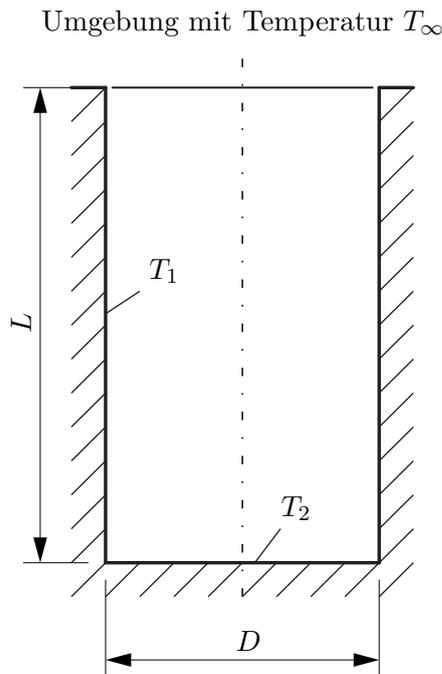


Abbildung B.36: Zylindrisches Sackloch.

- Berechnen Sie die relevanten Sichtfaktoren.
- Berechnen Sie den vom Hohlraum an die Umgebung abgestrahlten Gesamtwärmestrom.

- Gegebene Größen:

Temperatur Mantelfläche	$T_1$	=	1500	K
Temperatur Boden	$T_2$	=	1700	K
Umgebungstemperatur	$T_\infty$	=	300	K
Höhe	$L$	=	0.15	m
Durchmesser	$D$	=	0.075	m

**Lösung von Aufgabe B.25.** Es werden zunächst die Sichtfaktoren berechnet. Da die Umgebung als unendlich ausgedehnt angenommen wird, erreicht die gesamte Strahlung welche das Sackloch durch die obere kreisförmige Öffnung verlässt die Umgebung. Die Sicht von den Flächen im Sackloch auf die Umgebung entspricht der Sicht der Flächen im Sackloch auf eine gedachte Kreisscheibe welche genau die obere kreisförmige Öffnung verschließen würde. Dies kann bei der Berechnung der Sichtfaktoren ausgenutzt werden.

**Hinweis:** Abbildung B.37 skizziert die geometrische Anordnung zweier paralleler Kreisscheiben  $a$  und  $b$  mit identischer Mittelachse. Für den Sichtfaktor zwischen diesen beiden Kreisscheiben findet man zum Beispiel in [B.1] die Berechnungsformel

$$x = \frac{r_a}{h} \quad ; \quad y = \frac{r_b}{h} \quad (\text{B.278a})$$

$$z = 1 + \frac{1 + y^2}{x^2} \quad (\text{B.278b})$$

$$F_{ab} = \frac{1}{2} \left( z - \sqrt{z^2 - 4 \left( \frac{r_b}{r_a} \right)^2} \right). \quad (\text{B.278c})$$

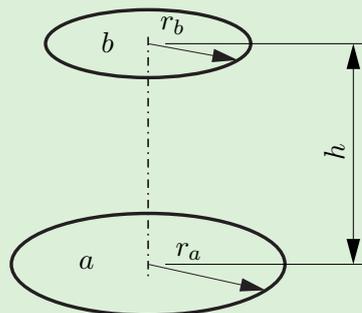


Abbildung B.37: Skizze zur Sichtfaktorberechnung für zwei parallele Kreisscheiben mit identischer Mittelachse.

Mit (B.278) angewandt auf Boden- und (offene) Deckfläche des Sacklochs aus

Abb. B.36 folgt

$$x = y = \frac{D}{2L} \quad (\text{B.279a})$$

$$z = 2 + \left(\frac{2L}{D}\right)^2 = 18 \quad (\text{B.279b})$$

$$F_{2\infty} = \frac{1}{2} \left( z - \sqrt{z^2 - 4} \right) = 0.0557, \quad (\text{B.279c})$$

wobei  $F_{2\infty}$  dem Sichtfaktor zwischen der Bodenfläche und der Umgebung entspricht. Damit folgt unter Ausnutzung der Summationsregel (3.48) und der Tatsache, dass die Bodenfläche konvex ist ( $F_{22} = 0$ ), der Sichtfaktor zwischen der Boden- und der Mantelfläche in der Form

$$F_{21} = 1 - F_{2\infty} = 0.9443. \quad (\text{B.280})$$

Mittels Reziprozitätsgesetz (3.46) folgt nun der Sichtfaktor zwischen der Mantel- und der Bodenfläche

$$F_{12} = \frac{A_2}{A_1} F_{21} = \frac{D}{4L} F_{21} = 0.1180, \quad (\text{B.281})$$

wobei für die Flächen  $A_1 = D\pi L$  und  $A_2 = D^2\pi/4$  gelten. Da die Boden- und die (offene) Deckfläche symmetrisch zur Mantelfläche angeordnet sind, gilt

$$F_{1\infty} = F_{12} = 0.1180. \quad (\text{B.282})$$

Der verbleibende Sichtfaktor  $F_{11}$  folgt aus der Summationsregel (3.48) in der Form

$$F_{11} = 1 - F_{12} - F_{1\infty} = 1 - 2F_{12} = 0.7639. \quad (\text{B.283})$$

Mit der Annahme einer unendlich ausgedehnten Umgebung ( $A_\infty = \infty$ ) folgen die Sichtfaktoren der Umgebung mittels Reziprozitätsgesetz (3.46) und Summationsregel (3.48) in der Form

$$F_{\infty 1} = \frac{A_1}{A_\infty} F_{1\infty} = 0 \quad (\text{B.284})$$

$$F_{\infty 2} = \frac{A_2}{A_\infty} F_{2\infty} = 0 \quad (\text{B.285})$$

$$F_{\infty\infty} = 1. \quad (\text{B.286})$$

Damit ergibt sich die Sichtfaktormatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{1\infty} \\ F_{21} & 0 & F_{2\infty} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.287})$$

Da die Mantel- und die Bodenfläche schwarze Strahler sind, gilt

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1. \quad (\text{B.288})$$

Die Emissivität der Umgebung wird allgemein mit  $\varepsilon_\infty$  bezeichnet. Daraus folgt

$$\text{diag}\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\infty \end{bmatrix}. \quad (\text{B.289})$$

Mit (3.52) können damit direkt die Nettowärmestromdichten

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_\infty \end{bmatrix} = (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\})\mathbf{F})^{-1} \text{diag}\{\varepsilon\}\sigma\mathbf{T}^4 \quad (\text{B.290})$$

berechnet werden, wobei  $\mathbf{T} = [T_1 \quad T_2 \quad T_\infty]^T$ . Auswerten der Teilmatrizen liefert

$$(\mathbf{E} - \mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 1 - F_{11} & -F_{12} & -F_{1\infty} \\ -F_{21} & 1 & -F_{2\infty} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.291})$$

$$(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\})\mathbf{F})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\infty \end{bmatrix}^{-1} = \text{diag}\{\varepsilon\}^{-1} \quad (\text{B.292})$$

und somit

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - F_{11})\sigma T_1^4 - F_{12}\sigma T_2^4 - F_{1\infty}\sigma T_\infty^4 \\ -F_{21}\sigma T_1^4 + \sigma T_2^4 - F_{2\infty}\sigma T_\infty^4 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.293})$$

Aus dem Energieerhaltungssatz angewandt auf die thermische Strahlung im zylindrischen Sackloch folgt, dass der durch die (offene) Deckfläche an die Umgebung abgestrahlte Gesamtnettowärmestrom  $\dot{Q}_\infty$  der Summe der Nettowärmeströme welche die Flächen 1 und 2 verlassen entspricht. Für den gesuchten Strahlungswärmestrom gilt also

$$\dot{Q}_\infty = A_1\dot{q}_1 + A_2\dot{q}_2 = 1312 \text{ W} . \quad (\text{B.294})$$

**Aufgabe B.26 (Stationäre Wärmeleitung in einem Rohr).** In einer isolierten, zylindrischen Rohrleitung strömt Heißdampf mit der Temperatur  $T_D$ . Die Temperatur der Umgebung ist  $T_L$ . Die Wärmeübergangszahl an der Rohrinneenseite beträgt  $\alpha_i$ , die homogene Wärmeleitfähigkeit der Rohrwand ist  $\lambda$  und die Wärmeübergangszahl an

der Rohraußenseite beträgt  $\alpha_a$ . Der Innendurchmesser  $2r_i$  und der Außendurchmesser  $2r_a$  sind gegeben.

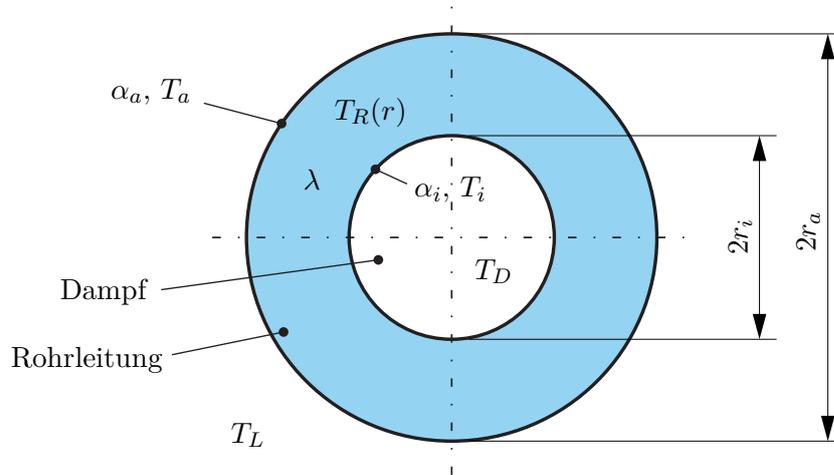


Abbildung B.38: Querschnitt einer Heißdampfleitung.

- Berechnen Sie den stationären, radialen Temperaturverlauf  $T_R(r)$  in der Rohrwand unter der Annahme, dass die Temperaturen  $T_i$  und  $T_a$  an der Innen- und Außenseite der Rohrwand bekannt sind.
- Geben Sie nun den Wärmestrom  $\dot{Q}_V$  an, welcher durch eine Rohrleitung der Länge  $L$  verloren geht. Bestimmen Sie dazu auch die Temperaturen  $T_i$  und  $T_a$  an der Innen- und Außenseite der Rohrwand.

#### Lösung von Aufgabe B.26.

Aus der Wärmeleitgleichung (3.5b) in Zylinderkoordinaten folgt unmittelbar die Differentialgleichung für den stationären, radialen Temperaturverlauf  $T_R(r)$  in der Rohrwand zu

$$0 = \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT_R(r)}{dr} \right) \quad (\text{B.295})$$

mit den Randbedingungen

$$T_R(r_i) = T_i \quad (\text{B.296a})$$

$$T_R(r_a) = T_a. \quad (\text{B.296b})$$

Der Ansatz

$$\frac{dT_R(r)}{dr} = \frac{c_0}{r} \quad (\text{B.297})$$

mit der Konstante  $c_0$  erfüllt die Differentialgleichung (B.295), denn es gilt

$$0 = \frac{d}{dr} \left( r \frac{c_0}{r} \right). \quad (\text{B.298})$$

Der Ansatz (B.297) lässt sich nun unter Berücksichtigung der Randbedingung (B.296a) durch Trennung der Variablen nach  $T_R(r)$  auflösen

$$\int_{T_R(r_i)}^{T_R(r)} dT_R(r) = c_0 \int_{r_i}^r \frac{1}{r} dr \quad (\text{B.299})$$

$$T_R(r) - T_R(r_i) = c_0 (\ln(r) - \ln(r_i)) \quad (\text{B.300})$$

$$T_R(r) = T_i + c_0 \ln\left(\frac{r}{r_i}\right). \quad (\text{B.301})$$

Die Konstante  $c_0$  berechnet sich aus der Randbedingung (B.296b) in der Form

$$c_0 = \frac{T_a - T_i}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}. \quad (\text{B.302})$$

Damit lautet die Gleichung für den stationären, radialen Temperaturverlauf

$$T_R(r) = T_i + (T_a - T_i) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}. \quad (\text{B.303})$$

Die Wärmestromdichte in der Rohrwand (nach außen hin positiv) berechnet sich gemäß Fourierschem Gesetz (3.1) zu

$$\dot{q}_R(r) = -\lambda \frac{dT_R(r)}{dr} = \frac{\lambda(T_i - T_a)}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \frac{1}{r}. \quad (\text{B.304})$$

An der Innen- und Außenseite der Rohrwand gelten die Robinschen Randbedingungen

$$\dot{q}_R(r_i) = \alpha_i(T_D - T_i) \quad (\text{B.305a})$$

$$\dot{q}_R(r_a) = \alpha_a(T_a - T_L), \quad (\text{B.305b})$$

womit sich das lineare Gleichungssystem

$$\frac{\lambda(T_i - T_a)}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \frac{1}{r_i} = \alpha_i(T_D - T_i) \quad (\text{B.306a})$$

$$\frac{\lambda(T_i - T_a)}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \frac{1}{r_a} = \alpha_a(T_a - T_L) \quad (\text{B.306b})$$

zur Berechnung der unbekanntenen Temperaturen  $T_i$  und  $T_a$  anschreiben lässt. Seine Lösung lautet

$$T_i = \frac{r_i \alpha_i \lambda T_D + r_i \alpha_i r_a \alpha_a \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) T_D + r_a \alpha_a \lambda T_L}{r_i \alpha_i \lambda + r_i \alpha_i r_a \alpha_a \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) + r_a \alpha_a \lambda} \quad (\text{B.307a})$$

$$T_a = \frac{r_i \alpha_i \lambda T_D + r_i \alpha_i r_a \alpha_a \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) T_L + r_a \alpha_a \lambda T_L}{r_i \alpha_i \lambda + r_i \alpha_i r_a \alpha_a \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) + r_a \alpha_a \lambda}. \quad (\text{B.307b})$$

Damit ergibt sich die Wärmestromdichte in der Rohrwand zu

$$\dot{q}_R(r) = \frac{T_D - T_L}{\frac{1}{r_i \alpha_i} + \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) + \frac{1}{r_a \alpha_a}} \frac{1}{r}. \quad (\text{B.308})$$

Dieses Ergebnis stimmt mit (3.95) ausgewertet für eine einschichtige Rohrwand überein. Der gesamte Verlustwärmestrom  $\dot{Q}_V$  durch eine Rohrleitung der Länge  $L$  kann nun als Flächenintegral der Wärmestromdichte  $\dot{q}_R(r)$  über die Mantelfläche berechnet werden.

$$\dot{Q}_V = 2r\pi L \dot{q}_R(r) = \frac{2\pi L (T_D - T_L)}{\frac{1}{r_i \alpha_i} + \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) + \frac{1}{r_a \alpha_a}} \quad (\text{B.309})$$

Wie es sein muss, hängt  $\dot{Q}_V$  nicht vom Radius  $r$  ab.

**Aufgabe B.27 (Raumheizung).** Für den in Abbildung B.39 im Aufriss dargestellten Raum, soll eine Wandheizung ausgelegt werden. Für die Berechnungen wird der Raum in 2-D betrachtet und es wird angenommen, dass sich alle Größen im stationären Zustand befinden und die Temperaturverteilung in Höhenrichtung, sowie im Innenraum homogen ist. Die Raumluft sei für thermische Strahlung transparent.

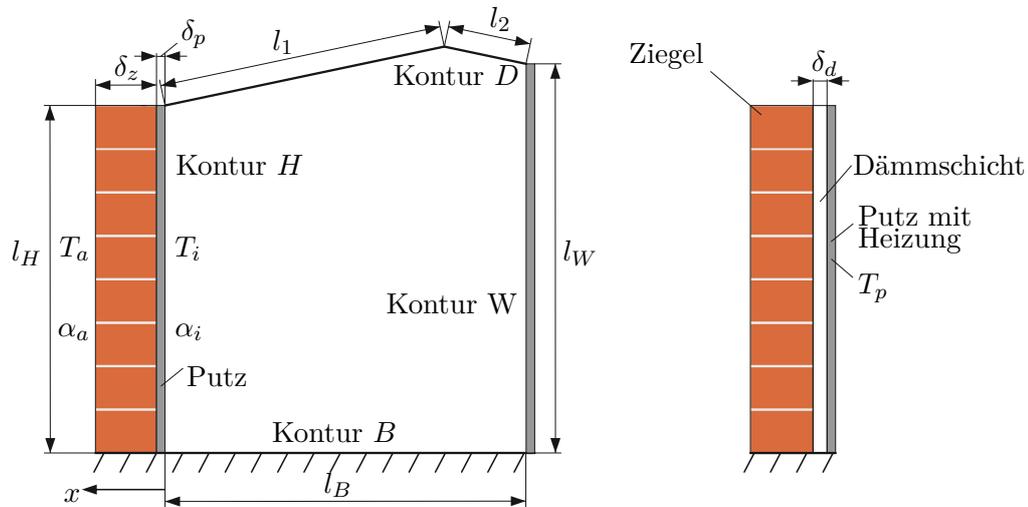


Abbildung B.39: Links: Aufriss des Raums, rechts: mit zusätzlicher Innendämmung (ab Aufgabe 2).

1. Berechnen Sie die Verlustwärmestromdichte durch die Wand (Abb. B.39 links) bei der Luftinnentemperatur  $T_i$  und der homogen angenommenen Außentemperatur  $T_a$  mit den Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_i$  und  $\alpha_a$  und den Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_p$  von Putz (Dicke  $\delta_p$ ) und  $\lambda_z$  von Ziegel (Dicke  $\delta_z$ ). Nehmen Sie dabei an, dass im Rauminnen die Wärmestrahlung vernachlässigbar ist, da alle beteiligten Oberflächen etwa gleiche Temperatur aufweisen. Auch an der Wandaußenseite soll Wärmestrahlung keine Rolle spielen.

Nehmen Sie für die folgenden Aufgaben an, dass nun die Temperatur des Innenputzes (Dicke  $\delta_p$ ) mit einer integrierten Wandheizung konstant und homogen auf dem Wert  $T_p$  gehalten wird und eine Innendämmsicht (Dicke  $\delta_d$ ) nachgerüstet wurde (vgl. Abbildung B.39 rechts).

2. Wie dick muss die Innendämmung (Wärmeleitkoeffizient  $\lambda_d$ ) zwischen der beheizten Putzschicht und der Ziegelmauer gewählt werden, so dass der Verlustwärmestrom durch die Mauer nach Einbau der Wandheizung unverändert gegenüber der Konfiguration ohne Wandheizung und Innendämmung bleibt (bei gleichbleibenden Temperaturen  $T_i$  und  $T_a$ , sowie gegebener Putztemperatur  $T_p$ ).
3. Geben Sie den Temperaturverlauf in der Wand (mit Innendämmung) in Abhängigkeit der Koordinate  $x$  an. Skizzieren Sie diesen Verlauf qualitativ für  $\lambda_z = 2\lambda_d$ .
4. Ermitteln Sie den Sichtfaktor  $F_{H,D}$  in Abhängigkeit der in Abbildung B.39

ingezeichneten Längen, wobei die Kontur  $H$  die beheizte Wand und die Kontur  $D$  die Raumdecke mit den Längen  $l_1$  und  $l_2$  bezeichnen.

- Die unbeheizte Seitenwand (Länge  $l_W$ ) und die Decke werden nun zur Kontur  $U$  zusammengefasst. Nehmen Sie an, dass die Sichtfaktoren  $F_{H,B}$ ,  $F_{H,U}$  und  $F_{B,U}$  gegeben sind und geben Sie die Berechnungsvorschriften für die restlichen Komponenten der Sichtfaktormatrix  $\mathbf{F}$  in Abhängigkeit der gegebenen Sichtfaktoren und Längen an.
- Berechnen Sie für gegebene Wandtemperaturen  $T_U$  und  $T_B$ , gegebene Putztemperatur  $T_p$ , gegebene Rauminnentemperatur  $T_i$  und gegebene Außentemperatur  $T_a$  die notwendige Heizleistungsdichte  $\dot{q}_p$  der Wandheizung. Berücksichtigen Sie dabei auch die thermische Strahlung im Rauminnenen und nehmen Sie die gleiche Emissivität  $\varepsilon$  für alle Oberflächen an.

### Lösung von Aufgabe B.27.

- Die Berechnung der Verlustwärmestromdichte durch die einzelnen Wandschichten führt zu den Beziehungen

$$\dot{q} = \alpha_i(T_i - T_{pi}) \Rightarrow \frac{\dot{q}}{\alpha_i} = T_i - T_{pi} \quad (\text{B.310a})$$

$$\dot{q} = \frac{\lambda_p}{\delta_p}(T_{pi} - T_{zi}) \Rightarrow \dot{q} \frac{\delta_p}{\lambda_p} = T_{pi} - T_{zi} \quad (\text{B.310b})$$

$$\dot{q} = \frac{\lambda_z}{\delta_z}(T_{zi} - T_{za}) \Rightarrow \dot{q} \frac{\delta_z}{\lambda_z} = T_{zi} - T_{za} \quad (\text{B.310c})$$

$$\dot{q} = \alpha_a(T_{za} - T_a) \Rightarrow \frac{\dot{q}}{\alpha_a} = T_{za} - T_a, \quad (\text{B.310d})$$

mit den unbekanntenen Temperaturen  $T_{pi}$  an der Innenseite des Putzes,  $T_{zi}$  an der Innenseite der Ziegelwand (zugleich Außenseite des Putzes) und  $T_{za}$  an der Außenseite der Ziegelwand. Aus (B.310) ergibt sich für die Temperaturdifferenz

$$\begin{aligned} (T_i - T_a) &= (T_i - T_{pi}) + (T_{pi} - T_{zi}) + (T_{zi} - T_{za}) + (T_{za} - T_a) \\ &= \frac{\dot{q}}{\alpha_i} + \dot{q} \frac{\delta_p}{\lambda_p} + \dot{q} \frac{\delta_z}{\lambda_z} + \frac{\dot{q}}{\alpha_a} \end{aligned} \quad (\text{B.311})$$

und daher für die gesuchte Verlustwärmestromdichte

$$\dot{q} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_p}{\lambda_p} + \frac{\delta_z}{\lambda_z} + \frac{1}{\alpha_a}} (T_i - T_a). \quad (\text{B.312})$$

Der Proportionalitätsfaktor zwischen der Temperaturdifferenz und der Wärme-

stromdichte wird auch als Wärmedurchgangskoeffizient

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_p}{\lambda_p} + \frac{\delta_z}{\lambda_z} + \frac{1}{\alpha_a}} \quad (\text{B.313})$$

bezeichnet.

2. Die Forderung nach einem unveränderten Wärmeverlust bedingt die Beziehung

$$\dot{q} = \dot{q}_{neu}. \quad (\text{B.314})$$

Aufgrund der Dirichlet Randbedingung zufolge der integrierten Heizung in der gedämmten Wand, folgt

$$\dot{q}_{neu} = k_{neu}(T_p - T_a) \quad (\text{B.315})$$

und somit

$$k(T_i - T_a) = k_{neu}(T_p - T_a). \quad (\text{B.316})$$

Der Wärmedurchgangskoeffizient  $k_{neu}$  der gedämmten Wand ergibt sich gemäß der obigen Vorgangsweise bzw. gemäß (3.89) zu

$$k_{neu} = \frac{1}{\frac{\delta_d}{\lambda_d} + \frac{\delta_z}{\lambda_z} + \frac{1}{\alpha_a}}. \quad (\text{B.317})$$

Aus (B.316) und (B.317) folgt die gesuchte Dicke der Dämmschicht

$$\delta_d = \lambda_d \left( \frac{T_p - T_a}{k(T_i - T_a)} - \frac{\delta_z}{\lambda_z} - \frac{1}{\alpha_a} \right). \quad (\text{B.318})$$

3. Per Annahme ist die Temperatur in der beheizten Putzschicht homogen. Somit ist in diesem Bereich die Temperatur  $T_p$  konstant über  $x$ . In den äußeren beiden Schichten nimmt die Temperatur mit der Koordinate  $x$  linear ab, wobei der niedrigere Wärmeleitkoeffizient der Dämmung  $\lambda_d < \lambda_z$  zu einer doppelt so hohen Temperaturabnahme bezogen auf die  $x$ -Koordinate führt.

$$T(x) = \begin{cases} T_p & \text{für } 0 \leq x < \delta_p \\ T_p - \dot{q} \frac{x - \delta_p}{\lambda_d} & \text{für } \delta_p \leq x < \delta_p + \delta_d \\ T_p - \dot{q} \frac{\delta_d}{\lambda_d} - \dot{q} \frac{x - (\delta_p + \delta_d)}{\lambda_z} & \text{für } \delta_p + \delta_d \leq x \leq \delta_p + \delta_d + \delta_w \end{cases} \quad (\text{B.319})$$

Dieser Temperaturverlauf ist qualitativ in Abbildung B.40 skizziert.

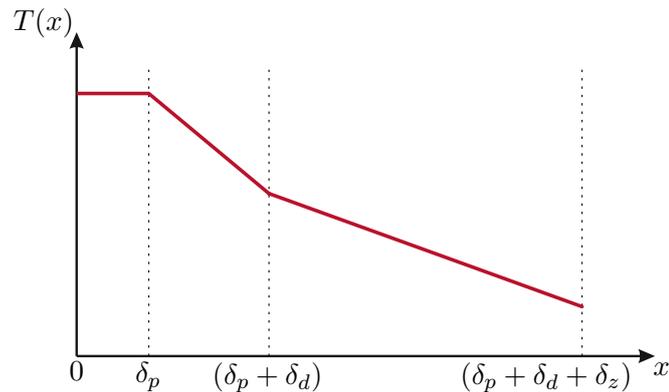


Abbildung B.40: Qualitativer Temperaturverlauf in der beheizten Wand.

4. Fasst man die Konturen B und W zur Kontur B+W zusammen, so liefert die Summationsregel (3.48)

$$F_{H,D} = 1 - F_{H,B+W} - F_{H,H} . \quad (\text{B.320})$$

Die Zusammenfassung der Konturen B und W erleichtert die Sichtfaktorberechnung, da damit direkt die zweite Berechnungsformel aus Tabelle 3.1 verwendet werden kann. Es wäre aber gleichermaßen auch möglich, die Sichtfaktoren  $F_{H,B}$  und  $F_{H,W}$  separat zu berechnen und zu addieren. Da es sich bei der Kontur H um eine ebene Wand handelt, gilt  $F_{H,H} = 0$ . Somit ergibt sich für den gesuchten Sichtfaktor

$$F_{H,D} = 1 - \underbrace{\frac{1}{2l_H} \left( l_H + \sqrt{y^2 + (x - l_H)^2} - \sqrt{y^2 + x^2} \right)}_{F_{H,B+W} \text{ aus Tabelle 3.1}} \quad (\text{B.321})$$

mit  $y = l_B$  und  $x = l_H - l_W$ , also schließlich

$$F_{H,D} = 1 - \frac{1}{2l_H} \left( l_H + \sqrt{l_B^2 + (-l_W)^2} - \sqrt{l_B^2 + (l_H - l_W)^2} \right) . \quad (\text{B.322})$$

5. Mit  $F_{H,H} = 0$  und  $F_{B,B} = 0$  (ebene Flächen) lautet die Sichtfaktorenmatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F_{H,U} & F_{H,B} \\ F_{U,H} & F_{U,U} & F_{U,B} \\ F_{B,H} & F_{B,U} & 0 \end{bmatrix} . \quad (\text{B.323})$$

Mit dem Reziprozitätsgesetz (3.46) und der Summationsregel (3.48) ergeben

sich die vier übrigen unbekanntenen Komponenten von  $\mathbf{F}$  in der Form

$$F_{B,H} = \frac{l_H}{l_B} F_{H,B} \quad (\text{B.324a})$$

$$F_{U,H} = \frac{l_H}{l_1 + l_2 + l_W} F_{H,U} \quad (\text{B.324b})$$

$$F_{U,B} = \frac{l_B}{l_1 + l_2 + l_W} F_{B,U} \quad (\text{B.324c})$$

$$F_{U,U} = 1 - \frac{1}{l_1 + l_2 + l_W} (l_B F_{B,U} + l_H F_{H,U}) . \quad (\text{B.324d})$$

6. Aus der stationären Wärmebilanz ( $dT/dt = 0$ ) folgt

$$\dot{q}_p = \dot{q}_{neu} + \dot{q}_i , \quad (\text{B.325})$$

mit  $\dot{q}_{neu}$  gemäß (B.315) und der Wärmestromdichte  $\dot{q}_i$  welche die Wand H (mit der Oberflächentemperatur  $T_p$ ) in das Rauminnere abgibt. Die Wärmestromdichte  $\dot{q}_i$  setzt sich aus Anteilen zufolge Konvektion und Wärmestrahlung zusammen, d. h.

$$\dot{q}_i = \underbrace{\alpha_i(T_p - T_i)}_{\text{Konvektion}} + \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \varepsilon (\mathbf{E} - \mathbf{F}(1 - \varepsilon))^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{F}) \sigma \begin{bmatrix} T_p^4 \\ T_U^4 \\ T_B^4 \end{bmatrix}}_{\text{Wärmestrahlung}} . \quad (\text{B.326})$$

Werden dieses Resultat und (B.315) in (B.325) eingesetzt, so folgt die gesuchte Heizleistungsdichte

$$\begin{aligned} \dot{q}_p &= k_{neu}(T_p - T_a) + \alpha_i(T_p - T_i) \\ &+ \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \varepsilon (\mathbf{E} - \mathbf{F}(1 - \varepsilon))^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{F}) \sigma \begin{bmatrix} T_p^4 \\ T_U^4 \\ T_B^4 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (\text{B.327})$$

**Aufgabe B.28 (Auskühlen eines Permanentmagnet-Synchronmotors).** Abbildung B.41 zeigt den vereinfachten Querschnitt eines Permanentmagnet-Synchronmotors (PMSM). Die Temperatur im Stator und im Rotor sollen jeweils als homogen angenommen werden. Als Wärmequelle fungiert die Statorwicklung (gesamter Stator), in der die homogen verteilte Verlustleistung  $P$  auftritt. Zwischen der Stator-Oberfläche und der Umgebungsluft mit der konstanten Temperatur  $T_\infty$  tritt konvektive Wärmeübertragung mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_\infty$  auf. Zwischen Rotor und Stator kommt es durch den Luftspalt zu konvektiver Wärmeübertragung mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_{RS}$ , welcher stark von der Drehzahl des Rotors abhängt. An den Stirnflächen des Motors herrschen adiabate Randbedingungen. Weiteres soll

Wärmeübertragung aufgrund von thermischer Strahlung vernachlässigt werden. Die Parameterwerte des Systems sind in Tabelle B.2 angegeben.

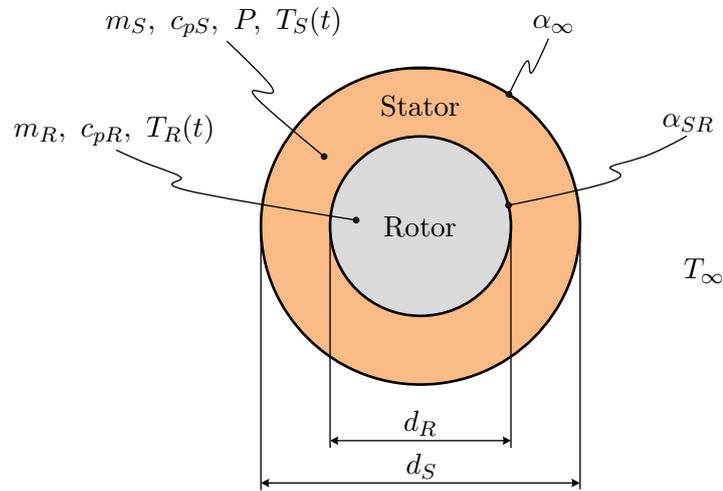


Abbildung B.41: Querschnitt einer elektrischen Maschine.

Parameter	Wert	Beschreibung
$l$	0.15 m	Länge des Motors
$d_R$	0.03 m	Durchmesser des Rotors
$d_S$	0.08 m	Durchmesser des Stators
$m_R$	0.2 kg	Masse des Rotors
$m_S$	0.25 kg	Masse des Stators
$c_{pR}$	380 J/(kg K)	Spezifische Wärmekapazität des Rotors
$c_{pS}$	380 J/(kg K)	Spezifische Wärmekapazität des Stators
$\alpha_{RS,0}$	100 W/(m <sup>2</sup> K)	Wärmeübergangskoeffizient zwischen Rotor und Stator im Stillstand
$\alpha_{RS,N}$	3750 W/(m <sup>2</sup> K)	Wärmeübergangskoeffizient zwischen Rotor und Stator bei Nenndrehzahl
$\alpha_\infty$	50 W/(m <sup>2</sup> K)	Wärmeübergangskoeffizient zwischen Statoroberfläche und Umgebung
$T_\infty$	20 °C	Umgebungstemperatur

Tabelle B.2: Parameterwerte einer elektrischen Maschine.

1. Der PMSM wird zunächst bei einer konstanten Last und Drehzahl (Nenndrehzahl) betrieben. Dementsprechend stellen sich für eine konstante ohmsche Verlustleistung  $P$  konstante Temperaturen ein. Bestimmen Sie die stationären Werte

der Temperaturen  $T_S$  und  $T_R$  für eine konstante Verlustleistung  $P = 56.55 \text{ W}$  im Stator.

2. Untersuchen Sie den Abkühlvorgang der elektrischen Maschine im Stillstand (Drehzahl 0, Verlustleistung  $P = 0 \text{ W}$ ). Verwenden Sie als Anfangsbedingungen die in Punkt 1 berechneten Temperaturen.
3. Untersuchen Sie den Abkühlvorgang der elektrischen Maschine nach Wegfallen der Last (verbleibende Verlustleistung  $P = 0.1 \text{ W}$ ) bei konstanter Drehzahl (Nenn Drehzahl). Verwenden Sie als Anfangsbedingungen die in Punkt 1 berechneten Temperaturen.

### Lösung von Aufgabe B.28.

1. Aus dem Energieerhaltungssatz für geschlossene Systeme (A.17) folgen die Differentialgleichungen für die beiden Temperaturen

$$m_{RCpR}\dot{T}_R = \alpha_{RS,N}ld_R\pi(T_S - T_R) \quad (\text{B.328a})$$

$$m_{SCpS}\dot{T}_S = P - \alpha_{RS,N}ld_R\pi(T_S - T_R) - \alpha_\infty ld_S\pi(T_S - T_\infty). \quad (\text{B.328b})$$

Führt man die Abkürzungen

$$k_R = \frac{\alpha_{RS,N}ld_R\pi}{m_{RCpR}}, \quad k_S = \frac{\alpha_{RS,N}ld_R\pi}{m_{SCpS}}, \quad k_\infty = \frac{\alpha_\infty ld_S\pi}{m_{SCpS}}, \quad u = \frac{1}{m_{SCpS}}P + k_\infty T_\infty$$

ein, so lässt sich (B.328) in Matrixschreibweise

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_R \\ T_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_R & k_R \\ k_S & -(k_S + k_\infty) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_R \\ T_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad (\text{B.329})$$

darstellen. Die gesuchten stationären Temperaturen ergeben sich aus der Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B}u_{ss} \quad (\text{B.330})$$

mit  $u_{ss} = \frac{1}{m_{SCpS}}P + k_\infty T_\infty$  und  $P = 56.55 \text{ W}$  in der Form  $\mathbf{x}_{ss} = [T_{R,ss} \quad T_{S,ss}]^T = [50 \text{ °C} \quad 50 \text{ °C}]^T$ .

2. Da nun der Rotor still steht, muss  $\alpha_{RS,N}$  in den Abkürzungen  $k_R$  und  $k_S$  durch  $\alpha_{RS,0}$  ersetzt werden. Außerdem ist für die Verlustleistung  $P = 0 \text{ W}$  zu setzen. Eine Möglichkeit zur Lösung des linearen Anfangswertproblems (B.329) ergibt sich über die Laplace-Transformation. Hier reduziert sich die

Lösung im Bildbereich auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems. Die Laplace-Transformierte von (B.329) lautet

$$s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_{ss} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B}\hat{u}(s), \quad (\text{B.331})$$

mit dem Anfangswert  $\mathbf{x}_{ss}$  aus Punkt 1. Die Lösung im Bildbereich ergibt sich daher in der Form

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = \underbrace{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}}_{= \mathbf{\Phi}(s)} (\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B}\hat{u}(s)) \quad (\text{B.332})$$

mit

$$\mathbf{\Phi}(s) = \frac{1}{s^2 + (k_R + k_S + k_\infty)s + k_R k_\infty} \begin{bmatrix} s + k_S + k_\infty & k_R \\ k_S & s + k_R \end{bmatrix} \quad (\text{B.333})$$

bzw.

$$\hat{T}_R(s) = \frac{(s + k_R + k_\infty)T_{R,ss} + k_R(T_{S,ss} + \hat{u}(s))}{s^2 + (k_R + k_S + k_\infty)s + k_R k_\infty} \quad (\text{B.334a})$$

$$\hat{T}_S(s) = \frac{k_S T_{R,ss} + (s + k_R)(T_{S,ss} + \hat{u}(s))}{s^2 + (k_R + k_S + k_\infty)s + k_R k_\infty}. \quad (\text{B.334b})$$

Nach Einsetzen der Laplace-Transformierten des konstanten Eingangssignals

$$\hat{u}(s) = \underbrace{\left( \frac{1}{m_S c_{pS}} P + k_\infty T_\infty \right)}_{= \bar{u}} \sigma(s) \quad (\text{B.335})$$

mit der Sprungfunktion  $\sigma(s)$  können durch Partialbruchzerlegung und inverse Laplace-Transformation die Zeitverläufe

$$T_R(t) = \left( 0.178 T_{R,ss} + 0.503 T_{S,ss} \right) e^{s_1 t} + \left( 0.282 T_{R,ss} - 0.503 T_{S,ss} \right) e^{s_2 t} + \left( 50.399 \text{ s} - 61.542 \text{ s} e^{s_1 t} + 11.143 \text{ s} e^{s_2 t} \right) \bar{u} \quad (\text{B.336a})$$

$$T_S(t) = \left( 0.402 T_{R,ss} + 0.282 T_{S,ss} \right) e^{s_1 t} + \left( -0.402 T_{R,ss} + 0.718 T_{S,ss} \right) e^{s_2 t} + \left( 50.399 \text{ s} - 34.496 \text{ s} e^{s_1 t} - 15.903 \text{ s} e^{s_2 t} \right) \bar{u} \quad (\text{B.336b})$$

mit den konstanten Werten  $s_1 = -0.00817 \text{ s}^{-1}$ ,  $s_2 = -0.04515 \text{ s}^{-1}$  und

$$\bar{u} = \frac{1}{m_S c_{pS}} P + k_\infty T_\infty = 0 \frac{^\circ\text{C}}{\text{s}} + \frac{50 \cdot 0.15 \cdot 0.08 \cdot \pi}{0.25 \cdot 380} 20 \frac{^\circ\text{C}}{\text{s}} = 0.3968 \frac{^\circ\text{C}}{\text{s}}$$

berechnet werden.

Die Temperaturen während des Abkühlvorgangs sind in Abbildung B.42 dargestellt. Der Stator kühlt erwartungsgemäß schneller ab als der Rotor.

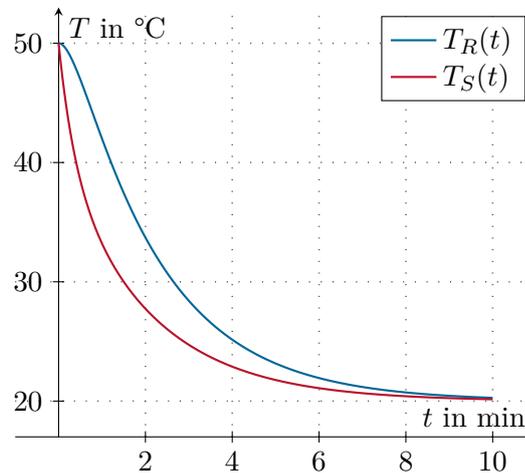


Abbildung B.42: Abkühlvorgang des Permanentmagnet-Synchronmotors bei Stillstand.

3. Dreht sich die elektrische Maschine nach Wegfallen der Last mit konstanter Drehzahl (Nenn Drehzahl) weiter, so ergibt sich ein höherer Wärmeübertragungskoeffizient, d. h. es ist wieder  $\alpha_{RS,N}$  statt  $\alpha_{RS,0}$  zu verwenden. Eine geringe Verlustleistung in Höhe von  $P = 0.1 \text{ W}$  wird zur Aufrechterhaltung der Drehzahl verbraucht. Abgesehen davon ist die Rechnung gleich jener in Punkt 2. Die resultierenden Temperaturverläufe sind in Abbildung B.43 dargestellt. Aufgrund des deutlich höheren Wärmeübertragungskoeffizienten  $\alpha_{RS,N}$  ist nun der Temperaturunterschied zwischen Rotor und Stator geringer als in Punkt 2.

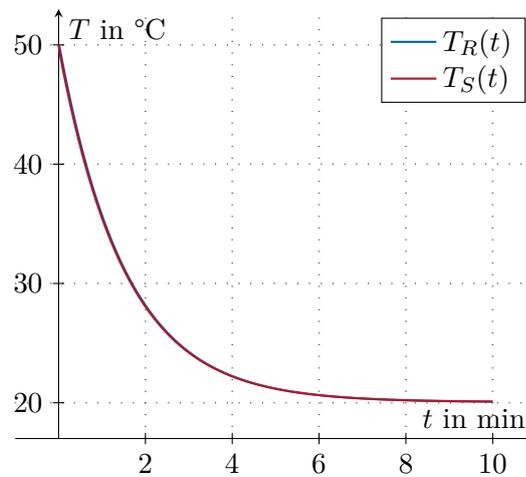


Abbildung B.43: Abkühlvorgang des Permanentmagnet-Synchronmotors bei Nenn-drehzahl ohne Last.

*Aufgabe B.29 (Gehäuse einer elektrischen Maschine).*

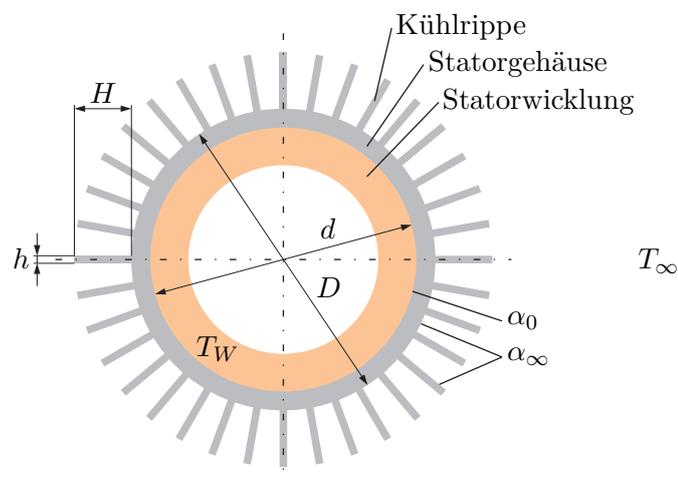


Abbildung B.44: Querschnitt durch den Stator einer elektrischen Maschine.

Abbildung B.44 zeigt einen Querschnitt durch den Stator einer elektrischen Maschine. Die Statorwicklung hat den Außendurchmesser  $d$  und die homogene Temperatur  $T_W$ . Das Statorgehäuse wurde aus Grauguss mit der konstanten Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  hergestellt. Auf das Gehäuserohr mit dem Außendurchmesser  $D$  sind  $N$  Kühlrippen mit dem Rechteckquerschnitt  $H \times h$  aufgesetzt.

Die Temperatur im Gehäuserohr kann näherungsweise stets als radialsymmetrisch und homogen in axialer Richtung betrachtet werden. Zwischen der Gehäuseoberfläche und der Umgebungsluft mit der konstanten Temperatur  $T_\infty$  tritt konvektive Wärmeübertragung mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_\infty$  auf. An der Kontaktfläche zwischen Statorwicklung und Statorgehäuse tritt Wärmeleitung mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_0$  auf. Nach innen hin soll für die Statorwicklung eine adiabate Randbedingung angenommen werden. In der Statorwicklung wird die auf die Motorlänge bezogene Verlustleistung  $P^\circ$  vollständig in Wärme umgewandelt.

Berechnen Sie für die in Tabelle B.3 angegebenen Parameterwerte die Temperatur  $T_W$  der Statorwicklung, die sich im stationären Betriebsfall einstellt. Untersuchen Sie dabei die Fälle  $N = 0$  (ohne Kühlrippen) und  $N = 100$  (mit Kühlrippen).

Parameter	Wert
$d$	500 mm
$D$	530 mm
$h$	4 mm
$H$	80 mm
$P^\circ$	6 kW/m
$T_\infty$	20 °C
$\alpha_0$	5000 W/(m <sup>2</sup> K)
$\alpha_\infty$	8 W/(m <sup>2</sup> K)
$\lambda$	50 W/(m K)

Tabelle B.3: Parameterwerte für das Gehäuse einer elektrischen Maschine.

*Lösung von Aufgabe B.29.* Es sei  $T_G$  die (homogene) Oberflächentemperatur des Gehäuserohres. Der auf die Rohrlänge bezogene Wärmedurchgangskoeffizient zwischen der Statorwicklung und der äußeren Mantelfläche des Gehäuserohres (Durchmesser  $D$ ) lautet analog zu (3.96)

$$k_0^\circ = \frac{2\pi}{\frac{2}{d\alpha_0} + \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{D}{d}\right)}, \quad (\text{B.337})$$

so dass für den längenbezogenen Gesamtwärmestrom

$$\dot{q}^\circ = (T_W - T_G)k_0^\circ \quad (\text{B.338})$$

gilt.

Es soll nun  $L$  die Länge des Gehäuserohres bezeichnen und  $L \gg h$  gelten. Folglich haben die Rippen die Querschnittsfläche  $A = hL$  und den Umfang  $P = 2(h + L) \approx 2L$ . Über eine einzelne Rippe fließt gemäß (3.101b) der auf die Rohrlänge bezogene

Wärmestrom

$$\dot{q}_f^\circ = \lambda h m (T_G - T_\infty) \frac{\lambda m \sinh(mH) + \alpha_\infty \cosh(mH)}{\lambda m \cosh(mH) + \alpha_\infty \sinh(mH)} \quad (\text{B.339})$$

mit der Abkürzung  $m = \sqrt{\alpha_\infty P / (\lambda A)} \approx \sqrt{2\alpha_\infty / (\lambda h)}$  ab. Über  $N$  Rippen fließt daher der bezogene Wärmestrom  $N\dot{q}_f^\circ$  ab.

Die Umfangslänge der verbleibenden freien Oberfläche des Gehäuserohres (jener Oberflächenbereich, der nicht von Rippen bedeckt ist) lautet in guter geometrischer Näherung  $D\pi - Nh$ . Folglich ergibt sich für den bezogenen Wärmestrom über diese verbleibende freie Oberfläche

$$\dot{q}_p^\circ = (D\pi - Nh)\alpha_\infty (T_G - T_\infty) . \quad (\text{B.340})$$

Der bezogene Wärmestrom  $\dot{q}^\circ$  gemäß (B.338) muss stationär nicht nur der bezogenen Verlustleistung  $P^\circ$  entsprechen, sondern auch der Summe der bezogenen Wärmeströme über die Rippen und über die verbleibende freie Oberfläche des Gehäuserohres, d. h. es muss

$$\begin{aligned} \dot{q}^\circ &= (T_W - T_G)k_0^\circ = N\dot{q}_f^\circ + \dot{q}_p^\circ \\ &= (T_G - T_\infty) \left( N\lambda h m \frac{\lambda m \sinh(mH) + \alpha_\infty \cosh(mH)}{\lambda m \cosh(mH) + \alpha_\infty \sinh(mH)} + (D\pi - Nh)\alpha_\infty \right) \end{aligned} \quad (\text{B.341})$$

gelten. Nach Elimination der unbekanntem Größe  $T_G$  folgt daraus

$$\dot{q}^\circ = (T_W - T_\infty)k^\circ \quad (\text{B.342a})$$

mit dem bezogenen Wärmedurchgangskoeffizienten

$$k^\circ = \frac{1}{\frac{1}{k_0^\circ} + \left( N\lambda h m \frac{\lambda m \sinh(mH) + \alpha_\infty \cosh(mH)}{\lambda m \cosh(mH) + \alpha_\infty \sinh(mH)} + (D\pi - Nh)\alpha_\infty \right)^{-1}} \quad (\text{B.342b})$$

für die gesamte Anordnung. Gleichsetzen von  $\dot{q}^\circ$  mit der längenbezogenen Verlustleistung  $P^\circ$  liefert daher die gesuchte stationäre Wicklungstemperatur

$$T_W = T_\infty + \frac{P^\circ}{k^\circ} . \quad (\text{B.343})$$

Abschließend werden die Parameterwerte eingesetzt. Aus (B.337) ergibt sich

$$k_0^\circ = 3196.93 \frac{\text{W}}{\text{m K}} .$$

Im Falle  $N = 0$  (keine Rippen) folgen aus (B.342b) und (B.343) die Werte

$$k^\circ = 13.27 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$T_W = 472.3^\circ\text{C}.$$

Im Fall  $N = 100$  ergeben sich die Werte

$$k^\circ = 117.47 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$T_W = 71.1^\circ\text{C}.$$

Um die Wicklung vor Überhitzung zu schützen, muss das Statorgehäuse also mit Rippen ausgestattet werden.

**Aufgabe B.30 (Doppelrohr-Gegenstromwärmetauscher).** Schmieröl soll mit dem in Abbildung B.45 skizzierten Doppelrohr-Gegenstromwärmetauscher von  $100^\circ\text{C}$  auf  $60^\circ\text{C}$  gekühlt werden. Durch das innere Rohr fließt Kühlwasser, zwischen innerem und äußerem Rohr strömt in entgegengesetzte Richtung das Öl. Der Wärmetauscher ist an der Mantelfläche als adiabat gegenüber der Umgebung zu behandeln (perfekte Isolation des äußeren Rohres). Der thermische Widerstand und die Dicke des inneren Rohres seien vernachlässigbar. Der Wärmetauscher befindet sich in einem stationären Betriebspunkt.

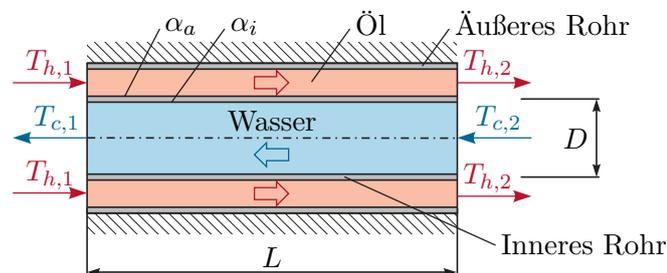


Abbildung B.45: Doppelrohr-Gegenstromwärmetauscher.

Gegeben sind die folgenden Größen.

Kühlwasser:

- Massenstrom  $0.2 \text{ kg/s}$
- Eintrittstemperatur  $T_{c,2} = 30^\circ\text{C}$
- Spezifische Wärmekapazität  $c_{p,c} = 4178 \text{ J}/(\text{kg K})$

Schmieröl:

- Massenstrom  $0.1 \text{ kg/s}$
- Eintrittstemperatur  $T_{h,1} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$
- Austrittstemperatur  $T_{h,2} = 60 \text{ }^\circ\text{C}$
- Spezifische Wärmekapazität  $c_{p,h} = 2131 \text{ J/(kg K)}$

Wärmetauscher:

- Durchmesser des inneren Rohres  $D = 25 \text{ mm}$
- Wasserseitiger Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_i = 2250 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$
- Ölseitiger Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_a = 115.20 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$

Gesucht sind die erforderliche Länge  $L$  des Wärmetauschers, die Austrittstemperatur  $T_{c,1}$  des Kühlwassers und die Temperaturverläufe beider Fluide.

*Lösung von Aufgabe B.30.* Es können direkt die Ergebnisse aus Abschnitt 3.4.4 verwendet werden. Die Trennwand zwischen den beiden Fluiden hat die effektive Breite

$$b = D\pi \quad (\text{B.344})$$

und für den Wärmedurchgangskoeffizienten gilt gemäß (3.89)

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_a}} \quad (\text{B.345})$$

Mit der Hilfsgröße

$$K(x) = \int_0^x k(\tilde{x})b(\tilde{x}) d\tilde{x} = kb x = \frac{D\pi}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_a}} x \quad (\text{B.346})$$

gemäß (3.110b) folgen aus (3.111) die stationären Temperaturverläufe

$$T_h(x) = T_{h,1} + \frac{\dot{m}_c c_{p,c}(T_{c,1} - T_{h,1})}{\dot{m}_h c_{p,h} + \dot{m}_c c_{p,c}} \left( 1 - \exp\left(-\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}}\right) K(x)\right) \right) \quad (\text{B.347a})$$

$$T_c(x) = T_{c,1} + \frac{\dot{m}_h c_{p,h}(T_{h,1} - T_{c,1})}{\dot{m}_h c_{p,h} + \dot{m}_c c_{p,c}} \left( 1 - \exp\left(-\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}}\right) K(x)\right) \right) \quad (\text{B.347b})$$

mit  $x \in [0, L]$  und den Abkürzungen  $T_{h,1} = T_h(0)$  und  $T_{c,1} = T_c(0)$ . Hierbei ist noch die Größe  $T_{c,1}$  ungekannt und die Massenströme sind mit den für den Gegenstromwärmetauscher korrekten Vorzeichen  $\dot{m}_c < 0$  und  $\dot{m}_h > 0$  einzusetzen. Für die

Temperaturen am Rand  $x = L$  liefert die Auswertung von (B.347)

$$T_{h,2} = T_{h,1} + \frac{\dot{m}_c c_{p,c}(T_{c,1} - T_{h,1})}{\dot{m}_h c_{p,h} + \dot{m}_c c_{p,c}} \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}} \right) kbL \right) \right) \quad (\text{B.348a})$$

$$T_{c,2} = T_{c,1} + \frac{\dot{m}_h c_{p,h}(T_{h,1} - T_{c,1})}{\dot{m}_h c_{p,h} + \dot{m}_c c_{p,c}} \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}} \right) kbL \right) \right) \quad (\text{B.348b})$$

mit den Abkürzungen  $T_{h,2} = T_h(L)$  und  $T_{c,2} = T_c(L)$ . Aus (B.348) folgen nach kurzer Umformung die gesuchten Größen

$$L = -\ln \left( 1 + \frac{T_{h,1} - T_{h,2}}{c_1(T_{c,2} - T_{h,1}) + c_2(T_{h,2} - T_{h,1})} \right) \frac{1}{c_3 kb} \quad (\text{B.349a})$$

$$T_{c,1} = T_{c,2} + \frac{\dot{m}_h c_{p,h}}{\dot{m}_c c_{p,c}} (T_{h,2} - T_{h,1}) \quad (\text{B.349b})$$

mit den Abkürzungen

$$c_1 = \frac{\dot{m}_c c_{p,c}}{\dot{m}_h c_{p,h} + \dot{m}_c c_{p,c}} \quad (\text{B.350a})$$

$$c_2 = \frac{\dot{m}_h c_{p,h}}{\dot{m}_h c_{p,h} + \dot{m}_c c_{p,c}} \quad (\text{B.350b})$$

$$c_3 = \frac{1}{\dot{m}_h c_{p,h}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{p,c}} \quad (\text{B.350c})$$

**Hinweis:** Das Ergebnis (B.349b) kann alternativ auch direkt aus der Energiebilanz der ein- und ausströmenden Fluide berechnet werden.

Aus der numerischen Auswertung von (B.349) folgen die erforderliche Länge  $L = 22.9\text{m}$  des Wärmetauschers und die Austrittstemperatur  $T_{c,1} = 40.2\text{°C}$  des Kühlwassers. Die stationären Temperaturverläufe der Fluide gemäß (B.348) sind in Abbildung B.46 dargestellt.

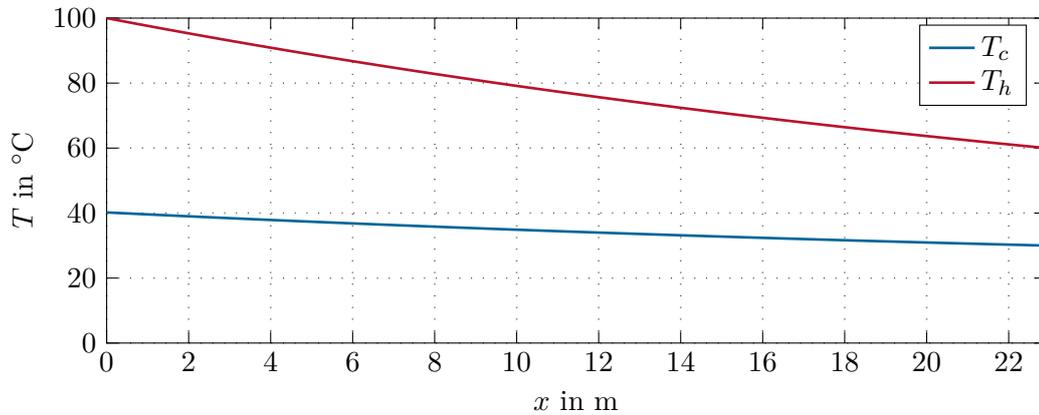


Abbildung B.46: Stationäre Temperaturverläufe im Doppelrohr-Gegenstromwärmetauscher.

**Aufgabe B.31 (Finite Differenzen Methode für ein durchströmtes Rohr).** Ein Vierkantrohr wird von einem inkompressiblen Fluid durchströmt (siehe Abbildung B.47). Das Rohr hat die Länge  $L$ , den inneren Umfang  $U$ , die innere Querschnittsfläche  $A$  und die Temperatur  $T_w$ . Das Fluid besitzt die Temperatur  $T(x, t)$  mit dem Anfangswert  $T(x, 0) = T_a(x)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  durch das Rohr und hat die Dichte  $\rho$ , die spezifische Wärmekapazität  $c_p$ , sowie die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ . Diese Parameter seien konstant und homogen. Der Druck im Rohr sei konstant. Am offenen Rohrende bei  $x = 0$  fließt das Fluid mit der Temperatur  $T_0 > T_w$  in das Rohr ein. Bei  $x = L$  strömt das Fluid aus dem Rohr aus, wobei hier der räumliche Temperaturgradient Null sein soll. Zwischen dem Fluid und der Rohrwand findet ein konvektiver Wärmeaustausch mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  statt.

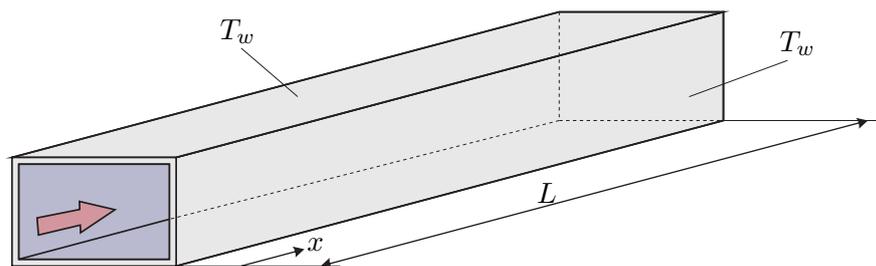


Abbildung B.47: Mit einem Fluid durchströmtes Vierkantrohr.

Es wird angenommen, dass aufgrund von Verwirbelungen die Temperatur des Fluids über den Rohr-Querschnitt näherungsweise homogen ist. In Längsrichtung ( $x$ -Richtung) soll die Temperaturverteilung durch eine partielle Differentialgleichung samt

zugehörigen Randbedingungen beschrieben werden. Weiters soll eine räumliche Diskretisierung durch Anwenden der Finite Differenzen Methode mit einem regelmäßigen Gitter (siehe Abb. B.48) vorgenommen werden. Das so erhaltene Anfangswertproblem soll in der Zustandsraumdarstellung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T}(t) = \mathbf{A} \mathbf{T}(t) + \mathbf{b}_0 T_0 + \mathbf{b}_w T_w \tag{B.351}$$

mit den Eingängen  $T_0$  und  $T_w$  und dem Zustandsvektor  $\mathbf{T}$  angegeben werden.

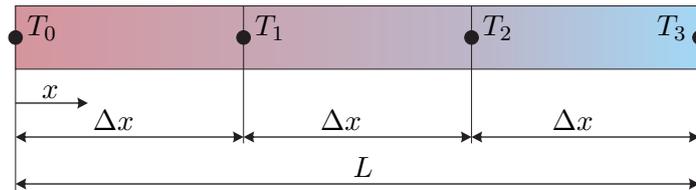


Abbildung B.48: Gitterpunkte für die örtliche Diskretisierung.

Lösung von Aufgabe B.31.

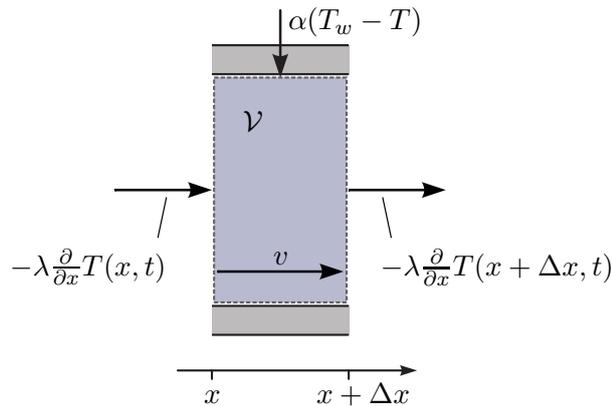


Abbildung B.49: Kontrollvolumen.

Die Beschreibung des Temperaturfeldes im Fluid wird im Folgenden über den Energieerhaltungssatz für offene Systeme gemäß (A.23) hergeleitet. Wie in Abbildung B.49 gezeigt, wird ein ortsfestes Kontrollvolumen  $\mathcal{V}$  definiert durch das Intervall  $(x, x + \Delta x)$  betrachtet. Da das Fluid inkompressibel ist, gilt  $c_p = c_v$  (vgl. Abschnitt A.4). Die kinetische Energie des Fluids ist konstant (konstante Strömungsgeschwindigkeit, inkompressibles Fluid) und kann daher in der Betrachtung vernachlässigt werden. Es tritt keine potentielle Energie auf. Es treten keine Druckänderungen auf, d. h.  $dp = 0$ . Folglich gilt  $e = u = h = c_p T$ , wobei hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit die

Referenztemperatur zu Null gesetzt wurde. Mit diesen Vereinfachungen folgt aus (A.23)

$$\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial \rho e(x', t)}{\partial t} A dx' - \rho h(x, t) Av + \rho h(x + \Delta x, t) Av = \rho c_p A \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial T(x', t)}{\partial t} dx' + \rho c_p (T(x + \Delta x, t) - T(x, t)) Av = \dot{Q} + P_t + P_{el} , \quad (\text{B.352})$$

wobei dem System weder technische noch elektrische Arbeit zugeführt wird und daher  $P_t = 0$  und  $P_{el} = 0$  gilt. Der Term  $\dot{Q}$  beinhaltet alle Wärmeflüsse in das Kontrollvolumen  $\mathcal{V}$  und setzt sich gemäß (A.11) wie folgt zusammen

$$\dot{Q} = \underbrace{A\lambda \left( \frac{\partial}{\partial x} T(x + \Delta x, t) - \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) \right)}_{\text{Wärmeleitung im Fluid in Richtung } x} + \underbrace{\int_x^{x+\Delta x} U\alpha (T_w - T(x', t)) dx'}_{\text{Wärmeaustausch mit Rohrwand}} . \quad (\text{B.353})$$

Einsetzen von (B.353) in (B.352) führt auf die integrale Formulierung

$$\begin{aligned} \rho A c_p \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial t} T(x', t) dx' + \rho c_p A v (T(x + \Delta x, t) - T(x, t)) &= \\ = A\lambda \left( \frac{\partial}{\partial x} T(x + \Delta x, t) - \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) \right) + U\alpha \int_x^{x+\Delta x} (T_w - T(x', t)) dx' . \end{aligned} \quad (\text{B.354})$$

Um aus (B.354) eine partielle Differentialgleichung zur Beschreibung des Temperaturfeldes im Fluid abzuleiten kann wahlweise der Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$  durchgeführt werden oder der Gaußsche Integralsatz verwendet werden.

- **Möglichkeit 1, Grenzübergang:** Für  $\Delta x \rightarrow 0$  gilt

$$\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial t} T(x', t) dx' \approx \Delta x \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) \quad (\text{B.355a})$$

$$T(x + \Delta x, t) \approx T(x, t) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) \quad (\text{B.355b})$$

$$\int_x^{x+\Delta x} (T_w - T(x', t)) dx' \approx \Delta x (T_w - T(x, t)) . \quad (\text{B.355c})$$

Einsetzen dieser Beziehungen in (B.354) und Division durch  $A\Delta x$  führt auf

$$\rho c_p \left( \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) + v \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) \right) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t) + \frac{U}{A} \alpha (T_w - T(x, t)) . \quad (\text{B.356})$$

- **Möglichkeit 2, Gaußscher Integralsatz:** Gemäß dem Gaußschen Integralsatz gilt

$$T(x + \Delta x, t) - T(x, t) = \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x'} T(x', t) dx' \quad (\text{B.357a})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x + \Delta x, t) - \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) = \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} T(x', t) dx'. \quad (\text{B.357b})$$

Einsetzen dieser Beziehungen in (B.354), Umformung und Division durch  $A$  führt auf die integrale Form

$$0 = \int_x^{x+\Delta x} \left( -\rho c_p \left( \frac{\partial}{\partial t} T(x', t) + v \frac{\partial}{\partial x'} T(x', t) \right) + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x'^2} T(x', t) + \frac{U}{A} \alpha (T_w - T(x', t)) \right) dx'. \quad (\text{B.358})$$

Die Gleichung (B.358) muss für beliebige  $x$  und  $\Delta x$  gelten, weshalb der Integrand in (B.358) identisch Null sein muss. Dies ergibt wieder (B.356).

Im nächsten Schritt werden für die Ränder  $x = 0$  und  $x = L$  die Randbedingungen angegeben. Aus der Systembeschreibung ergeben sich diese zu

$$T(0, t) = T_0 > T_w, \quad (\text{B.359a})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} T(L, t) = 0. \quad (\text{B.359b})$$

Um eine eindeutige Lösung für  $T(x, t)$  zu erhalten, wird noch die Anfangsbedingung  $T(x, 0) = T_a(x)$  benötigt.

Zur numerischen Lösung dieses Anfangs-Randwertproblems wird die Finite Differenzen Methode herangezogen. Wie in Abbildung B.48 angegeben, besteht das hierzu verwendete regelmäßige Gitter aus vier Knotenpunkten mit der Ortsschrittweite  $\Delta x = L/3$ . Die Fluidtemperaturen an den Knotenpunkten  $j = 0, \dots, 3$  werden mit  $T_j(t) = T(j\Delta x, t)$  abgekürzt.

Die vorliegende Gleichung (B.356) ist eine sogenannte Diffusions-Konvektions-Reaktions-Gleichung. Sie beinhaltet einen Diffusionsterm (zweite Ortsableitungen) und einen Transportterm (erste Ortsableitung). Im Folgenden wird der Diffusionsterm immer mit dem zentralen Differenzenquotienten (letzte Zeile in Tabelle 3.2) approximiert. Je nachdem, ob der Diffusionsterm oder der Transportterm dominant ist, bietet sich die Verwendung eines anderen Differenzenquotienten zur Approximation des Transportterms an. Der Transportterm wird daher einmal mit dem Rückwärtsdifferenzenquotienten (zweite Zeile in Tabelle 3.2) und einmal mit dem zentralen Differenzenquotienten (dritte Zeile in Tabelle 3.2) approximiert.

- **Zentraler Differenzenquotient für Transportterm:** Die Ortsableitungen

werden in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x} T(j\Delta x, t) \approx \frac{1}{2\Delta x} (T_{j+1}(t) - T_{j-1}(t)) \quad (\text{B.360a})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(j\Delta x, t) \approx \frac{1}{\Delta x^2} (T_{j+1}(t) - 2T_j(t) + T_{j-1}(t)) \quad (\text{B.360b})$$

approximiert. Für die Randbedingungen gilt (vgl. Abschnitt 3.6.1)

$$T_0 = T_0(t) \quad (\text{B.361a})$$

$$0 = \frac{1}{2\Delta x} (T_4(t) - T_2(t)) \implies T_4(t) = T_2(t), \quad (\text{B.361b})$$

wobei  $T_4(t)$  die Temperatur an einem virtuellen Knotenpunkt mit der Position  $L + \Delta x$  (d. h. außerhalb des betrachteten Gebiets  $(0, L)$ ) ist. Durch Einsetzen von (B.360) in (B.356) ergibt sich das für  $j = 1, 2, 3$  gültige Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{d}{dt} T_j(t) = & \frac{\lambda}{\Delta x^2} (T_{j+1}(t) - 2T_j(t) + T_{j-1}(t)) - \\ & - \frac{\rho c_p v}{2\Delta x} (T_{j+1}(t) - T_{j-1}(t)) - \frac{U\alpha}{A} (T_j(t) - T_w). \end{aligned} \quad (\text{B.362})$$

Berücksichtigung der Randbedingungen (B.361), Division durch  $\rho c_p$  und Umstellen der einzelnen Terme liefert die Zustandsraumdarstellung (B.351) mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{T}(t) = [T_1(t), T_2(t), T_3(t)]^T$  und

$$\mathbf{A} = \frac{\lambda}{\rho c_p \Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} - \frac{v}{2\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{U\alpha}{\rho c_p A} \mathbf{E} \quad (\text{B.363a})$$

$$\mathbf{b}_0 = \left( \frac{\lambda}{\rho c_p \Delta x^2} + \frac{v}{2\Delta x} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.363b})$$

$$\mathbf{b}_w = \frac{U\alpha}{\rho c_p A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.363c})$$

- **Rückwärtsdifferenzenquotient für Transportterm:** Der Diffusionsterm wird weiterhin mit (B.360b) approximiert. Statt (B.360a) wird nun der Rückwärtsdifferenzenquotient

$$\frac{\partial}{\partial x} T(j\Delta x, t) \approx \frac{1}{\Delta x} (T_j(t) - T_{j-1}(t)) \quad (\text{B.364})$$

verwendet. Einsetzen von (B.364) in die Randbedingungen (B.359) ergibt

$$T_0 = T_0(t) \quad (\text{B.365a})$$

$$0 = \frac{1}{\Delta x}(T_3(t) - T_2(t)) \implies T_3(t) = T_2(t). \quad (\text{B.365b})$$

Es bleiben damit nur die Zustandsvariablen  $\mathbf{T}(t)=[T_1(t), T_2(t)]^T$  übrig. Für sie, d. h. für  $j = 1, 2$ , folgt nach Einsetzen von (B.360b) und (B.364) in (B.356) das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{d}{dt} T_j(t) &= \frac{\lambda}{\Delta x^2} (T_{j+1}(t) - 2T_j(t) + T_{j-1}(t)) - \\ &\quad - \frac{\rho c_p v}{\Delta x} (T_j(t) - T_{j-1}(t)) - \frac{U\alpha}{A} (T_j(t) - T_w). \end{aligned} \quad (\text{B.366})$$

Berücksichtigung der Randbedingungen (B.365), Division durch  $\rho c_p$  und Umstellen der einzelnen Terme liefert die Zustandsraumdarstellung (B.351) mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{T}(t) = [T_1(t), T_2(t)]^T$  und

$$\mathbf{A} = \frac{\lambda}{\rho c_p \Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{v}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{U\alpha}{\rho c_p A} \mathbf{E} \quad (\text{B.367a})$$

$$\mathbf{b}_0 = \left( \frac{\lambda}{\rho c_p \Delta x^2} + \frac{v}{\Delta x} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.367b})$$

$$\mathbf{b}_w = \frac{U\alpha}{\rho c_p A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.367c})$$

**Aufgabe B.32 (Elektrische Heckscheibenheizung).** Ein PKW besitze eine  $d = 8$  mm dicke Heckscheibe aus Glas mit den homogenen thermischen Eigenschaften  $\rho c_p = 2$  MJ/(m<sup>3</sup> K) und  $\lambda = 0.75$  W/(m<sup>2</sup> K). Der PKW steht für längere Zeit in einer Garage mit einer Raumtemperatur von  $T_A = 5$  °C. Während einer Ausfahrt bei einer konstanten Außentemperatur von  $T_\infty = -5$  °C fällt die innere Oberflächentemperatur der Heckscheibe unter den Taupunkt und die Scheibe beschlägt. Zehn Minuten nach Beginn der Fahrt wird die elektrische Heckscheibenheizung mit einer Heizleistung von  $p = 200$  W/m<sup>2</sup> eingeschaltet, um das Beschlagen der Scheibe zu verhindern. Die Lufttemperatur  $T_I$  im Inneren des Wagens wird von der Klimaanlage ab Beginn der Fahrt mit 2 °C/min erhöht bis sie  $T_{I,ss} = 20$  °C erreicht hat und danach während der gesamten Fahrt konstant auf diesem Wert gehalten.

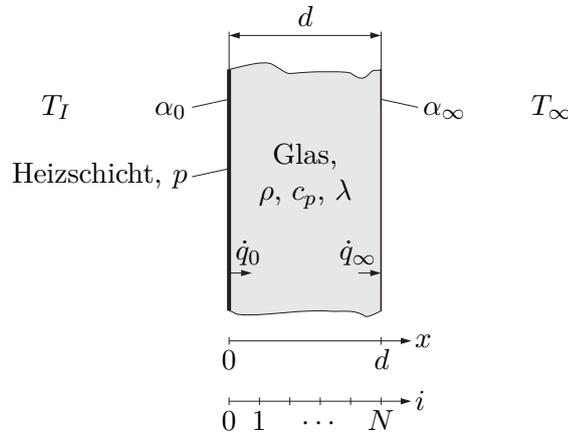


Abbildung B.50: Querschnitt einer Heckscheibe eines PKW.

Wie in Abbildung B.50 skizziert befindet sich die Heizschicht an der Innenseite der Heckscheibe. Vereinfacht soll die Heizschicht als vollflächig und vernachlässigbar dünn betrachtet werden. Folglich muss keine Wärmekapazität der Heizschicht berücksichtigt werden. Der Wärmeübergang zwischen Heizschicht und Glas ist ideal. Zwischen der Heizschicht und der Luft im Inneren des Wagens kommt es zu freier Konvektion mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_0 = 15 \text{ W/m}^2$ . Zwischen der Glasscheibe und der äußeren Umgebungsluft kommt es durch den Fahrtwind zu erzwungener Konvektion mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_\infty = 70 \text{ W/m}^2$ .

Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf des Temperaturfeldes in der Glasscheibe mithilfe der Finite Differenzen Methode. Untersuchen Sie die Auswirkung der gewählten Ortsschrittweite auf die erzielte Rechengenauigkeit sowohl im transienten als auch im stationären Fall.

*Lösung von Aufgabe B.32.* Es sei  $T(t, x)$  das 1-dimensionale Temperaturfeld in Dickenrichtung (Ortskoordinate  $x \in [0, d]$ ) der Heckscheibe. Um dieses Temperaturfeld zu berechnen, wird die 1-dimensionale Fouriersche Wärmeleitgleichung

$$\rho c_p \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2} \quad \forall x \in (0, d), t > 0 \quad (\text{B.368})$$

(vgl. (3.5a)) für temperaturunabhängige Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  numerisch mithilfe der Finite Differenzen Methode gelöst. In Ergänzung zu (B.368) werden noch die Anfangsbedingung

$$T(0, x) = T_A \quad \forall x \in [0, d] \quad (\text{B.369})$$

und die Randbedingungen

$$p_0(t) = \underbrace{-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}}_{= \dot{q}_0} + \alpha_0(T(t, 0) - T_I(t)) \quad \forall t > 0 \quad (\text{B.370a})$$

$$0 = \underbrace{\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d}}_{= -\dot{q}_\infty} + \alpha_\infty(T(t, d) - T_\infty) \quad \forall t > 0 \quad (\text{B.370b})$$

benötigt. Die Wärmestromdichten  $\dot{q}_0$  und  $\dot{q}_\infty$  an den Rändern der Glasschicht wurden hierbei in positiver Richtung  $x$  positiv gezählt (siehe Abbildung B.50). Die Randbedingungen berücksichtigen den konvektiven Wärmeaustausch mit der umgebenden Luft und die Heizleistung der Heizschicht mit der Zeitfunktion

$$p_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 10 \text{ min} \\ p & \text{sonst} \end{cases}. \quad (\text{B.371})$$

Die Randbedingung (B.370a) folgt direkt aus dem Energieerhaltungssatz angewandt auf die Heizschicht. Der rampenförmige Zeitverlauf der Lufttemperatur im Inneren des Wagens ist in der Form

$$T_I(t) = \min \left\{ T_A + t \cdot 2 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}, T_{I,ss} \right\} \quad (\text{B.372})$$

gegeben, wobei hier  $t$  in min einzusetzen ist. Die Anfangsbedingung (B.369) und der Wert  $T_I(0)$  entsprechen der Raumtemperatur in der Garage, da das Fahrzeug vor Beginn der Fahrt dort lange stand.

Ähnlich wie in Abschnitt 3.6.1 werden für die Anwendung der Finite Differenzen Methode das äquidistante Ortsgitter

$$x_i = i\Delta x \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad \Delta x = \frac{d}{N} \quad (\text{B.373})$$

mit  $N \geq 1$  und das äquidistante Zeitgitter

$$t_j = j\Delta t \quad j = 0, 1, \dots \quad (\text{B.374})$$

definiert. Die Temperaturen an den Gitterpunkten werden in der Form  $T_i(t) = T(t, x_i)$  und  $T_i^j = T(t_j, x_i) = T_i(t_j)$  abgekürzt. Unter Verwendung von  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  und der letzten Zeile von Tabelle 3.2 (zentraler Differenzenquotient für 2. Ableitung) ergibt sich aus (B.368) die örtlich diskretisierte Differentialgleichung

$$\dot{T}_i(t) = \frac{a}{\Delta x^2} (T_{i-1}(t) - 2T_i(t) + T_{i+1}(t)), \quad \forall t > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (\text{B.375})$$

Sie gilt grundsätzlich auch für die Randpunkte  $i = 0$  und  $i = N$ , wenn an den Positionen  $x_{-1}$  und  $x_{N+1}$  virtuelle Gitterpunkte eingeführt werden. Die dann auftretenden unbekanntenen Werte  $T_{-1}(t)$  und  $T_{N+1}(t)$  ergeben sich aus den Randbedingungen (B.370), wenn darin die Ortsableitung mithilfe der dritten Zeile von Tabelle 3.2 (zentraler Differenzenquotient für 1. Ableitung) approximiert wird. Dies liefert

$$p_0(t) = -\frac{\lambda}{2\Delta x}(T_1(t) - T_{-1}(t)) + \alpha_0(T_0(t) - T_I(t)) \quad \forall t > 0 \quad (\text{B.376a})$$

$$0 = \frac{\lambda}{2\Delta x}(T_{N+1}(t) - T_{N-1}(t)) + \alpha_\infty(T_N(t) - T_\infty) \quad \forall t > 0. \quad (\text{B.376b})$$

Werden aus diesen Gleichungen die Größen  $T_{-1}(t)$  und  $T_{N+1}(t)$  ausgedrückt und in (B.375) eingesetzt, so ergeben sich die örtlich diskretisierten Differentialgleichungen

$$\dot{T}_0(t) = \frac{2a}{\Delta x^2} \left( T_1(t) - T_0(t) + \frac{\Delta x}{\lambda} (p_0(t) - \alpha_0(T_0(t) - T_I(t))) \right) \quad (\text{B.377a})$$

$$\dot{T}_N(t) = \frac{2a}{\Delta x^2} \left( T_{N-1}(t) - T_N(t) - \frac{\Delta x}{\lambda} \alpha_\infty (T_N(t) - T_\infty) \right) \quad (\text{B.377b})$$

für die Randpunkte. Mit dem Vektor  $\mathbf{T}(t) = [T_0(t) \ \dots \ T_N(t)]^T$  können die Differentialgleichungen (B.375) und (B.377) nun in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{T}(t)) \\ &= \frac{a}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 \left( T_1(t) - T_0(t) + \frac{\Delta x}{\lambda} (p_0(t) - \alpha_0(T_0(t) - T_I(t))) \right) \\ T_0(t) - 2T_1(t) + T_2(t) \\ \vdots \\ T_{N-2}(t) - 2T_{N-1}(t) + T_N(t) \\ 2 \left( T_{N-1}(t) - T_N(t) - \frac{\Delta x}{\lambda} \alpha_\infty (T_N(t) - T_\infty) \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.378})$$

mit der Anfangsbedingung  $\mathbf{T}(0) = [T_A \ \dots \ T_A]^T$  zusammengefasst werden. Es handelt sich bei (B.378) um eine lineare zeitvariante Differentialgleichung. Zu ihrer numerischen Integration wird hier das Euler-Vorwärtsverfahren (siehe Abschnitt 3.6.1) verwendet, was mit der Abkürzung  $\mathbf{T}^j = \mathbf{T}(t_j)$  auf die explizite lineare Differenzengleichung

$$\mathbf{T}^{j+1} = \mathbf{T}^j + \Delta t \mathbf{f}(t_j, \mathbf{T}^j) \quad \forall j = 0, 1, \dots \quad (\text{B.379})$$

mit den Anfangswerten  $\mathbf{T}^0 = [T_A \ \dots \ T_A]^T$  führt. Damit kann die gesuchte numerische Lösung direkt in einem Computernumerikprogramm in einer Schleife über die Zeitindizes  $j$  ausgerechnet werden. Programmcode B.1 zeigt eine mögliche Implementierung der Rechnung in MATLAB.

Programmcode B.1: MATLAB-Code zur Berechnung des Temperaturfeldes in der Heckscheibe.

```
% Elektrische Heckscheibenheizung
```

```

% Berechnung des Temperaturfeldes mittels FDM
%=====

%% == init ==

    close all;
    clear;
    clc;

%% == define parameters and inputs ==

    d = 0.008;      % thickness, m
    lambda = 0.75; % W/m/K
    rhocp = 2e6;   % J/m^3/K
    TA = 5;        % initial temperature, deg
    TI = @(t) min(TA+2*t/60,20); % inner air temperature, deg
    Tinf = -5;     % outer air temperature, deg
    alpha0 = 15;  % W/m^2/K
    alphainf = 70; % W/m^2/K
    p0 = @(t) 200*(t>=10*60); % heating power per unit area, W/m^2
    N = 5;        % number of spatial grid intervals

%% == prepare ==

    a = lambda/rhocp; % thermal diffusivity, W/m/K
    xx = linspace(0,d,N+1); % spatial grid
    deltax = xx(2); % step size of spatial grid
    deltat = 0.4*deltax^2/a; % step size of time grid
    tt = 0:deltat:40*60; % time grid

    % rhs of ode
    f = @(t,T) ...
        a/deltax^2*[ ...
            2*T(2)-2*T(1)+2*deltax/lambda*(p0(t)-alpha0*(T(1)-TI(t))); ...
            T(1:end-2)-2*T(2:end-1)+T(3:end); ...
            2*T(end-1)-2*T(end)-2*deltax/lambda*alphainf*(T(end)-Tinf) ...
        ];

%% == calc FDM solution, Euler forward time integration ==

    TT = nan(length(tt),length(xx)); % temperature, initialize empty matrix
    TT(1,:) = 0*xx+TA; % set initial temperature states
    for j=2:length(tt) % Euler forward integration steps
        TT(j,:) = TT(j-1,:) + deltat * f(tt(j-1),TT(j-1,:))';
    end

%% == plot results ==

    figure;
    surf(tt(1:10:end)/60,xx*1000,TT(1:10:end,:),'facecol','w','edgecol','k');
    view(30,46);
    xlabel('\itt\rm (min)');
    ylabel('\itx\rm (mm)');
    zlabel('\iT\rm (°C)');

```

Bei der Wahl der Ortschrittweite  $\Delta x$  und der Zeitschrittweite  $\Delta t$  muss die Bedingung

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (\text{B.380})$$

(siehe (3.130)) eingehalten werden, damit (B.379) stabil ist. Im vorliegenden Fall

wurde daher Zeitschrittweite in der Form

$$\Delta t = 0.4 \frac{\Delta x^2}{a} \quad (\text{B.381})$$

gewählt.

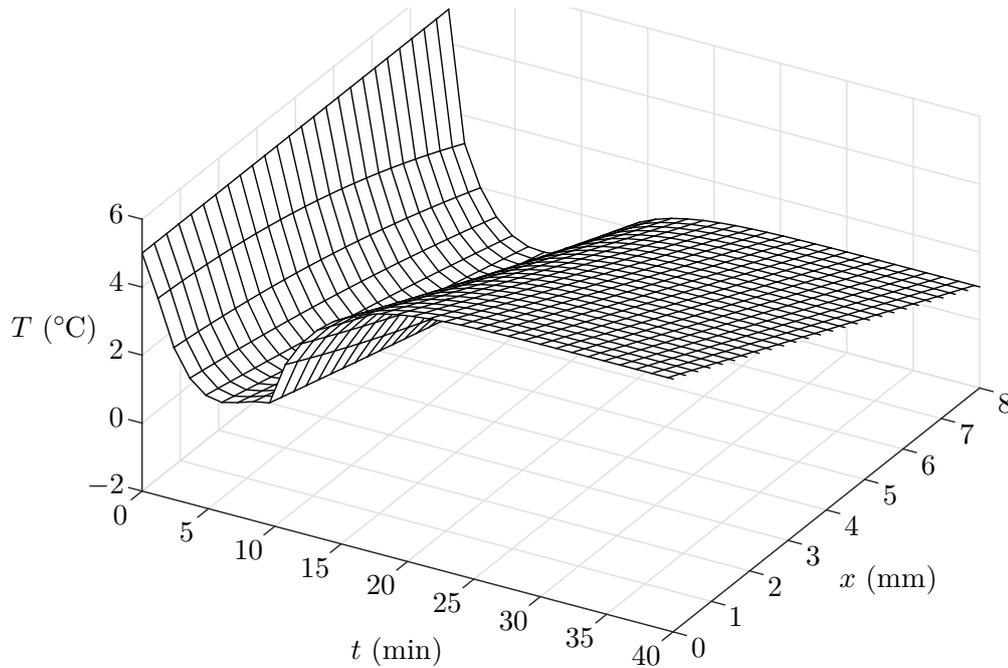


Abbildung B.51: Temperaturfeld in der Heckscheibe.

Für  $N = 25$  ist die Lösung von (B.379) in Abbildung B.51 dargestellt. Zu Beginn der Fahrt nimmt die Temperatur  $T$  der Heckscheibe rapide ab. Durch die Erhöhung der Lufttemperatur im Inneren des Wagens nimmt  $T$  dann leicht zu, ehe zum Zeitpunkt  $t = 10$  min ein starker Temperaturanstieg durch das Einschalten der Heckscheibenheizung erfolgt. Anschließend nähert sich das Temperaturfeld asymptotisch seinem stationären Profil.

Die Lösung von (B.379) wurde für verschiedene Werte  $N$  berechnet, um den Einfluss der gewählten Ortsschrittweite auf die erzielte Rechengenauigkeit zu studieren. Qualitativ ergeben sich Temperaturverläufe, die jenem in Abbildung B.51 sehr ähnlich sind. Es wird daher in Abbildung B.52 für  $N = 10$ ,  $N = 5$  und  $N = 2$  nur noch die maximale absolute Abweichung

$$e_{25}(t_j) = \max_i \left| T_i^j - T(x_i, t_j) \right|_{N=25} \quad (\text{B.382})$$

zwischen der jeweiligen numerischen Lösung und der mit  $N = 25$  erhaltenen Lösung gezeigt. Nennenswerte Abweichungen zwischen den Lösungen, d. h. Rechengenau-

igkeiten, ergeben sich nur bei transienten Änderungen des Temperaturfeldes. Für  $N = 1$  (nicht in Abbildung B.52 dargestellt) nimmt  $e_{25}$  erheblich größere Werte (bis zu  $2.5^\circ\text{C}$ ) an.

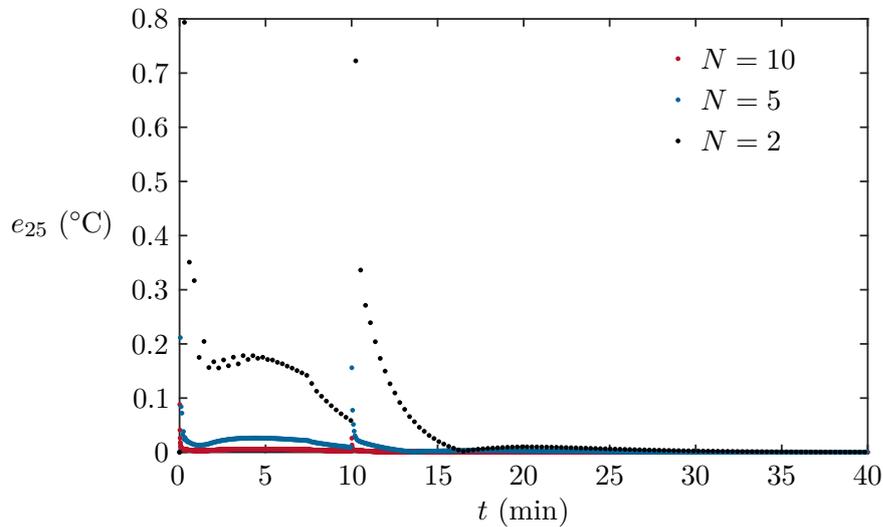


Abbildung B.52: Maximale absolute Abweichung zwischen dem berechneten Temperaturfeld und der Lösung für  $N = 25$ .

Für  $t \rightarrow \infty$  konvergieren die berechneten numerischen Lösungen unabhängig von  $N$  gegen den exakten stationären Ortsverlauf  $T_{ss}(x)$ . Dieser kann aus (3.84) (für eine einschichtige homogene Wand) analytisch in Form der linearen Funktion

$$T_{ss}(x) = T_{ss}(0) + \frac{x}{d}(T_{ss}(d) - T_{ss}(0)) \quad (\text{B.383})$$

berechnet werden. Zur Bestimmung der noch unbekanntenen Oberflächentemperaturen  $T_{ss}(0)$  und  $T_{ss}(d)$  können die Randbedingungen (für  $t \geq 10$  min) verwendet werden. Dies ergibt

$$p = -\lambda \frac{T_{ss}(d) - T_{ss}(0)}{d} + \alpha_0(T_{ss}(0) - T_{I,ss}) \quad (\text{B.384a})$$

$$0 = \lambda \frac{T_{ss}(d) - T_{ss}(0)}{d} + \alpha_\infty(T_{ss}(d) - T_\infty) \quad (\text{B.384b})$$

und somit

$$T_{ss}(0) = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_\infty} + \frac{d}{\lambda}\right)\left(\frac{p}{\alpha_0} + T_{I,ss}\right) + \frac{1}{\alpha_0}T_\infty}{\frac{1}{\alpha_0} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_\infty}} \quad (\text{B.385a})$$

$$T_{ss}(d) = \frac{\frac{1}{\alpha_\infty}\left(\frac{p}{\alpha_0} + T_{I,ss}\right) + \left(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{d}{\lambda}\right)T_\infty}{\frac{1}{\alpha_0} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_\infty}}. \quad (\text{B.385b})$$

Um nun zu sehen, dass die berechneten numerischen Lösungen tatsächlich gegen den in (B.383) analytisch berechneten, exakten stationären Ortsverlauf  $T_{ss}(x)$  konvergieren, wurde die maximale absolute Abweichung

$$e_{ss}(t_j) = \max_i |T_i^j - T_{ss}(x_i)| \quad (\text{B.386})$$

(stationärer Fehler) in Abbildung B.53 für  $t \geq 30$  min dargestellt. Es ist klar, dass  $e_{ss}$  stationär gegen Null konvergiert, da mit den verwendeten Differenzenquotienten für ein lineares Temperaturprofil, wie es durch (B.383) definiert ist, die auftretenden Ortsableitungen  $\frac{\partial T}{\partial x}$  und  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  unabhängig von der gewählten Ortsschrittweite  $\Delta x$  exakt berechnet werden.

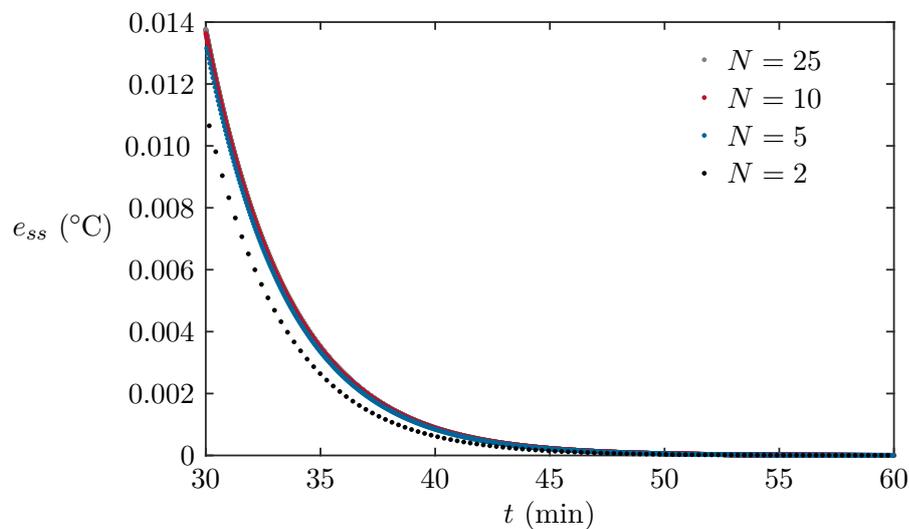


Abbildung B.53: Maximale absolute Abweichung zwischen dem berechneten Temperaturfeld und der exakten stationären Lösung  $T_{ss}(x)$ .

**Aufgabe B.33 (Tauchpumpe).** Zur Förderung von Wasser aus einem Tiefbrunnen wird eine Tauchpumpe eingesetzt, welche durch eine Asynchronmaschine angetrieben wird. Die im Pumpengehäuse eingebaute Asynchronmaschine wird an der Außenseite des Stators vom geförderten Brunnenwasser umströmt und so durch erzwungene Konvektion mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_{SW}$  zwangsgekühlt (siehe Abbildung B.54 links). Der Wasserdurchsatz im Betrieb ist hoch genug, sodass die Wassertemperatur  $T_W$  als konstant angenommen werden kann. Rotor und Stator sind durch erzwungene Konvektion im Luftspalt mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_{RS}$  thermisch gekoppelt.

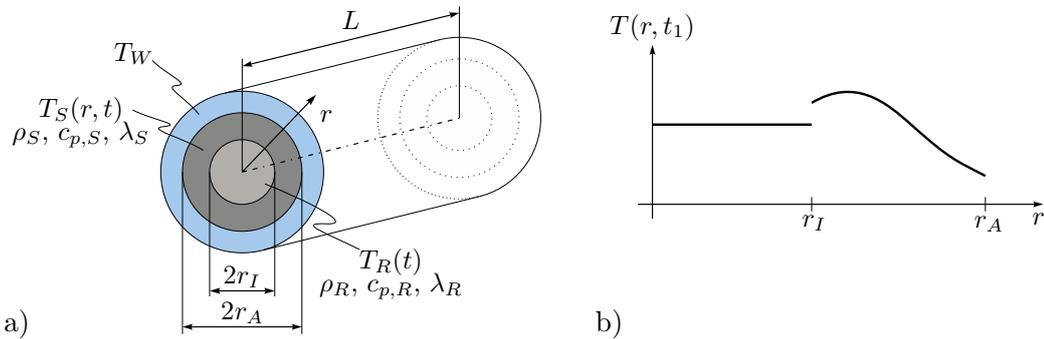


Abbildung B.54: Zur Berechnung der Temperaturverteilung im Antrieb einer Tauchpumpe, a) vereinfachte Skizze einer Asynchronmaschine in einer Tauchpumpe, b) qualitativer Temperaturverlauf im Rotor und im Stator der Asynchronmaschine zu einem allgemeinen Zeitpunkt  $t_1$ .

Es soll für den Vollastbetrieb die Temperaturverteilung im Rotor und im Stator untersucht werden. Dazu wird angenommen, dass sich Rotor und Stator hinreichend genau durch homogene Körper mit mittleren Massendichten  $\rho_R$  und  $\rho_S$ , mittleren Wärmekapazitäten  $c_{p,R}$  und  $c_{p,S}$  sowie mittleren Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_R$  und  $\lambda_S$  beschreiben lassen. Zudem wird der Wärmeeintrag zufolge des Motorstromes  $I$  am Verlustwiderstand  $R$  als homogene volumetrische Wärmequelle gleichmäßig im gesamten Stator angenommen. Rotor und Stator besitzen die Länge  $L$  und ihre Stirnflächen sind näherungsweise adiabatisch.

Unter diesen Annahmen stellt sich eine rotationssymmetrische Temperaturverteilung  $T(r, t)$  ein. Da der Stator durch die vergossenen Wicklungen Wärme viel schlechter leitet als der Rotor ( $\lambda_S \ll \lambda_R$ ), wird die Temperaturverteilung im Rotor als homogen angenommen, d.h.

$$T(r, t) = \begin{cases} T_R(t) & \text{für } r \in [0, r_I) \\ T_S(r, t) & \text{für } r \in [r_I, r_A]. \end{cases}$$

Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Temperaturverteilung  $T(r, t)$  ausgehend von einer Anfangstemperatur des Rotors  $T_R(0) = T_{R,0}$  und einer Anfangstemperaturverteilung des Stators  $T_S(r, 0) = T_{S,0}(r)$  numerisch mittels Finiter Differenzen Methode.

**Lösung von Aufgabe B.33.** Es soll zunächst die Differentialgleichung der Rorotemperatur  $T_R(t)$  formuliert werden. Der Rotor mit dem Volumen  $\mathcal{V}_R$  tauscht an der Grenzschicht  $r = r_I$  thermische Energie mit dem Stator gemäß  $\dot{\mathbf{q}}_{RS}(t) = \alpha_{RS}(T_R(t) - T_S(r_I, t))\mathbf{e}_r$  aus. Der Energieerhaltungssatz (A.17) liefert für das Kontrollvolumen  $\mathcal{V}_R$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_R} \rho_R c_{p,R} T_R(t) d\mathcal{V} = - \int_{\partial\mathcal{V}_R} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{RS}(t) d\mathcal{A}, \quad (\text{B.387})$$

woraus durch Auswerten der Integrale die gesuchte Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}T_R(t) = -\frac{2\alpha_{RS}}{\rho_R c_{p,R} r_I}(T_R(t) - T_S(r_I, t)) \quad (\text{B.388})$$

folgt. Für den Stator ist die Wärmeleitgleichung in Zylinderkoordinaten (3.5b) zu verwenden, welche sich durch die angenommene Rotationssymmetrie auf die Form

$$\rho_S c_{p,S} \frac{\partial T_S(r, t)}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_S(r, t)}{\partial r} \right) + g(r, t) \quad (\text{B.389})$$

vereinfacht. Die volumetrische Wärmequelle  $g(r, t)$  zufolge der elektrischen Verluste ergibt sich unter der Annahme einer homogenen Verteilung zu

$$g(r, t) = g(t) = \frac{R(I(t))^2}{(r_A^2 - r_I^2)\pi L}. \quad (\text{B.390})$$

Aus  $\dot{\mathbf{q}}_{RS}(t)$  und  $\dot{\mathbf{q}}_{SW}(t) = \alpha_{SW}(T_S(r_A, t) - T_W)\mathbf{e}_r$  sowie dem Fourierschen Wärmeleitgesetz (3.1) folgen die Randbedingungen

$$\lambda_S \frac{\partial T_S(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_I} = -\alpha_{RS}(T_R(t) - T_S(r_I, t)) \quad (\text{B.391a})$$

$$\lambda_S \frac{\partial T_S(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_A} = -\alpha_{SW}(T_S(r_A, t) - T_W). \quad (\text{B.391b})$$

Die zeitliche Dynamik des Temperaturverlaufs  $T(r, t)$  wird also durch ein gekoppeltes System einer gewöhnlichen Differentialgleichung (B.388) und einer partiellen Differentialgleichung (B.389) mit den Randbedingungen (B.391) beschrieben. Eine analytische Lösung derartiger Gleichungssysteme ist nur in Spezialfällen möglich, weshalb die partielle Differentialgleichung im Folgenden mit der Finiten Differenzen Methode diskretisiert und numerisch gelöst wird.

Dazu wird die Ortskoordinate  $r \in [r_I, r_A]$  in  $N$  gleiche Intervalle  $[r_{n-1}, r_n]$  der Länge  $\Delta r = \frac{r_A - r_I}{N}$  mit  $n = 1, 2, \dots, N$  unterteilt, womit  $r_n = r_I + n\Delta r$  für die Gitterpunkte gilt. Nach Anwenden der Kettenregel lassen sich die Ortsableitungen in (B.389) an den Gitterpunkten durch zentrale Differenzenquotienten ersetzen, d. h.

$$\frac{\partial T_S(r_n, t)}{\partial r} \approx \frac{T_S(r_{n+1}, t) - 2T_S(r_n, t) + T_S(r_{n-1}, t))}{(\Delta r)^2} \quad (\text{B.392a})$$

$$\frac{\partial^2 T_S(r_n, t)}{\partial r^2} \approx \frac{T_S(r_{n+1}, t) - T_S(r_{n-1}, t))}{2\Delta r}, \quad (\text{B.392b})$$

womit sich die Temperaturwerte  $T_S(r_n, t) = T_S^n(t)$  an den Gitterpunkten durch die

gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \rho_S c_{p,S} \frac{d}{dt} T_S^m(t) &= \lambda_S \frac{T_S^{m+1}(t) - 2T_S^m(t) + T_S^{m-1}(t)}{(\Delta r)^2} \\ &+ \lambda_S \frac{T_S(r_{n+1}, t) - T_S(r_{n-1}, t)}{2\Delta r(r_I + n\Delta r)} + g(t) \end{aligned} \quad (\text{B.393})$$

beschreiben lassen. An den Rändern, d. h. für  $n = 0$  bzw.  $n = N$ , treten dabei die unbekanntenen Größen  $T_S^{-1}$  und  $T_S^{N+1}$  an den Stellen  $r_{-1}$  bzw.  $r_{N+1}$  auf, welche außerhalb des Definitionsgebietes liegen. Wie in Kapitel 3.6 erläutert, lassen sich die unbekanntenen Temperaturen an diesen virtuellen Gitterpunkten durch die zugehörigen Randbedingungen eliminieren. Anwenden der zentralen Differenzenquotienten auf (B.391) liefert

$$T_S^{-1}(t) = T_S^1(t) - \frac{2\alpha_{RS}\Delta r}{\lambda_S} (T_S^0(t) - T_R(t)) \quad (\text{B.394a})$$

$$T_S^{N+1}(t) = T_S^{N-1}(t) - \frac{2\alpha_{SW}\Delta r}{\lambda_S} (T_S^N(t) - T_W). \quad (\text{B.394b})$$

Abschließend lassen sich die Differentialgleichungen (B.388) und (B.393) inklusive (B.394) in ein lineares Anfangswertproblem

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (\text{B.395})$$

mit dem Vektor der Temperaturen  $\boldsymbol{\theta}(t) = [T_R(t), T_S^0, \dots, T_S^N]^T$  (Dimension  $N + 2$ ), den externen Eingängen  $\mathbf{u}(t) = [I(t), T_W]^T$  und den Anfangswerten  $\boldsymbol{\theta}(0) = [T_{R,0}, T_{S,0}(r_0), \dots, T_{S,N}(r_N)]^T$  zusammenfassen. Damit ist die Berechnung des Temperaturverlaufs  $T(r, t)$  auf die (numerische) Lösung des Anfangswertproblems (B.395) zurückgeführt, was eine Standardaufgabe der Numerik darstellt. Beispielsweise kann durch das Euler-Vorwärtsverfahren (vgl. Abschnitt 3.6) das Anfangswertproblem (B.395) auf der diskretisierten Zeitachse  $t_j = j\Delta t$  mit  $j \in \mathbb{N}$  durch Iterieren der expliziten Differenzgleichung

$$\boldsymbol{\theta}_{j+1} = \boldsymbol{\theta}_j + \Delta t(\mathbf{A}\boldsymbol{\theta}_j + \mathbf{B}\mathbf{u}_j) \quad (\text{B.396})$$

mit  $\boldsymbol{\theta}_j = \boldsymbol{\theta}(t_j)$ ,  $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}(t_j)$  gelöst werden. Zur Illustration des Lösungsverhaltens zeigt Abbildung B.55 den Aufheizvorgang für konstanten Strom  $I(t) = 10 \text{ A}$  und konstante Wassertemperatur  $T_W = 10^\circ\text{C}$ , wobei von den Anfangstemperaturen  $T_{R,0} = T_{S,0}(r) = T_W$  ausgegangen wird. Der Rotor wurde dabei in  $N = 15$  Intervalle unterteilt. Für das Euler-Vorwärtsverfahren wurde aus Gründen der numerischen Stabilität die relativ kleine Schrittweite  $\Delta t = 10.8 \text{ s}$  verwendet. Die verwendeten Parameterwerte sind in Tabelle B.4 zusammengefasst.

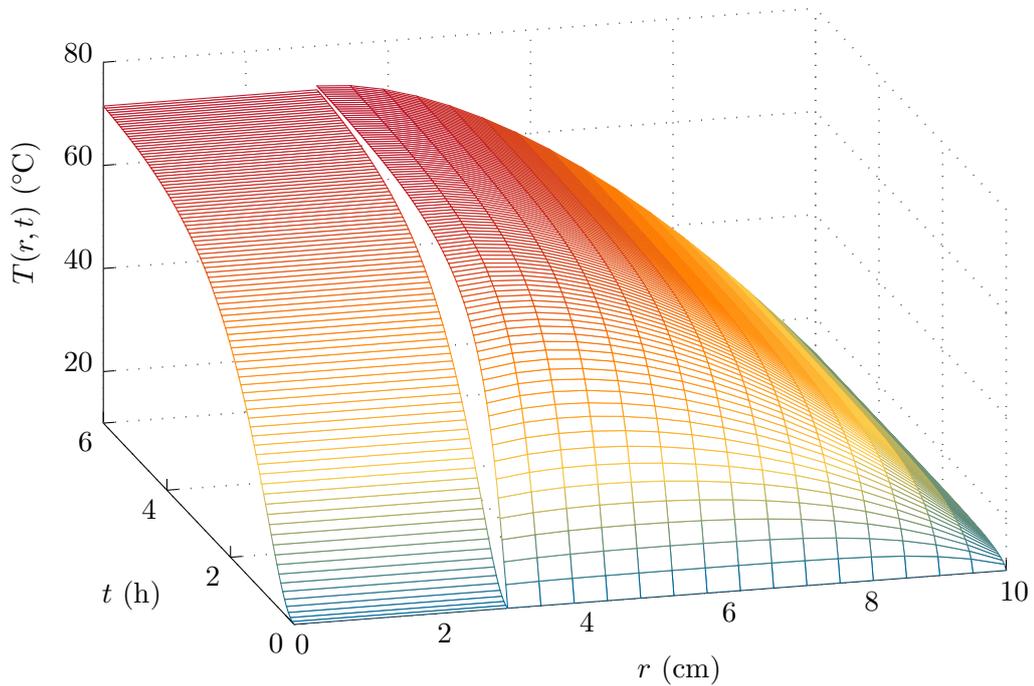


Abbildung B.55: Temperaturverlauf im Rotor und Stator der Asynchronmaschine für einen Aufheizvorgang bei Vollast, berechnet mittels (B.396).

Parameter	Wert	Einheit	Parameter	Wert	Einheit
$\rho_S$	6000	kg/m <sup>3</sup>	$\rho_R$	5000	kg/m <sup>3</sup>
$c_{p,S}$	350	J/(kg K)	$c_{p,R}$	450	J/(kg K)
$\lambda_S$	1	W/(m K)	$\lambda_R$	100	W/(m K)
$\alpha_{RS}$	10	W/(m <sup>2</sup> K)	$\alpha_{SW}$	500	W/(m <sup>2</sup> K)
$R$	5	$\Omega$	$L$	40	cm
$r_I$	3	cm	$r_A$	10	cm

Tabelle B.4: Parameterwerte der Tauchpumpe.

**Aufgabe B.34 (Wasserkühlung).** Abbildung B.56 zeigt einen integrierten Spannungsregler (IC) mit Wasserkühlung. Für eine Eingangsspannung  $U_e \in [U_{e,\min}, U_{e,\max}]$  liefert der lineare Spannungsregler am Ausgang die konstante Spannung  $U_a$ . Die angeschlossene Last zieht einen Gleichstrom  $I_a$ . Der gleiche Strom fließt auch eingangsseitig. Aus dem Datenblatt des Spannungsreglers ist der thermische Widerstandswert  $R_{SB}$  zwischen Sperrschicht und Basisplatte bekannt. Die Basisplatte hat eine Masse  $m_B$  und eine spezifische Wärmekapazität  $c_B$ . Die Wärmeübertragung über das Kunststoffgehäuse und die elektrischen Anschlusskontakte sei vernachlässigbar klein. Um die Kühlung zu verbessern, wird ein Kühlkörper mit der Länge  $l_K$ , der Breite  $b_K$  und der

Dicke  $h_K$  aufgeschraubt. Das Material des Kühlkörpers besitzt die Dichte  $\rho_K$  sowie die spezifische Wärmekapazität  $c_K$ . Durch die Verwendung von Wärmeleitpaste wird zudem der Übergangswiderstand zwischen Basisplatte und Kühlkörper im Vergleich zu einem Luftspalt deutlich reduziert. Die Paste hat eine Wärmeleitfähigkeit von  $\lambda_P$  und wurde auf einer Fläche  $A_P$  mit einer Dicke  $h_P$  aufgetragen. Zur besseren Kühlung wird der Kühlkörper von einem Fluid (z. B. Wasser) mit der Temperatur  $T_F$  und der Geschwindigkeit  $u_\infty$  angeströmt, wodurch sich ein Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_{KF}$  vom Kühlkörper auf das Fluid ergibt. Der Durchfluss des Fluides ist so groß, dass  $T_F$  als konstant angenommen werden kann.

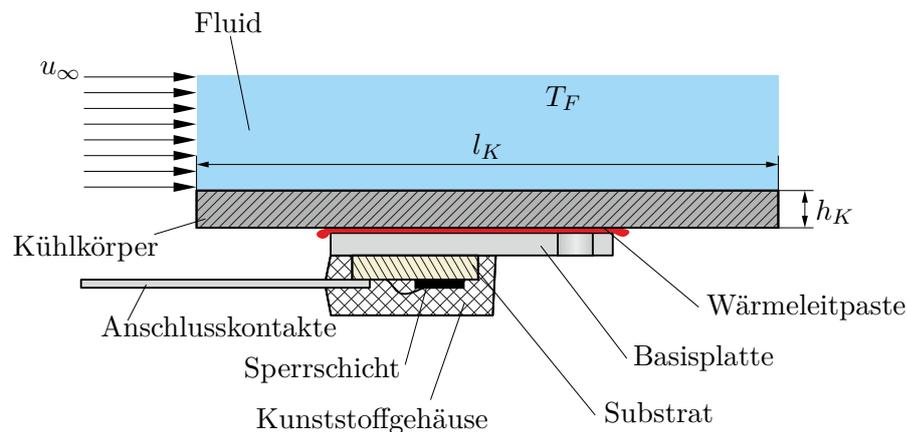


Abbildung B.56: IC mit Wasserkühlung.

Die Wärmeströme an die Umgebungsluft können gegenüber den Wärmeströmen durch die Wärmeleitpaste und zwischen Kühlkörper und Fluid vernachlässigt werden. Die Temperaturverteilungen in der Basisplatte und im Kühlkörper können jeweils in alle Raumrichtungen als homogen betrachtet werden.

1. Zeichnen Sie das RC-Ersatzschaltbild des Wärmeleitproblems und beschriften Sie die einzelnen Elemente. Drücken Sie die Bauteilwerte der einzelnen Elemente durch gegebene Größen aus.
2. Der Hersteller der Wärmeleitpaste ist an der zeitlichen Änderung des Wärmestroms durch die Pastenschicht zufolge sich ändernder Eingangsspannung interessiert. Stellen Sie die zur Berechnung des gesuchten Wärmestroms notwendigen Gleichungen und Differentialgleichung auf. Die Gleichungen können auch im Laplace-Bereich angegeben werden. Wie groß ist der stationäre Wärmestrom durch die Wärmeleitpaste für eine konstante Eingangsspannung  $U_e > U_a$ ?
3. Wie groß darf der Wärmeübergangswiderstand zwischen Kühlkörper und Fluid höchstens sein, so dass die Sperrschicht-Temperatur des ICs den Wert  $T_{S,max}$  stationär nicht überschreitet?

*Lösung von Aufgabe B.34.*

1. Zur Berechnung des Wärmestroms eignet sich die konzentriert-parametrische Formulierung als RC-Netzwerk. Der von der elektrischen Leistung des ICs in der Sperrschicht hervorgerufene Wärmestrom entspricht einer Randbedingung 2. Art und kann somit als ideale Stromquelle mit dem Wärmestrom

$$P_{in} = I_a(U_e - U_a) \quad (\text{B.397})$$

dargestellt werden. Der Wärmeübergangswiderstand zwischen Sperrschicht und Basisplatte ist durch  $R_{SB}$  gegeben. Wird die Basisplatte als konzentriertes (thermisches) Bauelement aufgefasst, so kann ihre Wärmekapazität durch

$$C_B = m_B c_B \quad (\text{B.398})$$

(vgl. (3.138a)) angegeben werden. Der dem Wärmestrom durch die Wärmeleitpaste entgegengebrachte Widerstand lässt sich durch

$$R_{BK} = \frac{h_P}{A_P \lambda_P} \quad (\text{B.399})$$

(vgl. (3.138b)) darstellen. Weiters lautet die Wärmekapazität des Kühlkörpers

$$C_K = \rho_K l_K b_K h_K c_K \quad (\text{B.400})$$

(vgl. (3.138a)). Die Wärmeübertragung zwischen dem Kühlkörper und dem Fluid basiert auf dem Prinzip der erzwungenen Konvektion. Die Wärmeleitung wird dabei durch Randbedingungen 3. Art, also gemischte Randbedingungen, definiert. Folglich lässt sich die Wärmeübertragung an das Fluid durch die Analogie einer Spannungsquelle und dem Wärmeübergangswiderstand auf das Fluid darstellen. Der Wärmeübergangswiderstand ergibt sich gemäß (3.137) in der Form

$$R_{KF} = \frac{1}{l_k b_k \alpha_{KF}} \quad (\text{B.401})$$

Aus diesen Überlegungen folgt die in Abbildung B.57 dargestellte Ersatzschaltung.

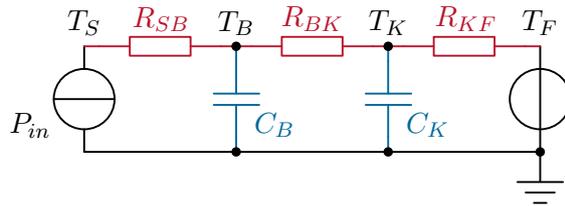


Abbildung B.57: RC-Ersatzschaltbild zur Wasserkühlung.

2. Für die in Abbildung B.58 dargestellten Maschen ergeben sich mit dem Konstitutivgesetz (3.134) die Maschengleichungen

$$\text{I: } 0 = T_S - T_B - P_{in} R_{SB} \quad (\text{B.402a})$$

$$\text{II: } 0 = T_B - T_K - \dot{Q}_P R_{BK} \quad (\text{B.402b})$$

$$\text{III: } 0 = T_K - T_F - \dot{Q}_F R_{KF} , \quad (\text{B.402c})$$

wobei  $\dot{Q}_P$  der Wärmestrom durch die Wärmeleitpaste ist und  $\dot{Q}_F$  der in das Fluid abgegebene Wärmestrom.

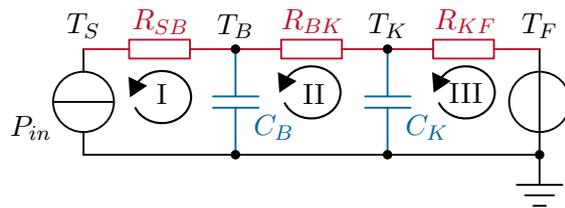


Abbildung B.58: RC-Ersatzschaltbild zur Wasserkühlung mit eingezeichneten Maschen.

Für die beiden Knoten mit den Temperaturen  $T_B$  und  $T_K$  ergeben sich mit dem Konstitutivgesetz (3.134b) die Knotengleichungen

$$C_B \frac{d}{dt} T_B = P_{in} - \dot{Q}_P \quad (\text{B.403a})$$

$$C_K \frac{d}{dt} T_K = \dot{Q}_P - \dot{Q}_F . \quad (\text{B.403b})$$

Werden diese unter Berücksichtigung von (B.397), (B.402b) und (B.402c) integriert, so ergeben sich die Zeitverläufe von  $T_B$  und  $T_K$ . Aus (B.402b) folgt dann schließlich der gesuchte Zeitverlauf von  $\dot{Q}_P$ .

Alternativ liefert die Laplace-Transformation der Knotengleichungen (B.403)

$$C_B(sT_B - T_{B0}) = P_{in} - \dot{Q}_P \quad (\text{B.404a})$$

$$C_K(sT_K - T_{K0}) = \dot{Q}_P - \dot{Q}_F \quad (\text{B.404b})$$

mit der komplexen Laplace-Variable  $s$  und den Anfangstemperaturen  $T_{B0}$  und  $T_{K0}$ . Aus (B.402b), (B.402c) und (B.404) folgt nach Elimination der unbekanntenen Größen  $T_B$ ,  $T_K$  und  $\dot{Q}_F$  die Laplace-Transformierte des gesuchten Wärmestroms

$$\dot{Q}_P = \frac{(C_B C_K R_{KF}(T_{B0} - T_{K0}) + C_K R_{KF} P_{in} - C_B T_F)s + C_B T_{B0} + P_{in}}{C_B C_K R_{BK} R_{KF} s^2 + (C_B R_{BK} + C_B R_{KF} + C_K R_{KF})s + 1}, \quad (\text{B.405})$$

wobei sich  $P_{in}$  aus (B.397) ergibt. Der stationäre Wert von  $\dot{Q}_P$  kann daraus mit dem Endwertsatz der Laplace-Transformation berechnet werden. Für den gegebenen Fall einer konstanten Eingangsspannung führen alternativ auch folgende einfachere Überlegungen zum Ziel. Im stationären Fall gilt, dass die Temperaturen der einzelnen Komponenten zeitlich konstant sind.

$$\frac{d}{dt} T_B = 0 \quad (\text{B.406a})$$

$$\frac{d}{dt} T_K = 0. \quad (\text{B.406b})$$

Daher folgt aus den Knotengleichungen (B.403) der stationäre Gesamtwärmestrom

$$P_{in} = \dot{Q}_P = \dot{Q}_F. \quad (\text{B.407})$$

Stationär werden also alle thermischen Widerstände vom gleichen Wärmestrom  $P_{in}$  durchflossen.

3. Soll nun sichergestellt werden, dass bei einer stationären Belastung des ICs eine gewisse Sperrschichttemperatur  $T_{S,\max}$  nicht überschritten wird, kann ein maximaler Wärmeübergangswiderstand  $R_{KF,\max}$  zwischen dem Kühlkörper und dem Fluid angegeben werden. Eine Addition der Maschengleichungen (B.402) liefert

$$P_{in}(R_{SB} + R_{BK} + R_{KF}) = T_S - T_F. \quad (\text{B.408})$$

Durch Umformen ergibt sich daraus für den maximalen Wärmeübergangswiderstand

$$R_{KF,\max} \leq \frac{T_{S,\max} - T_F}{P_{in}} - R_{SB} - R_{BK}. \quad (\text{B.409})$$

**Aufgabe B.35 (Brennofen).** Betrachtet wird ein kleiner Brennofen für die Härtung von Keramikteilen. Der Ofen besteht aus feuerfesten Wänden sowie einem Heizelement. Abbildung B.59 enthält eine Skizze des Ofens. Der Ofen enthält eine aus Stickstoff bestehende Schutzgasatmosphäre mit der Temperatur  $T_s$ . Die näherungsweise konstanten Stoffparameter von Stickstoff seien die Massendichte  $\rho$  und die spezifischen Wärmekapazitäten  $c_p$  und  $c_v$ . Stickstoff kann als ideales Gas betrachtet werden. Über eine Zuleitung strömt Stickstoff mit dem Massenstrom  $\dot{m}_1$  und der Umgebungstemperatur  $T_\infty$  ein. Der einströmende Stickstoff mischt sich unmittelbar und gleichmäßig mit der Ofenatmosphäre. Über eine weitere Leitung strömt der Stickstoff mit dem Massenstrom  $\dot{m}_2$  und der Temperatur  $T_s$  aus dem Ofen. In der Mitte des Ofens befindet sich ein kreisförmiges Heizelement mit der Oberfläche  $A_h$ . Das Heizelement und die Ofenwand (Oberfläche  $A_w$ ) interagieren mit dem Stickstoff in Form von erzwungener Konvektion und von thermischer Strahlung, wobei die Nettowärmestromdichten in  $\dot{q}_w$  bzw.  $\dot{q}_h$  zusammengefasst sind.

Gesucht sind die Differentialgleichungen für die Masse  $m(t)$  und die Temperatur  $T_s(t)$  des Stickstoffs im Ofen.

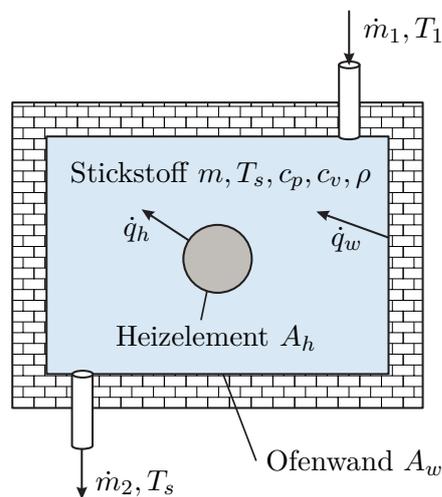


Abbildung B.59: Brennofen für Keramikteile.

**Lösung von Aufgabe B.35.** Die Differentialgleichung für die Masse  $m(t)$  des Stickstoffs folgt aus der Massenbilanz, wobei die Masse in einem Kontrollvolumen  $\mathcal{V}$  durch

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} \quad (\text{B.410})$$

mit der Massendichte  $\rho$  gegeben ist. Aus der Massenerhaltung für ein materiefestes

Kontrollvolumen  $\mathcal{V}_m(t)$  folgt mit (B.410)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho d\mathcal{V} = 0 . \quad (\text{B.411})$$

Dies kann alternativ mit dem Reynold'schen Transporttheorem (A.8) als

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = 0 \quad (\text{B.412})$$

formuliert werden. Hierbei ist  $\mathbf{v}$  die lokale Momentangeschwindigkeit der Materie. Nun wird als Kontrollvolumen der ortsfeste Innenraum des Ofens  $\mathcal{V} = \text{konst.}$  (ohne das Heizelement) gewählt. Mit (A.8) folgt für die zeitliche Ableitung der Masse  $m$  des Stickstoffes in  $\mathcal{V}$

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{V}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A}}_{=0} . \quad (\text{B.413})$$

Da  $\mathcal{V} = \text{konst.}$ , gilt für die lokale Momentangeschwindigkeit der Berandung  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Die Differenz von (B.413) und (B.412) lautet

$$\frac{d}{dt} m - 0 = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}}_{=0} - \int_{\partial \mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} . \quad (\text{B.414})$$

Zum aktuellen Zeitpunkt gilt  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_m$ , womit sich die ersten beiden Terme auf der rechten Seite von (B.414) aufheben. Es gilt also

$$\frac{d}{dt} m = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = - \int_{\partial \mathcal{V}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 , \quad (\text{B.415})$$

wobei hier berücksichtigt wurde, dass durch die Berandung  $\partial \mathcal{V}$  lediglich die Massenströme  $\dot{m}_1$  und  $\dot{m}_2$  fließen.

Zur Herleitung der Differentialgleichung der Stickstofftemperatur  $T_s(t)$  wird die Energieerhaltung im Ofenraum betrachtet, wobei wieder das raumfeste Kontrollvolumen  $\mathcal{V} = \text{konst.}$  (ohne das Heizelement) gewählt wird. Unter der plausiblen Annahme, dass die Änderungen der kinetischen und potentiellen Energie vernachlässigt werden können, d. h.  $\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + gz \ll h$  und da in dem System weder technische Arbeit noch elektrische Leistung auftritt folgt aus der Energieerhaltung für offene Systeme (A.23) mit dem zugeführten Wärmestrom (A.11)

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} \rho h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = - \int_{\partial \mathcal{V}} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} . \quad (\text{B.416})$$

Hierbei ist  $\mathbf{v}$  die lokale Momentangeschwindigkeit der Materie. Für die Wärmeströme durch den Rand  $\partial\mathcal{V}$  des Kontrollvolumens gilt

$$-\int_{\partial\mathcal{V}} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \dot{q}_h A_h + \dot{q}_w A_w . \quad (\text{B.417})$$

Der Abfluss an Enthalpie zufolge von Massenströmen über die Berandung  $\partial\mathcal{V}$  lautet

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \rho h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = -\dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_2 h_2 . \quad (\text{B.418})$$

Da  $c_p = \text{konst.}$ ,  $c_v = \text{konst.}$  und Stickstoff sich wie ein ideales Gas verhält, kann für seine spezifische Enthalpie  $c_p T$ , seine spezifische innere Energie  $c_v T$  und deren Zusammenhang  $u = h - RT$  mit der spezifischen Gaskonstanten  $R$  angesetzt werden. Für die Gasatmosphäre im Ofen gilt daher  $u = c_v T_s$  und für die Massenströme  $\dot{m}_1$  und  $\dot{m}_2$  gilt  $h_1 = c_p T_\infty$  bzw.  $h_2 = c_p T_s$ , siehe Abschnitt A.4. Die im Kontrollvolumen homogene spezifische totale Energie des Gases lautet  $e = u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + gz$ . Werden wiederum die potentielle und die kinetische Energie vernachlässigt, so folgt  $e = u$  und somit aus (B.416)

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V}}_{=m} \frac{\partial u}{\partial t} + u \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{V} - \dot{m}_1 c_p T_\infty + \dot{m}_2 c_p T_s = \dot{q}_h A_h + \dot{q}_w A_w . \quad (\text{B.419})$$

Unter Berücksichtigung von (B.415),  $u = c_v T_s$  und  $R = c_p - c_v$  vereinfacht sich dies zu der gesuchten Differenzialgleichung für die Stickstofftemperatur  $T_s$

$$\begin{aligned} m c_v \frac{d}{dt} T_s &= \dot{m}_1 (c_p T_\infty - c_v T_s) - \dot{m}_2 T_s (c_p - c_v) + \dot{q}_h A_h + \dot{q}_w A_w \\ &= \dot{m}_1 (R T_\infty + c_v T_\infty - c_v T_s) - \dot{m}_2 R T_s + \dot{q}_h A_h + \dot{q}_w A_w . \end{aligned} \quad (\text{B.420})$$

Diese kann mit Hilfe der Zustandsgleichung  $RT = \frac{p}{\rho}$  für ideale Gase auf die Form

$$m c_v \frac{d}{dt} T_s + \underbrace{\dot{m}_1 c_v (T_s - T_\infty)}_{\Delta U_{in}} = \underbrace{\dot{V}_1 p - \dot{V}_2 p}_{P_p} + \underbrace{(\dot{q}_h A_h + \dot{q}_w A_w)}_{\dot{Q}} \quad (\text{B.421})$$

umgeschrieben werden, wobei  $\dot{V}_1 = \dot{m}_1/\rho$  und  $\dot{V}_2 = \dot{m}_2/\rho$  die zu  $\dot{m}_1$  bzw.  $\dot{m}_2$  gehörenden Volumenströme bezeichnen. Die einzelnen Terme in (B.421) können wie folgt interpretiert werden: Der erste Term beschreibt die Leistung, die zur (isochoren) Temperaturänderung des Gases im Kontrollvolumen nötig ist.  $\Delta U_{in}$  ist die notwendige Leistung um den einströmenden Stickstoff (isochor) auf die Temperatur  $T_s$  zu erwärmen,  $P_p$  ist die zuzuführende Leistung (Pumpleistung) um die Massenströme  $\dot{m}_1$  und  $\dot{m}_2$  einzuprägen und  $\dot{Q}$  ist der von der Umgebung an das Gas abgegebene Wärmestrom.

**Aufgabe B.36 (Schwungrad mit Scheibenbremse).** In dieser Aufgabe soll das Abbremsen eines Schwungrades untersucht werden. Das Schwungrad mit dem Trägheitsmoment  $\theta_{zz}$  drehe sich mit der aktuellen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , welche den Anfangswert  $\bar{\omega}$  besitzt. An der Achse des Schwungrades ist eine Scheibenbremse befestigt. Über zwei Bremsbacken mit dem Reibkoeffizienten  $\mu_C$  lässt sich die zum Abbremsen benötigte Anpresskraft  $F_B$  einbringen. Die Backen mit den Radien  $R_i$  und  $R_a$  und der Dicke  $d$  umspannen dabei einen Winkel von  $\varphi_B$ , besitzen jeweils eine Masse  $m_B$  und sind durch eine konstante spezifische Wärmekapazität  $c_B$  charakterisiert.

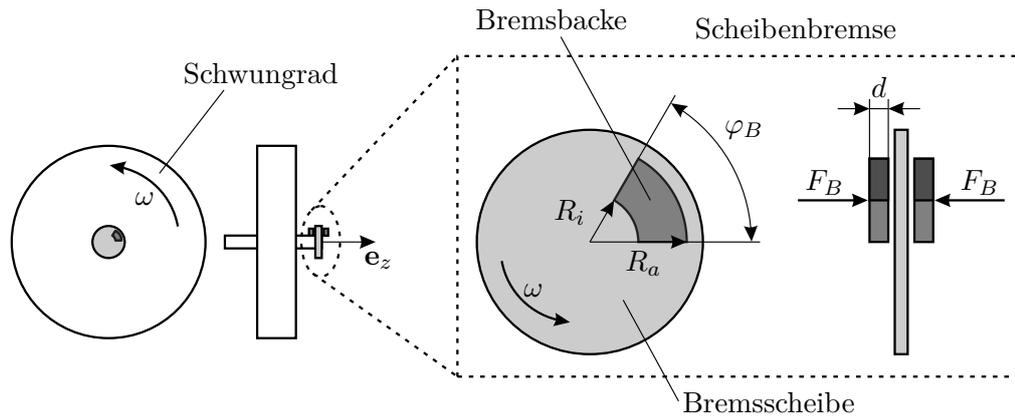


Abbildung B.60: Schwungrad mit Scheibenbremse.

1. Berechnen Sie das Bremsmoment  $M_B$  der Scheibenbremse für eine gegebene konstante Anpresskraft  $F_B$ . Der Anpressdruck zwischen den Bremsbacken und der Bremsscheibe sei gleichmäßig über deren Kontaktfläche verteilt.
2. Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung des Schwungrades auf, geben Sie die benötigten Anfangsbedingungen an und berechnen Sie die zum vollständigen Abbremsen des Rades benötigte Zeit  $t_B$ .
3. Berechnen Sie die Bremsleistung  $P_B(t)$  und die beim Abbremsen bis zum Stillstand ( $\omega = 0$ ) vollständig in Wärme umgewandelte Bremsenergie  $E_B$ .
4. Durch das Abbremsen werden die Bremsbacken ausgehend von der Temperatur  $T_B(0) = T_{B,0}$  auf die Temperatur  $T_B(t_B)$  erwärmt. Berechnen Sie den Verlauf der Temperatur  $T_B(t)$  unter der Annahme, dass die Bremsbacken während des (kurzen) Bremsvorganges keine Wärme an die Umgebung abgeben. Weiters wird angenommen, dass die beim Bremsen an der Kontaktfläche erzeugte Wärme stets zur Hälfte in die Bremsbacken und in die Bremsscheibe fließt. Die Temperatur  $T_B(t)$  der Bremsbacken wird als homogen verteilt angenommen.
5. Es soll nun die Abkühlung der Bremsbacken nach dem Bremsvorgang, d. h. bei Stillstand des Schwungrades betrachtet werden. Die Bremsbacken geben dabei

über ihre gesamte Oberfläche durch freie Konvektion mit dem Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  Wärme an die Umgebungsluft mit der konstanten Temperatur  $T_\infty$  ab. Andere Wärmeübertragungsmechanismen (z. B. Strahlung) spielen keine Rolle. Berechnen Sie den Verlauf der Temperatur der Bremsbacken  $T_B(t)$  für  $t \geq t_B$ .

### Lösung von Aufgabe B.36.

1. Die Anpresskraft  $F_B$  wirkt verteilt über die Kontaktfläche

$$A_K = \int_{A_K} dA = \int_{R_i}^{R_a} \int_0^{\varphi_B} r d\varphi dr = \frac{\varphi_B}{2} (R_a^2 - R_i^2) \quad (\text{B.422})$$

der Bremsbacken, wobei hier  $dA = r d\varphi dr$  verwendet wurde. Es stellt sich also die homogen verteilte spezifische Anpresskraft (Anpressdruck)  $f_N = \frac{F_B}{A_K}$  in Richtung  $z$  ein und bewirkt gemäß (2.99) mit dem Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_C$  eine spezifische Reibkraft  $f_C$  in Umfangsrichtung entgegen der Bewegungsrichtung  $\omega$  der Bremsscheibe.

$$f_C = \mu_C \frac{F_B}{A_K} \quad (\text{B.423})$$

Diese wiederum führt zu einem spezifischen Bremsmoment

$$\tau_B = \mu_C \frac{F_B}{A_K} r \quad (\text{B.424})$$

Integration über die Kontaktfläche  $A_K$  liefert

$$\bar{M}_B = \int_{A_K} \tau_B dA = \int_{R_i}^{R_a} \int_0^{\varphi_B} r^2 \mu_C \frac{F_B}{A_K} d\varphi dr = \mu_C F_B \frac{2 R_a^3 - R_i^3}{3 R_a^2 - R_i^2} \quad (\text{B.425})$$

Da zwei Bremsbacken verwendet werden, ergibt sich das gesamte konstante Bremsmoment schließlich zu

$$M_B = 2\bar{M}_B = \mu F_B \frac{4 R_a^3 - R_i^3}{3 R_a^2 - R_i^2} \quad (\text{B.426})$$

2. Aus dem Momentensatz (2.146) erhält man die Bewegungsdifferentialgleichung des Schwungrades

$$\ddot{\varphi} = -\frac{M_B}{\theta_{zz}} \quad (\text{B.427})$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = \text{beliebig} \quad (\text{B.428a})$$

$$\omega(0) = \dot{\varphi}(0) = \bar{\omega} \quad (\text{B.428b})$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems ergibt sich nach zweimaligem Integrieren und Einsetzen der Anfangsbedingungen zu

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = -\frac{M_B}{\theta_{zz}}t + \bar{\omega} \quad (\text{B.429a})$$

$$\varphi(t) = -\frac{M_B}{\theta_{zz}}\frac{t^2}{2} + \bar{\omega}t + \varphi(0) \quad (\text{B.429b})$$

Die Bremsdauer  $t_B$  folgt aus

$$\omega(t_B) = 0 = \bar{\omega} - \frac{M_B}{\theta_{zz}}t_B \quad (\text{B.430})$$

in der Form

$$t_B = \frac{\theta_{zz}}{M_B}\bar{\omega} . \quad (\text{B.431})$$

3. Analog zu (2.78) bzw. (3.74) gilt für die Bremsleistung  $P_B = M_B\omega$ . Das ergibt mit (B.429a) die aktuelle Bremsleistung

$$P_B(t) = M_B\omega(t) = M_B\left(\bar{\omega} - \frac{M_B}{\theta_{zz}}t\right) . \quad (\text{B.432})$$

Durch Integration folgt unter Berücksichtigung von (B.431) die Bremsenergie

$$E_B = \int_0^{t_B} P_B(\tau) d\tau = \int_0^{t_B} M_B\left(\bar{\omega} - \frac{M_B}{\theta_{zz}}\tau\right) d\tau = \frac{1}{2}\theta_{zz}\bar{\omega}^2 , \quad (\text{B.433})$$

welche bis zum Stillstand des Schwungrades in Wärme umgewandelt wird. Wie es sein muss, entspricht  $E_B$  damit genau der im Anfangszustand im Schwungrad gespeicherten kinetischen Energie  $T(0) = \frac{1}{2}\theta_{zz}\bar{\omega}^2$ . Nach vollständiger Abbremsung gilt  $T(t_B) = 0$ .

4. Die Bremsleistung gemäß (B.432) wird irreversibel in Wärme umgewandelt (dissipiert), siehe Abschnitt 2.2.5. Der Gesamtwärmestrom  $\dot{Q}(t)$  in eine Bremsbacke entspricht damit einem Viertel der gesamten Bremsleistung (zwei Bremsbacken, Wärmestrom fließt zu gleichen Teilen in die Bremsbacken und in die Bremscheibe), d. h.

$$\dot{Q}(t) = \frac{1}{4}P_B(t) = \frac{1}{4}M_B\left(\bar{\omega} - \frac{M_B}{\theta_{zz}}t\right) . \quad (\text{B.434})$$

Da die Bremsbacken als inkompressible Festkörper angesehen werden können, gilt gemäß (A.32) und (A.35a)  $du = c_v dT_B = c_p dT_B$ . Kinetische Energie und potentielle Energie spielen bei den (stillstehenden) Bremsbacken keine Rolle. Damit lautet die Energiebilanz (A.17) angewandt auf eine Bremsbacke

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{d}{dt}(\rho c_p T_B) d\mathcal{V} = m_{BCB} \frac{dT_B(t)}{dt} = \dot{Q}(t) = \frac{1}{4}M_B\left(\bar{\omega} - \frac{M_B}{\theta_{zz}}t\right) . \quad (\text{B.435})$$

Integration und Berücksichtigung der Anfangsbedingung  $T_B(0) = T_{B,0}$  liefern den gesuchten Temperaturverlauf während des Bremsvorgangs

$$T_B(t) = T_{B,0} + \frac{1}{4} \frac{M_B}{m_{BCB}} \left( \bar{\omega} t - \frac{M_B t^2}{\theta_{zz} 2} \right) \quad \forall t \in [0, t_B] . \quad (\text{B.436})$$

Bei Erreichen des Stillstands haben die Bremsbacken folglich die Temperatur

$$\begin{aligned} T_B(t_B) &= T_{B,0} + \frac{1}{4} \frac{M_B}{m_{BCB}} \left( \bar{\omega} t_B - \frac{M_B t_B^2}{\theta_{zz} 2} \right) \\ &= T_{B,0} + \frac{1}{8} \frac{\theta_{zz} \bar{\omega}^2}{m_{BCB}} = T_{B,0} + \frac{1}{m_{BCB}} \frac{E_B}{4} . \end{aligned} \quad (\text{B.437})$$

5. Gemäß Abschnitt 3.2 gilt für die aus der Bremsbacke austretende konvektive Wärmestromdichte

$$\dot{q}(t) = \alpha(T_B(t) - T_\infty) . \quad (\text{B.438})$$

Die gesamte Oberfläche einer Bremsbacke berechnet sich in der Form

$$A = 2A_K + d(2(R_a - R_i) + \varphi_B(R_a + R_i)) . \quad (\text{B.439})$$

Analog zu (B.435) folgt damit die Differenzialgleichung

$$m_{BCB} \frac{dT_B(t)}{dt} = -\dot{q}(t)A = \alpha A(T_\infty - T_B(t)) \quad (\text{B.440})$$

für den Temperaturverlauf bei der Abkühlung. Integration dieser Gleichung liefert den gesuchten Temperaturverlauf während des Abkühlvorganges

$$T_B(t) = T_\infty + (T_B(t_B) - T_\infty) \exp\left(-\frac{\alpha A(t - t_B)}{m_{BCB}}\right) \quad \forall t \geq t_B \quad (\text{B.441})$$

mit  $T_B(t_B)$  gemäß (B.437).

## **B.1 Literatur**

- [B.1] H.D. Baehr und K. Stephan, *Heat and Mass Transfer*, 2. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.