



This document contains a post-print version of the paper

# Messfehleranalyse für die Positionsschätzung eines sensorlosen Magnetlagersystems

authored by T. Glück, W. Kemmetmüller, A. Kugi, and C. Tump

and published in *Proceedings of VDI Mechatronik 2011*.

The content of this post-print version is identical to the published paper but without the publisher's final layout or copy editing. Please, scroll down for the article.

#### Cite this article as:

T. Glück, W. Kemmetmüller, A. Kugi, and C. Tump, "Messfehleranalyse für die Positionsschätzung eines sensorlosen Magnetlagersystems", in *Proceedings of VDI Mechatronik 2011*, Dresden, Germany, Mar. 2011, pp. 1–6

#### BibTex entry:

```
@InProceedings{GlueckVDIMechatronik2011,
   Title = {{Messfehleranalyse für die Positionssch\"atzung eines sensorlosen Magnetlagersystems}},
   Author = {T. Gl\"uck and W. Kemmetm\"uller and A. Kugi and C. Tump},
   Booktitle = {Proceedings of VDI Mechatronik 2011},
   Year = {2011},
   Address = {Dresden, Germany},
   Month = {Mar. 30-Apr. 1},
   Pages = {1-6},
   Owner = {tg},
   Timestamp = {2011.10.13},
   Url = {http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa-67689}
}
```

#### Link to original paper:

http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa-67689

#### Read more ACIN papers or get this document:

http://www.acin.tuwien.ac.at/literature

#### **Contact:**

Automation and Control Institute (ACIN) Vienna University of Technology Gusshausstrasse 27-29/E376 1040 Vienna, Austria Internet: www.acin.tuwien.ac.at

E-mail: office@acin.tuwien.ac.at

Phone: +43 1 58801 37601 Fax: +43 1 58801 37699



# Messfehleranalyse für die Positionsschätzung eines sensorlosen Magnetlagersystems

# Measurement errors analysis for a position estimator for self-sensing magnetic levitation systems

Tobias Glück, Wolfgang Kemmetmüller, Andreas Kugi, Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungsund Regelungstechnik, 1040 Wien, Österreich, {glueck, kemmetmueller, kugi}@acin.tuwien.ac.at Christian Tump, Siemens AG/CT PS 8, Otto-Hahn-Ring 6, 81736 München, christian.tump@siemens.com

# Kurzfassung

In dieser Arbeit wird eine Messfehleranalyse für die Postionsschätzung eines sensorlosen Magnetlagersystems präsentiert. Die Analyse basiert auf dem in [3, 4] vorgestellten Positionsschätzalgorithmus, welchem eine Identifikation der Induktivität mit Hilfe der kleinsten Fehlerquadrate und einer geeigneten Mittelung zugrunde liegt. Anhand des mathematischen Modells wird die Grundidee des Schätzverfahrens kurz erläutert und gezeigt, dass sowohl der Einfluss des elektrischen Widerstands und der Ansteuerung als auch die Bewegung des zu lagernden Objekts näherungsweise eliminiert werden kann. Für multiplikative und additive Strom- und Spannungsmessfehler wird eine genaue Analyse des resultierenden Positionsschätzfehlers durchgeführt. Eine Positionsvarianzschätzung unter der Annahme normalverteilter Messgrößen schließt die Arbeit ab. Die theoretischen Ergebnisse werden anhand von Simulationsergebnissen bestätigt.

#### Abstract

In this work, a measurement error analysis for a position estimator for self-sensing magnetic levitation systems is shown. The analysis is based on the position estimation algorithm proposed in [3, 4], which is set up by a least squares identification of the inductance and a suitable averaging. By means of a mathematical model the main idea of the estimation strategy is shortly outlined and it is shown that the influence of the electric resistance and of the duty-cycle as well as of the motion of the levitated object can be approximately eliminated. For multiplicative and additive current and voltage measurement errors a detailed analysis of the resulting position estimation error is presented. Additionally, a position variance estimation based on the assumption of normal distributed measurements is shown. The theoretical results are validated by means of simulation results.

## 1 Einleitung

Mit Hilfe von Magnetlagerungen ist es möglich, rotierende Objekte reibungsarm zu lagern. Im Gegensatz zu einer klassischen Gleit- oder Kugellagerung können die mechanischen Eigenschaften des Systems, wie z.B. die Steifigkeit und Dämpfung, aktiv beeinflusst werden. Aktive Magnetlagerungen sind allerdings inhärent instabil, weshalb eine stabilisierende Positionsregelung unabdingbar ist. Die hierfür notwendige Positionssensorik ist kostenintensiv und mindert die Zuverlässigkeit des Gesamtsystems. In den letzten Jahren wurden daher sogenannte sensorlose Verfahren entwickelt, welche die Position über die Änderung der magnetischen Induktivität unter Verwendung der Strom- und Spannungsmessung schätzen. Die hierzu entwickelten Positionsschätzalgorithmen lassen sich grundsätzlich in zwei Hauptgruppen, nämlich Verfahren basierend auf Zustandsbeobachtern und in Parameterschätzverfahren, unterteilen. Frühe Untersuchungen [9] zeigten bereits, dass die Anwendung der klassischen Beobachtertheorie vor allem durch die fehlende Robustheit gegenüber Parameterschwankungen und Störgrößenänderungen nur beschränkt zielführend ist. Daher wurden in letzter Zeit größere Anstrengungen auf dem Gebiet der Parameterschätzverfahren zur sensorlosen Positionsbestimmung unternommen. Heutzutage werden magnetische Lagerungen aufgrund der energetischen Effizienz ausschließlich mit Hilfe von Schaltverstärkern betrieben. Hierbei kann durch die pulsweitenmodulierte Ansteuerung der Schaltverstärker ein Tastverhältnis vorgegeben und damit ein Spannungsmittelwert eingestellt werden. Diese Ansteuerungsart induziert Oberwellen im Stromsignal, welche die Anwendung einer harmonischen Analyse zur Positionsschätzung [6, 7] ermöglichen. Auch wenn die praktische Anwendbarkeit der hierauf basierenden Schätzalgorithmen gezeigt werden konnte, so ist die erste Harmonische des Strom- und Spannungssignals lediglich eine erste Näherung. Die damit verbundene fehlerhafte Schätzung, hervorgerufen durch eine schnelle Änderung des Tastverhältnisses und der Position des zu lagernden Objektes, wird meist mit Hilfe von Kennfeldern kompensiert. In [2, 3, 4] wurde eine sensorlose Positionsschätzung für Magnetlagersysteme vorgestellt, welche im Gegensatz zu existierenden Algorithmen den Einfluss des elektrischen Widerstands, einer schnellen Änderung des Tastverhältnisses und der Bewegung des zu lagernden Objekts systematisch berücksichtigt. Der vorgestellte Schätzalgorithmus basiert auf einer Identifikation mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Dabei wird die Schaltcharakteristik der pulsweitenmodulierten Ansteuerung gezielt ausgenutzt, um die Positionsinformation aus dem gemessenen Strom- und Spannungsverlauf zu extrahieren. In dieser Folgearbeit wird speziell der Ein-



fluss eines Spannungs- und Strommessfehlers auf die Qualität der Positionsschätzung analysiert und gezeigt, welche Positionsschätzfehler und welche Positionsvarianzen für bestimmte Messkonfigurationen erreicht werden können.

In Kapitel 2 wird das dem Positionsschätzer zugrunde liegende mathematische Modell hergeleitet. Kapitel 3 fasst die Grundidee des in [3, 4] vorgestellten Positionsschätzalgorithmus zusammen. Dabei wird zunächst vereinfachend von einem stillstehenden zu lagernden Objekt ausgegangen und eine Schätzung der Induktivität im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate durchgeführt. Anschließend wird gezeigt, wie sich die Geschwindigkeits- und Widerstandsabhängigkeit geschickt eliminieren lässt. In Kapitel 4 wird die Auswirkung von multiplikativen und additiven Strom- und Spannungsmessfehlern auf die Positionsschätzung analysiert. Kapitel 5 zeigt die Varianzschätzung der Position für eine normalverteilte Stromund Spannungsmessung.

#### 2 Mathematisches Modell

**Abbildung 1(a)** zeigt eine Prinzipskizze des betrachteten Magnetlagersystems.

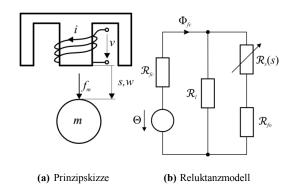


Abbildung 1 Elektromechanische Prinzipskizze und Reluktanzmodell.

Es besteht aus dem zu lagernden Objekt, einer Kugel mit der Masse m, und einem magnetischen Kern mit einer Spule mit N Windungen. Die Kugel und der Kern sind aus Ferrit hergestellt und besitzen die relative Permeabilität  $\mu_r \gg 1$ . Wird eine Spannung v an die Spule angelegt, so resultiert ein Strom i, welcher wiederum in ein magnetisches Feld im Luftspalt zwischen dem Kern und dem zu lagernden Objekt resultiert. Mit Hilfe der resultierenden Magnetkraft  $f_m$  kann die Position s des Objektes geregelt werden. Das entwickelte mathematische Modell der Magnetlagerung basiert auf einem äquivalenten Reluktanzmodell gemäß Abbildung 1(b). Das Ersatzmodell setzt sich aus einer effektiven Kernreluktanz  $\mathcal{R}_{fc}$ , einer effektiven Reluktanz des zu lagernden Objektes  $\mathcal{R}_{fo}$ , einer effektiven Reluktanz  $\mathcal{R}_s(s)$  des Luftspalts zwischen Kern und Objekt und einer effektiven Streureluktanz  $\mathcal{R}_l$  zusammen.

Die Reluktanzen sind als Funktion ihrer geometrischen und magnetischen Parameter in der Form

$$\mathcal{R}_{fc} = \frac{l_{fc}}{\mu_o \mu_r A_{fc}}, \qquad \mathcal{R}_{fo} = \frac{l_{fo}}{\mu_o \mu_r A_{fo}},$$

$$\mathcal{R}_s(s) = \frac{s}{\mu_o A_s}, \qquad \qquad \mathcal{R}_l = \frac{l_l}{\mu_o A_l}$$
(1)

gegeben. Dabei kennzeichnen  $l_{fc}, l_{fo}$  und  $l_{l}$  die effektiven Längen und  $A_{fc}, A_{fo}, A_{l}$  die effektiven Flächen der jeweiligen Elemente. Die effektive Länge des Luftspalts ist mit s bezeichnet und die zugehörige Fläche mit  $A_{s}$ . Ferner bezeichnet  $\mu_{0}$  die Permeabilität von Luft und  $\mu_{r}$  ist die relative Permeabilität des Kernmaterials und des Objektes. Anhand der Durchflutung  $\Theta=Ni$  und des Flusses  $\Phi_{fc}=\Theta/\mathcal{R}(s)$  kann die Ersatzreluktanz wie folgt

$$\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}_{fc} + \frac{\mathcal{R}_{l}(\mathcal{R}_{s}(s) + \mathcal{R}_{fo})}{\mathcal{R}_{l} + \mathcal{R}_{s}(s) + \mathcal{R}_{fo}},$$
(2)

berechnet werden. Mit Hilfe des Faradayschen Induktionsgesetzes

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi = -Ri + v \tag{3}$$

mit dem elektrischen Widerstand R und der Induktivität  $L(s) = N^2/\Re(s)$  erhält man mit der Beziehung  $\psi = L(s)i$  die Stromdynamik

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i = \frac{1}{L(s)} \left( -Ri - \frac{\partial L(s)}{\partial s} wi + v \right),\tag{4}$$

wobei  $w=\dot{s}$  die Geschwindigkeit kennzeichnet. In der betrachteten Anwendung wird das Magnetlagersystem mit einer Vollbrücke bestehend aus vier MOSFETs und der Spule im Querpfad der Brückenschaltung angesteuert. Damit ist es möglich, die Spule mit der positiven und negativen Versorgungspannung  $v_{bat}$  zu betreiben. Aufgrund der schaltenden Ansteuerung ergibt sich ein ständiges Laden und Entladen der Spule, welches gezielt zur Positionsbestimmung genutzt werden kann.

#### 3 Induktivitätsschätzung

In diesem Unterkapitel wird der in [3] vorgestellte Positionsschätzalgorithmus zusammengefasst. Im ersten Teil wird die Hauptidee zur Schätzung der Induktivität für eine feste Position des zu lagernden Objektes skizziert. Es wird dabei gezeigt, dass sich anhand des mathematischen Modells (4) eine lineare Parameterschätzaufgabe ergibt, welche im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate einfach lösbar ist

# 3.1 Induktivitätsschätzung für ein stillstehendes Objekt

Ausgangspunkt für die Induktivitätsschätzung stellt das Faradaysche Gesetz für einen konstanten Widerstand R dar. Berücksichtigt man die Zeitabhängigkeit der Induktivität L(s) = L(s(t)) und führt die Integration über das Zeitintervall  $t \in [t_s, t_e]$  aus, so ergibt sich



$$\int_{t_s}^{t_e} \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = \int_{t_s}^{t_e} \frac{dL}{dt} i dt + \int_{t_s}^{t_e} L \frac{di}{dt} dt = \int_{t_s}^{t_e} (v - Ri) dt.$$

Nimmt man zunächst an, dass sich das Objekt nicht bewegt, das heißt  $\dot{s} = w = 0$ , und damit die Induktivität konstant ist, bzw.  $\dot{L} = 0$  gilt, dann kann (5) vereinfacht in der Form

$$i(t_e) = i(t_s) + \frac{1}{L} \underbrace{\int_{t_s}^{t_e} (v - Ri) dt}_{\Delta yb}$$
 (6)

angegeben werden. Tastet man die Spannung v und den Strom i mit einer deutlich kleineren Abtastzeit  $T_s$  im Vergleich zur Modulationsperiodendauer  $T_{pwm}$  ab und unterteilt die Zeitperiode  $T_{pwm}$  in den Aufladevorgang (Index *I*), in welchem  $v \approx v_{bat}$  gilt, und den Entladevorgang (Index *II*), in welchem  $v \approx -v_{bat}$  gilt, so können pro Teilperiode jeweils ein Schätzwert  $L^{I}$  bzw.  $L^{II}$  bestimmt werden. In den nachfolgenden Ausführungen wird lediglich die Ladephase I betrachtet, da sich äquivalente Überlegungen für die Entladephase II ergeben. Um den Einfluss der Schaltvorgänge der nichtidealen elektrischen Schalter der Vollbrücke zu unterdrücken, werden lediglich Messungen innerhalb des Zeitintervalls  $[t_s^I, t_e^I]$  mit der Startzeit  $t_s^I$  und der Endzeit  $t_e^I$  der Ladephase  $[t_0, t_0 +$  $\chi T_{pwm}$ ] mit dem Tastverhältnis  $\chi$  zur Schätzung der Induktivität  $\hat{L}^I$  herangezogen. Dieses Zeitintervall entspricht den abgetasteten Messpunkten mit den Indizes  $m_s^I, ..., m_e^I$ Die Änderung des verketteten Flusses  $\Delta \psi_{k^I} = \Delta \psi(k^I T_s)$ , mit  $k^I = m_s^I, ..., m_e^I$  nach Gleichung (6) führt dann mit dem Euler-Vorwärts-Verfahren [1] auf

$$\Delta \psi_{mI} = 0$$

$$\Delta \psi_{k^{I}} = T_{s} \sum_{i=m^{I}}^{k^{I}-1} (v_{j} + Ri_{j}), k^{I} = m_{s}^{I} + 1, \dots, m_{e}^{I}$$
(7)

und Gleichung (6) lässt sich in der Form

$$i_{k^{I}} = i_{m_{s}^{I}} + (\tilde{L}^{I})^{-1} \Delta \tilde{\psi}_{k^{I}}, \ k^{I} = m_{s}^{I}, ..., m_{e}^{I}$$
 (8)

angeben. Dabei wurden die Skalierung  $\Delta\psi_{k^I}=T_s\Delta\tilde{\psi}_{k^I}$  und  $(L^I)^{-1}=\left(\tilde{L}^I\right)^{-1}/T_s$  eingeführt. Mit  $m_e^I-m_s^I+1$  Messungen des Stromes i und der Spannung v kann (8) in Vektornotation umgeformt werden

$$\begin{bmatrix} i_{m_s^l} \\ i_{m_s^l+1} \\ \vdots \\ i_{m_e^l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \tilde{\psi}_{m_s^l} \\ 1 & \Delta \tilde{\psi}_{m_s^l+1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \Delta \tilde{\psi}_{m_e^l} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\iota}_{m_s^l} \\ \tilde{\iota}_{m_s^l} \end{bmatrix}}_{\tilde{\theta}^l}$$
(9)

mit dem Messvektor  $\mathbf{y}^I \in \mathbb{R}^{m_e^I - m_s^I + 1}$ , der Regressionsmatrix  $\mathbf{S}^I \in \mathbb{R}^{(m_e^I - m_s^I + 1) \times 2}$  und dem Parametervektor  $\boldsymbol{\theta}^I \in \mathbb{R}^2$ . Die optimale Schätzung  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^I$  des Parametervektors ist im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate durch

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{I} = ((\boldsymbol{S}^{I})^{T} \boldsymbol{S}^{I})^{-1} (\boldsymbol{S}^{I})^{T} \boldsymbol{y}^{I}$$
(10)

gegeben. Damit erhält man für die Ladephase I pro PWM-Periode einen Schätzwert der Stromanfangsbedingung  $\hat{t}_{m_s^I} = \hat{\theta}_1^I$  und einen der Induktivität  $\hat{L}^I = T_s/\hat{\theta}_2^I$ . Gleiches gilt für die Entladephase II, womit sich die Schätzwerte zu  $\hat{t}_{m_s^{II}} = \hat{\theta}_1^{II}$  und  $\hat{L}^{II} = T_s/\hat{\theta}_2^{II}$  ergeben. Die Schätzwerte der Induktivität  $\hat{L}^I$  und  $\hat{L}^{II}$  sind allerdings lediglich dann identisch, wenn die Messung exakt ist, der elektrische Widerstand genau bekannt ist und das zu lagernde Objekt stillsteht. Selbstverständlich ist in der Praxis keine dieser Annahmen exakt erfüllt. In [3, 4] konnte gezeigt werden, dass sowohl ein Fehler im elektrischen Widerstand als auch die Bewegung des Objektes anhand einer geeigneten Mittelung der Schätzwerte näherungsweise eliminiert werden können.

# 3.2 Induktivitätsschätzung für ein bewegtes Objektes

Für ein sich bewegendes Objekt, d.h.  $w \neq 0$ , und einen elektrischen Widerstand

$$R = \hat{R} + \Delta R \tag{11}$$

mit der Abweichung  $\Delta R$  vom nominellen Widerstandswert R, gilt dann nach (5) für den Strom in der Aufladephase I

$$\int_{t_{\epsilon}^{l}}^{t_{e}^{l}} \frac{dL}{dt} i dt + \int_{t_{\epsilon}^{l}}^{t_{e}^{l}} L \frac{di}{dt} dt = \int_{t_{\epsilon}^{l}}^{t_{e}^{l}} (v - Ri) dt.$$
 (12)

Im Gegensatz dazu basierte die Schätzung der Induktivität im vorangegangen Kapitel auf

$$\hat{L}^{l} \int_{t_{s}^{l}}^{t_{e}^{l}} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \int_{t_{s}^{l}}^{t_{e}^{l}} (v - \hat{R}i) \mathrm{d}t. \tag{13}$$

Um (12) und (13) weiter zu analysieren, wurden in [3, 4] zwei Annahmen getroffen. Zum einen wurde angenommen, dass die Zeitableitung  $\dot{L}$  der Induktivität über eine PWM-Periode konstant ist und zum anderen, dass sich der Strom in der jeweiligen Phase näherungsweise dreieckförmig ändert, d.h. es gilt

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{i(t_e^I) - i(t_s^I)}{t_e^I - t_s^I} = \frac{\Delta i^I}{\Delta t^I}.$$
 (14)

Es folgt somit

$$\frac{\Delta i^I}{\Delta t^I} \int_{t_e^I}^{t_e^I} L dt = \hat{L}^I \Delta i^I - \left(\Delta R + \dot{L}\right) \int_{t_e^I}^{t_e^I} i dt \tag{15}$$

und führt man weiterhin den Mittelwert der Induktivität  $\overline{L}^t$  und des Stromes  $\overline{\imath}^t$  in der Form

$$\bar{L}^{I} = \frac{1}{\Delta t^{I}} \int_{t_{S}^{I}}^{t_{e}^{I}} L dt \quad \text{und} \quad \bar{\iota}^{I} = \frac{1}{\Delta t^{I}} \int_{t_{S}^{I}}^{t_{e}^{I}} i dt$$
 (16)

ein, kann der Induktivitätsmittelwert

$$\bar{L}^{I} = \hat{L}^{I} - \left(\Delta R + \dot{L}\right) \frac{\bar{\iota}^{I}}{\Delta i^{I}} \Delta t^{I} \tag{17}$$



abgeleitet werden. Der Induktivitätsmittelwert setzt sich damit aus dem Schätzwert  $\hat{L}^I$  und einem zusätzlichen Term, welcher vom Widerstandsfehler  $\Delta R$  und der Änderung der Induktivität  $\dot{L}$  abhängt, zusammen. Für die Entladephase II erhält man ein äquivalentes Ergebnis. Die Kombination beider erlaubt es, den Induktivitätsmittelwert

$$\bar{L} = \frac{\hat{L}^I \Delta i^I \bar{\tau}^{II} \Delta t^{II} - \hat{L}^{II} \Delta i^{II} \bar{\tau}^I \Delta t^I}{\Delta i^I \bar{\tau}^{II} \Delta t^{II} - \Delta i^{II} \bar{\tau}^I \Delta t^I}$$
(18)

zu berechnen und hierdurch den Einfluss des Widerstandsfehlers  $\Delta R$  und der Änderung der Induktivität  $\dot{L}$  zu eliminieren. Dabei können die Werte  $\Delta i^I$ ,  $\Delta i^{II}$ ,  $\bar{\iota}^I$  und  $\bar{\iota}^{II}$  direkt aus der Strommessung geschätzt werden [3].

### 4 Messfehleranalyse

In diesem Anschnitt wird der Einfluss von Messfehlern auf die Postionsschätzung analysiert. Dabei werden sowohl multiplikative als auch additive Messfehler in der Stromund Spannungsmessung untersucht.

# 4.1 Multiplikative Messfehler

Wird angenommen, dass die Strom- und Spannungsmessung multiplikativen Messfehlern der Form

$$i = \mu i_m \text{ und } v = \eta v_m \tag{19}$$

unterliegt, wobei  $v_m$  und  $i_m$  die jeweiligen Messgrößen und  $\mu$  und  $\eta$  die jeweils konstanten multiplikativen Stromund Spannungsfehler bezeichnen, so führt die Schätzung im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate auf einen fehlerbehafteten Schätzwert  $\hat{L}_m^l$  und es gilt

$$\hat{L}_m^I \int_{t_s^I}^{t_e^I} \frac{\mathrm{d}i_m}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t = \int_{t_s^I}^{t_e^I} (v_m - Ri_m) \mathrm{d}t. \tag{20}$$

Mit Hilfe der messfehlerfreien Schätzung (13) für  $R=\hat{R}$  und (20) erhält man mit dem Strommittelwert (16) für konstante Strom- und Spannungsverstärkungen über eine PWM-Periode die Gleichung

$$\hat{L}^{I} = \hat{L}_{m}^{I} \frac{\eta}{\mu} + \frac{\Delta t^{I}}{\Delta i^{I}} \left( R \vec{t}^{I} \left( \frac{\eta}{\mu} - 1 \right) \right). \tag{21}$$

Äquivalentes gilt für die Entladephase II und eingesetzt in die Mittelung (18) ergibt sich

$$\bar{L} = \frac{\eta}{\mu} \bar{L}_{m},\tag{22}$$

mit der messfehlerbehafteten mittleren Induktivität  $\bar{L}_m$ . Multiplikative Messfehler führen demnach zu multiplikativen Schätzfehlern. **Abbildung 2** zeigt Simulationsergebnisse der geschätzten mittleren Induktivität nach (18) für Arbeitspunktwechsel zwischen 4 mm und 6 mm für eine Periodendauer  $T_{pwm}=1024\,T_a$  mit einer Abtastzeit  $T_a=1\mu$ s. Zur Verifikation von (22) wurde eine Simulation mit einem reinen multiplikativen Stromfehler und eine weitere mit einem reinen multiplikativen Spannungsfehler von jeweils 5 % durchgeführt, d.h. die Faktoren wurden jeweils zu  $\mu=1.05$  bzw.  $\eta=1.05$  gesetzt. Die Schätzung der Verstärkungen  $\hat{\mu}=\bar{L}_m^i/L$  bzw.  $\hat{\eta}=L/\bar{L}_m^v$  be-

stätigen das theoretische Ergebnis (22) exakt, vgl. Abbildung 2.

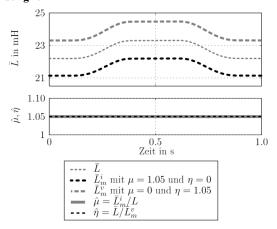


Abbildung 2 Simulationsergebnis: Geschätzte mittlere Induktivität mit multiplikativen Messfehlern.

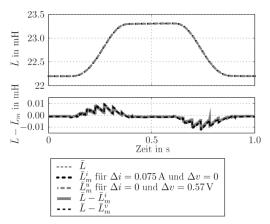


Abbildung 3 Simulationsergebnis: Geschätzte mittlere Induktivität mit additiven Messfehlern.

## 4.2 Additive Messfehler

Im Folgenden wird angenommen, dass die Strom- und Spannungsmessung additiven Messfehlern der Form

$$i = i_m + \Delta i \text{ und } v = v_m + \Delta v,$$
 (23)

mit den konstanten Abweichungen  $\Delta i$  und  $\Delta u$  unterliegen. Für konstante Abweichungen über eine PWM-Periode erhält man demnach mit der messfehlerfreien (13) und der fehlerbehafteten Schätzung (20)

$$\hat{L}^{I} = \hat{L}_{m}^{I} + \frac{\Delta t^{I}}{\Lambda i^{I}} (\Delta v - R\Delta i). \tag{24}$$

Ebenso können die gleichen Überlegungen für die Entladephase *II* vorgenommen werden. Weiterhin führt das Einsetzen der Gleichungen in die Mittelung (18) schlussendlich auf



$$\bar{L} = \frac{(\bar{\iota}^{II} - \bar{\iota}^{I})(\Delta \nu - R\Delta i)\Delta t^{I}\Delta t^{II}}{\Delta i^{I}\bar{\iota}^{II}\Delta t^{II} - \Delta i^{II}\bar{\iota}^{I}\Delta t^{I}} + \bar{L}_{m}.$$
 (25)

Additive Messfehler haben demnach einen additiven Schätzfehler zur Folge. **Abbildung 3** zeigt Simulationsergebnisse der geschätzten mittleren Induktivität nach (18) für Arbeitspunktwechsel zwischen 4 mm und 6 mm. Für die Simulationsergebnisse wurde ein additiver Stromfehler und Spannungsfehler von jeweils 5 % bzw.  $\Delta v = 0.05 \, v_{bat}$  und  $\Delta i = 0.05 \, \bar{\imath}$  für eine Versorgungspannung  $v_{bat} = 11.4$  V und einen mittleren Strom  $\bar{\imath} = 1.5$  A angesetzt. **Abbildung 3** ist zu entnehmen, dass die additiven Schätzfehler aufgrund der Gewichtung mit den Zeitintervallen  $\Delta t^I \Delta t^{II}$  verschwindend klein sind.

#### 5 Varianzschätzung

In diesem Abschnitt werden Schätzungen für die Varianzen der Parameter und damit für die Position abgeleitet. Anhand der Ergebnisse kann ein Magnetlagersystem und die Implementierung des Positionsschätzalgorithmus im Hinblick auf die erreichbare Schätzgüte optimiert werden.

Im Folgenden wird das gestörte parametrisch lineare Modell (9)

$$i_{k^{I}} = (\mathbf{s}_{k^{I}})^{T} \boldsymbol{\theta}^{I} + \delta i_{k^{I}}, \ k^{I} = m_{s}^{I}, ..., m_{e}^{I},$$
 (26)

mit dem Datenvektor  $(\mathbf{s}_k^I)^T = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \tilde{\psi}_{k^I} \end{bmatrix}$ , dem Parametervektor  $(\boldsymbol{\theta}^I)^T = \begin{bmatrix} \tilde{\iota}_{m_s^I} & (\tilde{L}^I)^{-1} \end{bmatrix}$  und einer mittelwertfreien Störung  $\delta i_{k^I}$  betrachtet. Es wird vereinfachend angenommen, dass  $(\mathbf{s}_{k^I})^T$  und damit  $\Delta \tilde{\psi}_{k^I}$  rein deterministisch ist, da die Berücksichtigung der stochastischen Eigenschaften von  $\Delta \tilde{\psi}_{k^I}$  auf ein sogenanntes Errors-in-Variable Modell führen würde und sich die Analyse für diese Modellklasse erheblich schwieriger darstellt [8]. Die Annahme kann insofern motiviert werden, als die Berechnung von  $\Delta \tilde{\psi}_{k^I}$  nach (7) einer Filterung der Messgrößen entspricht und damit  $\Delta \tilde{\psi}_{k^I}$  nur einer kleinen Störung unterliegt. Weiterhin wird angenommen, dass die Störung  $\delta i_{k^I}$  als eine mittelwertfreie normalverteilte Zufallsvariable

$$\delta i_{k^I} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(i^I))$$
 (27)

mit der Varianz  $\sigma^2(i^I)$  modelliert werden kann. Dann ist eine konsistente Schätzung der Varianz  $\hat{\sigma}^2(i^I)$  [5] mit dem Schätzfehler  $e^I = i_{k^I} - (\mathbf{s}_{k^I})^T \hat{\boldsymbol{\theta}}^I$  durch

$$\hat{\sigma}^{2}(i^{I}) = \frac{1}{M^{I} + d} (e^{I})^{T} e^{I}$$
 (28)

für  $M^I = m_e^I - m_s^I + 1$  Messungen und d = 2 Parameter gegeben und die Parametervarianzen lassen sich zu

$$\hat{\sigma}^2(\hat{\theta}_i^I) = \hat{\sigma}^2(i^I)s^{jj}, \quad j \in \{1, 2\}$$

bestimmen, wobei  $s^{ij}$  der (i,j)-te Eintrag der Matrix  $((\mathbf{S}^I)^T\mathbf{S}^I)^{-1}$  nach (10) ist. Ferner ergibt sich die Varianz für die geschätzte Induktivität nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz [1] zu

$$\hat{\sigma}^2(\hat{l}^I) = \left(\frac{T_s}{(\hat{\theta}_2^I)^2}\right)^2 \hat{\sigma}^2(\hat{\theta}_2^I). \tag{30}$$

Gleiches gilt für die Phase II und eingesetzt in die mittlere Induktivität (18) erhält man

$$\hat{\sigma}^{2}(\bar{L}) = \left(\frac{\Delta i^{I} \bar{\iota}^{II} \Delta t^{II}}{\Delta i^{II} \Delta t^{II} - \Delta i^{II} \bar{\iota}^{I} \Delta t^{I}}\right)^{2} \hat{\sigma}^{2}(\hat{L}^{I}) + \left(\frac{\Delta i^{II} \bar{\iota}^{I} \Delta t^{I}}{\Delta i^{I} \bar{\iota}^{I} \Delta t^{I} - \Delta i^{II} \bar{\iota}^{I} \Delta t^{I}}\right)^{2} \hat{\sigma}^{2}(\hat{L}^{II}).$$
(31)

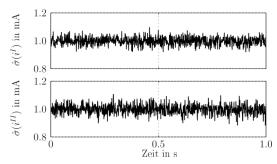
Anhand des Reluktanzmodells (2) kann insbesondere auf die Varianz der geschätzten Position

$$\hat{\sigma}^{2}(\hat{s}) = \left( \left( \frac{\partial \mathcal{R}_{s}}{\partial s} \right)^{-1} \frac{N^{2} \mathcal{R}_{l}^{2}}{\left( N^{2} - \left( \mathcal{R}_{l} + \mathcal{R}_{fc} \right) \bar{L} \right)^{2}} \right)^{2} \hat{\sigma}^{2}(\bar{L})$$

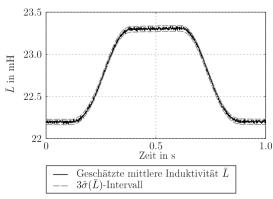
(32)

geschlossen werden. Aus den Gleichungen (28)-(30) kann nunmehr gefolgert werden, dass für eine große Anzahl an Messungen  $M = M^I + M^{II}$  und eine kleine Abtastzeit  $T_s$ die Parametervarianz und damit die Varianz der mittleren Induktivität klein ist. Aus Gleichung (32) erkennt man zusätzlich, dass der Absolutwert der mittleren Induktivität  $\bar{L}$ und die partielle Ableitung der Reluktanz des Luftspalts  $\partial \mathcal{R}_s/\partial s$  möglichst groß sein sollten, um eine kleine Positionsvarianz zu erhalten. Die Forderung einer großen Änderung der Reluktanz und damit der Induktivität mit der Position ist gleichzusetzen mit einer ohnehin erwünschten hohen Positionsauflösung. Sie ist ebenso aus elektromechanischer Sicht erwünscht, da mit einer großen Änderung der Reluktanz mit dem Luftspalt auch eine große Magnetkraftänderung mit dem Strom einhergeht. Ein großer Absolutwert der Induktivität impliziert eine langsame Stromdynamik. Diese Forderung steht jedoch im Gegensatz zu einer gewünschten schnellen Magnetkraftänderung, so dass beim Entwurf ein Kompromiss eingegangen werden muss. Die Abbildungen 4-7 zeigen Simulationsergebnisse für Arbeitspunktwechsel zwischen 4 mm und 6 mm für eine Übergangszeit von T = 0.3 s. Die Stromund Spannungsmessungen wurde hierzu mit mittelwertfreien normalverteilen Störung mit den Varianzen  $\sigma(i)$  = 1 mA und  $\sigma(v) = 15$  mV beaufschlagt. Abbildung 4 zeigt die geschätzte Streuung  $\hat{\sigma}(i^I)$  und  $\hat{\sigma}(i^{II})$  nach (28), welcher genau mit dem vorgegebenen Wert übereinstimmt. **Abbildung 5** zeigt die geschätzten Streuungen  $\hat{\sigma}(\hat{L}^I)$  und  $\hat{\sigma}(\hat{L}^{II})$  nach (30). Überdies zeigen die **Abbildungen 6** und 7 die geschätzte mittlere Induktivität und Position sowie das geschätzte  $3\hat{\sigma}(\hat{s})$ -Intervall bzw.  $3\hat{\sigma}(\bar{L})$ -Intervall in welchem theoretisch 99.7% aller Schätzwerte liegen [5]. Den Simulationsergebnissen ist zu entnehmen, dass sich anhand der Varianzschätzung (31) und (32) die Vertrauensbereiche genau vorhersagen lassen. Die Simulationsergebnisse zeigen ferner, dass die Vernachlässigung der stochastischen Eigenschaften von  $(\mathbf{s}_{k^I})^{^T}$  gerechtfertigt ist.





 $\begin{array}{lll} \textbf{Abbildung} & \textbf{4} & \text{Simulationsergebnis:} & \text{Geschätzte} & \text{Streuung} \\ \hat{\sigma}(i^I) & \text{und} & \hat{\sigma}(i^{II}) & \text{der Auf- und Endladephase.} \end{array}$ 



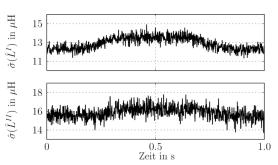
**Abbildung 6** Simulationsergebnis: Geschätzte mittlere Induktivität  $\bar{L}$  und  $3\hat{\sigma}(\bar{L})$ -Intervall.

#### 6 Zusammenfassung

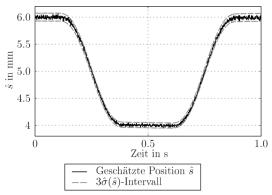
In dieser Arbeit wurde eine Messfehleranalyse und Varianzschätzung für die in [3, 4] vorgestellte sensorlose Positionsschätzung für Magnetlagersysteme durchgeführt. Sowohl für multiplikative als auch für additive Stromund Spannungsmessfehler konnte der resultierende Positionsschätzfehler exakt bestimmt werden. Eine Varianzanalyse des Schätzalgorithmus zeigt ferner, dass sich für eine gegebene normalverteile Strom- und Spannungsmessung die resultierende Positionsschätzverteilung genau vorhersagen lässt. Mit Hilfe der Ergebnisse lassen sich der Entwurf eines Magnetlagersystems und die Implementierung des Positionsschätzalgorithmus im Hinblick auf die erreichbare Schätzgüte optimieren.

#### 7 Literatur

- [1] Freund, R.W.; Hoppe, R. H.W.: *Stoer/Burlisch: Numerische Mathematik 1*, 10. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 2007.
- [2] Glück, T.; Kemmetmüller, W.; Tump, C.; Kugi, A. Bachmaier, G.; Bergmann, D.: Sensorlose Zustandsschätzung von magnetischen Verfahren und Anordnungen zur sensorlosen Zustandsschätzung von magnetischen Schwebesystemen, insbesondere Magnetlagern, Patentanmeldung.



**Abbildung 5** Simulationsergebnis: Geschätzte Streuung  $\hat{\sigma}(\hat{L}^I)$  und  $\hat{\sigma}(\hat{L}^{II})$  der Auf- und Endladephase.



**Abbildung 7** Simulationsergebnis: Geschätzte Position  $\hat{s}$  und  $3\hat{\sigma}(\hat{s})$ -Intervall.

- [3] Glück, T.; Kemmetmüller, W.; Tump, C.; Kugi, A.: A novel robust position estimator for self-sensing magnetic levitation systems based on least squares identification. Control Engineering Practice, im Druck.
- [4] Glück, T.; Kemmetmüller, W.; Tump, C.; Kugi, A.: Resistance estimation algorithm for self-sensing magnetic levitation systems. In Proc.: 5<sup>th</sup> IFAC Symposium on Mechatronic Systems, 13/15. September 2010, Boston, USA, S. 32-37.
- [5] Ljung, L.: System Identification, 2. Auflage. Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [6] Noh, M.D; Malsen, E.: Self-sensing magnetic bearings using parameter estimation. IEEE Transactions on Control Systems Technology, (1997), 46(1), S. 45-50.
- [7] Schammass, A.; Herzog, R.; Bühler, P.; Bleuler, H.: New results for self-sensing magnetic bearings using modulation approach. IEEE Transactions on Control Systems Technology, (2005), 13(4), S. 509-516.
- [8] Söderström, T.: Errors-in-variable methods in system identification. Automatica, (2007), 43, S. 939-959.
- [9] Vischer, D.: Sensorlose und spannungsgesteuerte Magnetlager. Dissertation, (1988), ETH Zürich, Schweiz, Nr. 8664.