

This document contains a post-print version of the paper

## Infini-dimensionaler Reglerentwurf für Euler-Bernoulli Balken mit Macro-Fibre Composite Aktoren

authored by J. Henikl, J. Schröck, T. Meurer, and A. Kugi

and published in *at – Automatisierungstechnik*.

---

The content of this post-print version is identical to the published paper but without the publisher's final layout or copy editing. Please, scroll down for the article.

---

### Cite this article as:

J. Henikl, J. Schröck, T. Meurer, and A. Kugi, "Infini-dimensionaler Reglerentwurf für Euler-Bernoulli Balken mit Macro-Fibre Composite Aktoren", *at – Automatisierungstechnik*, vol. 60, no. 1, pp. 10–19, 2012. DOI: [10.1524/auto.2012.0967](https://doi.org/10.1524/auto.2012.0967)

---

### BibTex entry:

```
@ARTICLE{HeniklAT2012,  
  author={J. Henikl and J. Schröck and T. Meurer and A. Kugi},  
  title={{Infini-dimensionaler Reglerentwurf für Euler-Bernoulli Balken mit Macro-Fibre Composite Aktoren}},  
  journal={at -- Automatisierungstechnik},  
  year={2012},  
  volume={60},  
  number={1},  
  pages={10--19},  
  doi = {10.1524/auto.2012.0967},  
  url = {http://www.degruyter.com/view/j/auto.2012.60.issue-1/auto.2012.0967/auto.2012.0967.xml}  
}
```

---

### Link to original paper:

<http://dx.doi.org/10.1524/auto.2012.0967>

<http://www.degruyter.com/view/j/auto.2012.60.issue-1/auto.2012.0967/auto.2012.0967.xml>

---

### Read more ACIN papers or get this document:

<http://www.acin.tuwien.ac.at/literature>

---

### Contact:

Automation and Control Institute (ACIN)  
Vienna University of Technology  
Gusshausstrasse 27-29/E376  
1040 Vienna, Austria

Internet: [www.acin.tuwien.ac.at](http://www.acin.tuwien.ac.at)  
E-mail: [office@acin.tuwien.ac.at](mailto:office@acin.tuwien.ac.at)  
Phone: +43 1 58801 37601  
Fax: +43 1 58801 37699

# Infini-dimensionaler Reglerentwurf für Euler-Bernoulli Balken mit Macro-Fibre Composite Aktoren

## Infinite-dimensional Feedback Control for Euler-Bernoulli Beams with Macro-Fibre Composite Actuators

Johannes Henikl, Johannes Schröck, Thomas Meurer, Andreas Kugi, Technische Universität Wien

---

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit der Regelung eines einseitig eingespannten Euler-Bernoulli Balkens mit piezoelektrischen Aktoren, die in Form von Macro-Fibre Composite Patches realisiert sind. Auf Basis des verteilt-parametrischen mathematischen Modells wird eine nicht-kollokierte dynamische Ausgangsregelung entworfen, die die asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises gewährleistet. Neben der mathematischen Analyse werden die entwickelten Methoden an einem Versuchsstand experimentell validiert. Die Messergebnisse zeigen die Machbarkeit des vorgestellten Ansatzes.

This paper deals with the control design for a clamped-free Euler-Bernoulli beam with piezo-electric actuators, which are realized by means of macro-fibre composite patches. Based on the distributed-parameter model a non-collocated dynamic output feedback control is designed which ensures the asymptotic stability of the closed-loop system. Besides the mathematical analysis, the developed methods are implemented and validated on an experimental set-up. Measurement results prove the feasibility of the proposed approach.

**Schlagwörter:** Verteilt-parametrische Systeme, Regelungsentwurf, Stabilisierung, Passivität, Euler-Bernoulli Balken, Piezoelektrische Aktuierung.

**Keywords:** Distributed-parameter systems, feedback control, stabilization, passivity, Euler-Bernoulli beam, piezoelectric actuation.

---

## 1 Einleitung

So genannte intelligente Materialien werden in Form von Strukturen mit integrierten Aktoren und Sensoren in einer Vielzahl von modernen technischen Applikationen eingesetzt. Für elastische mechatronische Strukturen bieten piezokeramische Komponenten die Möglichkeit, kontrolliert transiente Verformungen des Trägermaterials zu erzielen. Dies erfordert jedoch die Entwicklung geeigneter Regelungsstrategien, die es ermöglichen, robust und in Echtzeit auf externe Störungen zu reagieren, um das vorgegebene Systemverhalten sicherzustellen. Die Modellierung von elastischen mechanischen Strukturen führt in der Regel

zu einer mathematischen Beschreibung in der Form von partiellen Differentialgleichungen. Man spricht auch von Systemen mit verteilten Parametern.

Für den Regelungsentwurf von verteilt-parametrischen Systemen werden im Allgemeinen zwei methodische Herangehensweisen unterschieden. Beim so genannten *early lumping* Ansatz wird das verteilt-parametrische System zuerst mit geeigneten Methoden durch ein finit-dimensionales Modell approximiert, auf dessen Basis im Anschluss ein Regler mit den umfassenden Entwurfsmethoden für finit-dimensionale Systeme entworfen werden kann. Anwendungen dieser Methodik für elastische Strukturen sind beispielsweise in [2, 10] und den dortigen Referenzen zu finden. Die Nichtberücksichtigung

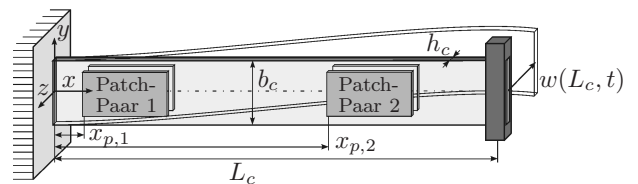
der verteilt-parametrischen Struktur kann jedoch zu einer verminderten Regelungsgüte oder sogar zu einer Destabilisierung des Systems aufgrund der wohl bekannten *Spillover*-Effekte führen [1]. Demgegenüber steht der *late lumping* Ansatz. Hier wird beim Regelungsentwurf die verteilt-parametrische Struktur und damit die volle örtliche und zeitliche Dynamik des Systems explizit berücksichtigt. Für eine ausführliche Einführung sei hier beispielsweise auf [4, 9, 13, 14] verwiesen. Zur Vibrationsdämpfung eignen sich in diesem Zusammenhang insbesondere Regelungskonzepte, welche das betrachtete System *passivieren* (siehe z.B. [9]). Im Falle einer so genannten *Aktor-Sensor-Kollokation*, in der der Stelleingang und der Sensorausgang ein duales Paar von Leistungsvariablen bilden, führt eine einfache proportionale Ausgangsrückführung immer zur Dissipativität des geschlossenen Kreises [6]. Dies ermöglicht eine dezentrale Regelungsstrategie und der Reglerentwurf ist unabhängig von den Parametern der Strecke. Weitaus schwieriger erweist sich der Regelungsentwurf bei einer nicht-kollokierten Konfiguration von Aktoren und Sensoren. Die genannten Vorteile liegen hier nicht vor und es kann auch keine allgemeine Entwurfsmethode angegeben werden. Einzelne Ergebnisse hierzu sind in den Arbeiten [3, 12] zu finden.

Im vorliegenden Beitrag wird die Regelung eines einseitig eingespannten Euler-Bernoulli Balkens mit zwei piezoelektrischen Aktorpaaren im Sinne eines *late lumping* Entwurfs behandelt. Insbesondere wird eine nicht-kollokierte Aktor-Sensor-Konfiguration untersucht. Die Aktoren sind in Form von Macro-Fibre Composite (MFC) Patches beidseitig auf den Balken geklebt, um einen symmetrischen Eingriff zu realisieren. Diese bestehen aus piezoelektrischen Fasern, welche in einer Epoxidstruktur eingebettet und mit ineinander greifenden Elektroden überzogen sind, wodurch die elektrische Feldstärke longitudinal zur Faserrichtung orientiert ist. Im Unterschied zu monolithisch aufgebauten Blei-Zirkonat-Titanat (PZT) Patches sind MFC-Patches durch diesen Aufbau sehr elastisch und weisen einen höheren elektromechanischen Kopplungskoeffizienten auf, womit größere Kräfte und Verformungen ermöglicht werden. Durch die Platzierung der Patches sowie deren Ausdehnung ergibt sich für das System ein örtlich verteilter Stelleingang. Mittels Lasersensoren wird die transversale Auslenkung des Balkens am freien Ende gemessen. Die zu den Stelleingängen kollokierten Größen sind messtechnisch nicht zugänglich, weshalb zu deren Rekonstruktion aus den verfügbaren Sensorsignalen in Anlehnung an [11] ein Beobachter entworfen wird. Dabei wird der verteilt-parametrische Beobachter so angesetzt, dass die Beobachterkorrektur und die vorhandenen Messgrößen eine kollokierte Korrektur-/Sensor-Konfiguration darstellen. Im Weiteren wird der Nachweis für die asymptotische Stabilität des Gesamtsystems bestehend aus Strecke, Regler und Beobachter erbracht.

Im ersten Abschnitt wird der Versuchsaufbau beschrieben und die Bewegungsgleichungen des Systems hergeleitet. Der Entwurf des Regelgesetzes sowie des verteilt-parametrischen Beobachters wird in den anschließenden beiden Abschnitten behandelt. Im letzten Abschnitt werden die Ergebnisse der experimentellen Validierung vorgestellt. Abschließend wird ein kurzes Resümee über die vorliegende Arbeit gezogen.

## 2 Modellierung

Im Folgenden werden die Bewegungsgleichungen des Systems unter Verwendung des Hamiltonschen Prinzips hergeleitet. Abbildung 1 zeigt den an der Position  $x = 0$  fest eingespannten Balken der Länge  $L_c$ . Die beiden identischen Patch-Paare der Länge  $L_p$  sind jeweils symmetrisch zur Mittellinie an der Vorder- sowie Hinterseite des Trägers an den Positionen  $x = x_{p,1}$  und  $x = x_{p,2}$  angebracht, wobei gilt  $0 < x_{p,i} < x_{p,i} + L_p < L_c, i \in \{1, 2\}$ . Die Indizes  $c$  und  $p$  dienen dabei zur Unterscheidung zwischen den Parametern der Trägerstruktur (carrier) und den Parametern der Aktoren (patches). Am Balkenende befindet sich die Masse  $m$  mit der Rotationsträgeit  $J$ . Die transversale Auslenkung in  $z$ -Richtung wird durch  $w(x, t)$  beschrieben. Für die Modellierung



**Bild 1:** Prinzipische Skizze des Aufbaus.

werden die folgenden Annahmen getroffen:

1. Die Rotationsträgheit des Balkens ist vernachlässigbar.
2. Das piezoelektrische Material weist lineares<sup>1</sup> Verhalten auf.
3. Die MFC-Patches sind perfekt auf den Balken aufgeklebt und der Einfluss der Klebeschicht ist vernachlässigbar.
4. Die elektrische Flussdichte in den MFC-Aktoren hat nur eine Komponente in  $x$ -Richtung.
5. Die MFC-Aktorpaare werden in einer asymmetrischen Ansteuerkonfiguration betrieben. Dabei wird an den Elektroden der beiden Patch-Aktoren an der Vorderseite die Spannung  $U_i^v(t) = U_0 + U_i(t)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , angelegt, während an den Elektroden der Aktoren an der Hinterseite die Spannung  $U_i^h(t) = U_0 - U_i(t)$ , vorgegeben wird. Die konstante Spannung  $U_0$

<sup>1</sup> Durch die Verwendung einer Hysterese- und Kriechkompensation im Versuchsaufbau kann dies angenommen werden (siehe [7, 17]).

ist für eine symmetrische Ansteuerung<sup>2</sup> der beiden Patch-Paare notwendig, da die Patches einen asymmetrischen Ansteuerbereich von  $[-500, +1500]$  V aufweisen.

6. Es gelten die Euler-Bernoulli Annahmen.

Zur Ermittlung des mathematischen Modells wird das erweiterte Hamiltonsche Prinzip in der Form

$$\int_{t_0}^{t_e} [\delta(E^{kin} - E^{pot}) + \delta E^{nk}] dt = 0 \quad (1)$$

verwendet. Hier stellt  $\delta$  den Variationsoperator dar,  $E^{kin}$  sowie  $E^{pot}$  beschreiben die gesamte kinetische und potentielle Energie des Systems, welche sich aus den Anteilen der Trägerstruktur, der beiden Patchpaare sowie der Endmasse zusammensetzen. Die durch Dämpfung hervorgerufenen nicht-konservativen Anteile werden in  $E^{nk}$  zusammengefasst. Unter der Annahme 1 lauten die Terme der kinetischen Energie<sup>3</sup>

$$E_c^{kin} = \frac{1}{2} A_c \rho_c \int_0^{L_c} (\partial_t w)^2 dx, \quad (2a)$$

$$E_{p,i}^{kin} = A_p \rho_p \int_0^{L_c} \Omega_i(x) (\partial_t w)^2 dx, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (2b)$$

$$E_m^{kin} = \frac{1}{2} m (\partial_t w)^2 |_{x=L_c} + \frac{1}{2} J (\partial_t \partial_x w)^2 |_{x=L_c} \quad (2c)$$

mit den Querschnittsflächen  $A_c = b_c h_c$ ,  $A_p = b_p h_p$  sowie den Materialdichten  $\rho_c$  und  $\rho_p$ . Die Terme  $\Omega_i(x)$  beschreiben die örtliche Charakteristik der MFC-Aktorpaare (siehe auch Anmerkung 1). Die potentielle Energie des Trägerbalkens ergibt sich unter der Annahme 6 zu

$$E_c^{pot} = \frac{1}{2} \Lambda_c \int_0^{L_c} (\partial_x^2 w)^2 dx \quad (3a)$$

mit  $\Lambda_c = Y_c I_c$ , wobei  $Y_c$  das Elastizitätsmodul und  $I_c = b_c h_c^3 / 12$  das axiale Flächenträgheitsmoment beschreiben. Die Annahmen 2 - 5 führen auf die potentielle Energie der MFC-Aktoren in der Form

$$E_{p,i}^{pot} = \int_0^{L_c} \Omega_i(x) (\Lambda_p (\partial_x^2 w)^2 + 2U_i \Gamma_p \partial_x^2 w) dx \quad (3b)$$

für  $i \in \{1, 2\}$ . Hierbei gelten  $\Lambda_p = c_p^{1111} b_p [(h_c/2 + h_p)^3 - h_c^3/8]/3$ ,  $\Gamma_p = A_p a_1^{11} (h_c + h_p)/2\beta_{11} e_p$  mit den konstitutiven Parametern des piezoelektrischen Materials  $c_p^{1111}$ ,  $a_1^{11}$ ,  $\beta_{11}$  und dem Elektrodenabstand  $e_p$  (siehe [16]). Die virtuelle Arbeit der nicht-konservativen Kräfte wird in Form von viskoser Dämpfung durch

$$\delta E_c^{nk} = - \int_0^{L_c} \gamma_c b_c \partial_t w \delta w dx, \quad (4a)$$

$$\delta E_{p,i}^{nk} = - 2 \int_0^{L_c} \Omega_i(x) \gamma_p b_p \partial_t w \delta w dx, \quad i \in \{1, 2\} \quad (4b)$$

<sup>2</sup> Die symmetrische Ansteuerung bewirkt eine reine Biegung in  $x$ -Richtung.

<sup>3</sup> Der im Unterschied zu (2a) und (2c) nicht vorhandene Faktor 1/2 in Gleichung (2b) ist durch die Konfiguration mit zwei identischen Patches auf beiden Seiten des Balkens begründet.

mit den Koeffizienten  $\gamma_c$  und  $\gamma_p$  berücksichtigt.

Die Auswertung von (1) führt mit (2), (3), (4) und anschließender partieller Integration zu den Bewegungsgleichungen des piezoaktuierten Biegebalkens in Form der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \mu(x) \partial_t^2 w + \gamma(x) \partial_t w + \partial_x^2 (\Lambda(x) \partial_x^2 w) \\ = - 2 \sum_{i=1}^2 U_i \Gamma_p \partial_x^2 \Omega_i(x) \end{aligned} \quad (5a)$$

mit den von der Ortskoordinate  $x$  abhängigen Parametern  $\mu(x) = A_c \rho_c + 2A_p \rho_p \sum_{i=1}^2 \Omega_i(x)$ ,  $\Lambda(x) = \Lambda_c + 2\Lambda_p \sum_{i=1}^2 \Omega_i(x)$  und  $\gamma(x) = \gamma_c b_c + 2\gamma_p b_p \sum_{i=1}^2 \Omega_i(x)$ . Die Randbedingungen des Systems lauten

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \partial_x w = 0, \quad x = 0 \quad (5b) \\ \left. \begin{aligned} \Lambda_c \partial_x^2 w + J \partial_t^2 \partial_x w = 0 \\ \Lambda_c \partial_x^3 w - m \partial_t^2 w = 0 \end{aligned} \right\} \quad x = L_c. \quad (5c)$$

Des Weiteren wird von allgemeinen Anfangsbedingungen  $w(x, 0) = w^0(x)$ ,  $\partial_t w(x, 0) = w^1(x)$  ausgegangen.

**Anmerkung 1** In der vorliegenden partiellen Differentialgleichung treten zweifache Ableitungen der örtlichen Charakteristiken  $\Omega_{1,2}(x)$  auf. Für den hier betrachteten Aufbau lassen sich diese mit der Heaviside-Funktion  $\sigma(x)$  in der Form

$$\begin{aligned} \Omega_1(x) &= \sigma(x - x_{p,1}) - \sigma(x - x_{p,1} - L_p), \\ \Omega_2(x) &= \sigma(x - x_{p,2}) - \sigma(x - x_{p,2} - L_p) \end{aligned} \quad (6)$$

darstellen. Die Unstetigkeit der Heaviside-Funktion erfordert jedoch eine Formulierung der Bewegungsgleichung im distributionellen Sinn bzw. in der schwachen Form. Um dies zu vermeiden, werden im Folgenden für  $\Omega_{1,2}(x)$  zweifach stetig differenzierbare Funktionen angenommen, welche die unstetigen Funktionen (6) hinreichend genau approximieren.

Anhand der verteilt-parametrischen Systembeschreibung (5) wird im Folgenden ein stabilisierender Regler auf Basis der Lyapunov-Theorie entworfen.

### 3 Lyapunov-basierter Reglerentwurf

Im Folgenden wird gezeigt, dass die zeitliche Änderung der Gesamtenergie des Systems entlang einer Lösungstrajektorie mit einem geeigneten Regelgesetz negativ semidefinit und damit das System dissipativ ist. Daher ist die Gesamtenergie des geschlossenen Regelkreises ein geeignetes Lyapunov-Funktional und stellt damit die Basis für die Stabilitätsanalyse dar. Für verteilt-parametrische Systeme ist die Existenz eines solchen Funktionals allerdings nicht ausreichend, um auf die Stabilität schließen zu können. Der Grund liegt darin, dass in unendlich-dimensionalen Vektorräumen die zumindest lokale Kompaktheit der Niveaumengen a priori nicht gegeben ist. Zum Nachweis der asymptotischen Stabilität des geschlossenen Kreises wird daher

das Lumer-Phillips Theorem gemeinsam mit der Erweiterung des Invarianzprinzips von LaSalle auf unendlichdimensionale Systeme angewendet.

### 3.1 Regelgesetz

Ausgehend von der Betrachtung der zeitlichen Ableitung der Gesamtenergie des autonomen Systems wird im Folgenden ein Regelgesetz abgeleitet, welches die Dissipativität des geschlossenen Regelkreises gewährleistet. Die Gesamtenergie des autonomen Systems ergibt sich mit (2) und (3) zu

$$V(w) = \frac{1}{2} \int_0^{L_c} (\mu(x)(\partial_t w)^2 + \Lambda(x)(\partial_x^2 w)^2) dx + \frac{1}{2} m (\partial_t w)^2|_{x=L_c} + \frac{1}{2} J (\partial_x \partial_t w)^2|_{x=L_c}. \quad (7)$$

Deren zeitliche Änderung entlang einer Lösungstrajektorie führt nach zweimaliger partieller Integration unter Berücksichtigung der Randbedingungen (5b) und (5c) auf

$$\dot{V}(w) = - \int_0^{L_c} (\gamma(x)(\partial_t w)^2 + 2\Gamma_p \sum_{i=1}^2 \partial_x^2 \Omega_i(x) \partial_t w U_i) dx, \quad (8)$$

womit sich wegen  $\gamma(x) > 0$  die Abschätzung

$$\dot{V}(w) \leq -2\Gamma_p \sum_{i=1}^2 U_i(t) \int_0^{L_c} \partial_x^2 \Omega_i(x) \partial_t w dx$$

ergibt. Da  $\Gamma_p > 0$  ist, wird durch die Wahl eines Regelgesetzes der Form

$$U_i = k_i \int_0^{L_c} \partial_x^2 \Omega_i(x) \partial_t w dx, \quad i \in \{1, 2\} \quad (9)$$

mit  $k_1, k_2 > 0$  die zeitliche Ableitung der Gesamtenergie negativ semidefinit. Somit ist nachgewiesen, dass die Gesamtenergie des geschlossenen Kreises mit dem Regelgesetz (9) ein Lyapunov-Funktional ist.

**Anmerkung 2** Werden in (9) für  $\Omega_{1,2}(x)$  die Gleichungen (6) eingesetzt und im distributionellen Sinn interpretiert, ergibt sich aufgrund der Eigenschaften der Delta-Distribution nach partieller Integration ein einfaches Regelgesetz der Form

$$U_i = k_i (\partial_x \partial_t w|_{x=x_{p,i}+L_p} - \partial_x \partial_t w|_{x=x_{p,i}}) \quad (10)$$

für  $i \in \{1, 2\}$ . Dieses Regelgesetz spiegelt die kollokierten Größen des Systems wider, denn die Stellgrößen bilden gemeinsam mit den rückzuführenden Winkelgeschwindigkeiten ein Leistungspaar und können daher als lokal wirkende Biegemomente an den Patch-Grenzen interpretiert werden. Der Stabilitätsnachweis ist für diesen Fall in [15] angeführt, wobei hierzu die Differentialgleichung (5) mit (6) mittels der schwachen Form im zugehörigen Dualraum interpretiert werden müssen.

### 3.2 Stabilitätsnachweis für den geschlossenen Kreis

Durch die Angabe eines Lyapunov-Funktionals kann bei verteilt-parametrischen Systemen im Allgemeinen nicht auf die Stabilität des Systems geschlossen werden. Hierzu sind weitere Untersuchungen notwendig. Der folgende Weg stellt eine systematische Methode zum Nachweis der asymptotischen Stabilität dar.

Durch die Einführung des Zustandsvektors  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3, w_4]^T$  mit  $w_1 = w$ ,  $w_2 = \partial_t w$ ,  $w_3 = \partial_t w|_{x=L_c}$ ,  $w_4 = \partial_x \partial_t w|_{x=L_c}$  und des Zustandsraums  $W = H_C^2(0, L_c) \times L_2(0, L_c) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , wobei  $H_C^2(0, L_c) = \{w_1 \in H^2(0, L_c) | w_1|_{x=0} = \partial_x w_1|_{x=0} = 0\}$ , mit dem inneren Produkt

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \int_0^L (\mu(x)w_2v_2 + \Lambda(x)\partial_x^2 w_1\partial_x^2 v_1) dx + mw_3v_3 + Jw_4v_4, \quad (11)$$

für  $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in W$  und der induzierten Norm  $\|\mathbf{w}\|_W = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle^{\frac{1}{2}}$  wird (5) unter Verwendung des Regelgesetzes (9) in eine wohl-definierte abstrakte Differentialgleichung der Form

$$\partial_t \mathbf{w} = A\mathbf{w} \quad (12)$$

überführt. Der Systemoperator lautet dabei

$$A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\mu(x)} (\gamma(x)w_2 + \partial_x^2 (\Lambda(x)\partial_x^2 w_1)) \\ +2\Gamma_p \sum_{i=1}^2 \partial_x^2 \Omega_i(x) k_i \int_0^{L_c} \partial_x^2 \Omega_i(x) w_2 dx \end{array} \right\} \\ \frac{1}{m} \Lambda_c \partial_x^3 w_1|_{x=L_c} \\ -\frac{1}{J} \Lambda_c \partial_x^2 w_1|_{x=L_c} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

wobei der Definitionsbereich durch

$$\mathcal{D}(A) = (H_C^2(0, L_c) \cap H^4(0, L_c)) \times H_C^2(0, L_c) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (14)$$

gegeben ist. Aufgrund der speziellen Wahl des Zustandsraums entspricht die Gesamtenergie (7) des Systems dem Ausdruck

$$V(w) = V(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|_W^2,$$

weshalb die Norm auch als Energienorm bezeichnet wird.

**Satz 1** Für den Operator  $A$  gelten die folgenden Eigenschaften:

- i)  $A$  ist der infinitesimale Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  von Kontraktionen auf  $W$ .
- ii) Die  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  ist asymptotisch stabil.



Der Nachweis von Satz 1 und damit der asymptotischen Stabilität erfolgt in mehreren Einzelschritten. Zuerst wird gezeigt, dass der eingeführte Operator  $A$  dissipativ ist. Im Anschluss kann mit dem Lumer-Phillips Theorem gezeigt werden, dass  $A$  der infinitesimale Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe von Kontraktionen ist. Vor der Anwendung des Invarianzprinzips von LaSalle ist in einem zweiten Schritt die Präkompaktheit des Orbits durch  $w$  nachzuweisen. Im Anschluss wird gezeigt, dass die größte positiv invariante Teilmenge von  $\dot{V}(w) = 0$  die Ruhelage  $w = \mathbf{0}$  ist, womit die asymptotische Stabilität des geschlossenen Kreises nachgewiesen ist. Die Ausführung dieser Schritte ist im Anhang zu finden.

#### 4 Lyapunov-basierter Beobachterentwurf

Das im vorigen Kapitel entworfene Regelgesetz (9) benötigt die Winkelgeschwindigkeiten an den Grenzen der MFC Patch-Paare. Im Folgenden wird jedoch davon ausgegangen, dass lediglich Messungen von der Balkenspitze

$$y_1 = w|_{x=L_c} \quad (15a)$$

und

$$y_2 = \partial_x w|_{x=L_c} \quad (15b)$$

zur Verfügung stehen. Aus diesem Grund wird zur Rekonstruktion der benötigten Winkelgeschwindigkeiten auf Basis der Messgrößen ein Beobachter entworfen. Der Beobachter wird dabei in Form eines erweiterten Luenberger-Beobachters für die partielle Differentialgleichung (5) so angesetzt, dass die Beobachterkorrektur und die Messgrößen ein kolloziertes Korrektur-/Sensorpaar für die Dynamik des Beobachterfehlers darstellen (vgl. [11]).

Die partielle Differentialgleichung des Beobachtersystems lautet analog zu (5a)

$$\begin{aligned} \mu(x)\partial_t^2 \hat{w} + \gamma(x)\partial_t \hat{w} + \partial_x^2(\Lambda(x)\partial_x^2 \hat{w}) \\ = -2\sum_{i=1}^2 U_i \Gamma_p \partial_x^2 \Omega_i(x). \end{aligned} \quad (16a)$$

Dabei beschreibt  $\hat{w}$  die geschätzte Balkenauslenkung. Die zugehörigen Randbedingungen am eingespannten Ende lauten

$$\hat{w}|_{x=0} = \partial_x \hat{w}|_{x=0} = 0 \quad (16b)$$

und am freien Ende werden die Korrektortermine  $l_1(t)$  und  $l_2(t)$  gemäß

$$\begin{aligned} (\Lambda_c \partial_x^2 \hat{w} + J \partial_t^2 \partial_x \hat{w})|_{x=L_c} = l_1, \\ (\Lambda_c \partial_x^3 \hat{w} - m \partial_t^2 \hat{w})|_{x=L_c} = l_2 \end{aligned} \quad (16c)$$

eingeführt, die im weiteren Verlauf zur Stabilisierung des Beobachtungsfehlersystems herangezogen werden. Die

Einführung des Schätzfehlers  $\tilde{w} = \hat{w} - w$  führt auf das Fehlersystem

$$\mu(x)\partial_t^2 \tilde{w} + \gamma(x)\partial_t \tilde{w} + \partial_x^2(\Lambda(x)\partial_x^2 \tilde{w}) = 0 \quad (17a)$$

mit den zugehörigen Randbedingungen

$$\tilde{w}|_{x=0} = \partial_x \tilde{w}|_{x=0} = 0 \quad (17b)$$

und

$$\begin{aligned} (\Lambda_c \partial_x^2 \tilde{w} + J \partial_t^2 \partial_x \tilde{w})|_{x=L_c} = l_1, \\ (\Lambda_c \partial_x^3 \tilde{w} - m \partial_t^2 \tilde{w})|_{x=L_c} = l_2. \end{aligned} \quad (17c)$$

Im Folgenden wird durch die Betrachtung der zeitlichen Änderung der Energie des Fehlersystems eine Beobachterkorrektur ermittelt, welche die Dissipativitätseigenschaft des Fehlersystems sicherstellt.

Als Kandidat für ein Lyapunov-Funktional wird wiederum das Energiefunktional (7), mit  $w$  ersetzt durch  $\tilde{w}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\tilde{w}) = \frac{1}{2} \int_0^{L_c} (\mu(x)(\partial_t \tilde{w})^2 + \Lambda(x)(\partial_x^2 \tilde{w})^2) dx \\ + \frac{1}{2} m (\partial_t \tilde{w})^2|_{x=L_c} + \frac{1}{2} J (\partial_x \partial_t \tilde{w})^2|_{x=L_c} \end{aligned} \quad (18)$$

herangezogen. Die Analyse der zeitlichen Änderung von  $\tilde{V}(\tilde{w})$  entlang einer Lösungstrajektorie führt nach zweimaliger partieller Integration unter Berücksichtigung der Randbedingungen (17b) und (17c) auf

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}(\tilde{w}) = - \int_0^{L_c} \gamma(x)(\partial_t \tilde{w})^2 dx \\ - l_2 \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c} + l_1 \partial_x \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c}. \end{aligned} \quad (19)$$

Mit  $\gamma(x) > 0$  folgt somit

$$\dot{\tilde{V}}(\tilde{w}) \leq -l_2 \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c} + l_1 \partial_x \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c}.$$

Mit der Wahl

$$\begin{aligned} l_1 = -\alpha_1 \partial_x \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c} = -\alpha_1 (\partial_x \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c} - \partial_t y_2), \\ l_2 = \alpha_2 \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c} = \alpha_2 (\partial_t \tilde{w}|_{x=L_c} - \partial_t y_1) \end{aligned} \quad (20)$$

mit  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  und (15) ist

$$\dot{\tilde{V}}(\tilde{w}) \leq -\alpha_1 (\partial_x \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c})^2 - \alpha_2 (\partial_t \tilde{w}|_{x=L_c})^2$$

negativ semidefinit.

Der so entworfene Beobachter nutzt die gemessene Position  $y_1$  und den gemessenen Winkel  $y_2$  am Balkenende zur Korrektur des Beobachterfehlers. Betrachtet man die Randbedingungen (17b) und (17c), so wird ersichtlich, dass  $l_1$  und  $l_2$  aus (20) physikalisch als Drehmoment bzw. als Kraft an der Position  $x = L_c$  interpretiert werden können. Die Beobachterkorrektur und die Messgrößen stellen also ein kolloziertes Korrektur-/Sensorpaar für die Dynamik des Beobachterfehlers dar. Durch die Nutzung der Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit in der Beobachterkorrektur können stationäre Abweichungen der Auslenkung bzw. des Winkels nicht erfasst werden. Um eine Rückführung dieser

Größen zu realisieren, wird das Lyapunov-Funktional (18) um zwei zusätzliche Terme

$$\tilde{V}_e(\tilde{w}) = \tilde{V}(\tilde{w}) + \frac{p_1}{2}(\tilde{w}|_{x=L_c})^2 + \frac{p_2}{2}(\partial_x \tilde{w}|_{x=L_c})^2 \quad (21)$$

mit  $p_1, p_2 > 0$  erweitert<sup>4</sup>. Die Berechnung der zeitlichen Änderung des erweiterten Lyapunov-Funktional führt auf

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}_e(\tilde{w}) = & - \int_0^{L_c} \gamma(x)(\partial_t \tilde{w})^2 dx \\ & - l_2 \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c} + l_1 (\partial_x \partial_t \tilde{w})|_{x=L_c} \\ & + p_1 (\tilde{w} \partial_t \tilde{w})|_{x=L_c} + p_2 (\partial_x \tilde{w} \partial_t \tilde{w})|_{x=L_c}. \end{aligned} \quad (22)$$

Ersetzt man nun (20) in der Form

$$\begin{aligned} l_1 = & -\alpha_1 \partial_x \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c} - p_2 \partial_x \tilde{w}|_{x=L_c} \\ = & -\alpha_1 (\partial_x \partial_t \hat{w}|_{x=L_c} - \partial_t y_2) - p_2 (\partial_x \hat{w}|_{x=L_c} - y_2), \\ l_2 = & \alpha_2 \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c} + p_1 \tilde{w}|_{x=L_c} \\ = & \alpha_2 (\partial_t \hat{w}|_{x=L_c} - \partial_t y_1) + p_1 (\hat{w}|_{x=L_c} - y_1), \end{aligned} \quad (23)$$

so kann (22) wieder durch

$$\dot{\tilde{V}}_e(\tilde{w}) \leq -\alpha_1 (\partial_x \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c})^2 - \alpha_2 (\partial_t \tilde{w}|_{x=L_c})^2$$

abgeschätzt werden und ist damit ebenfalls negativ semidefinit.

#### 4.1 Stabilitätsnachweis für das Beobachterfehlersystem

Der Nachweis der asymptotischen Stabilität des Beobachterfehlersystems erfolgt analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 3.2. Mit der Einführung des Zustandsvektors  $\tilde{\mathbf{w}} = [\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3, \tilde{w}_4]^T$  mit  $\tilde{w}_1 = \tilde{w}$ ,  $\tilde{w}_2 = \partial_t \tilde{w}$ ,  $\tilde{w}_3 = \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c}$ ,  $\tilde{w}_4 = \partial_x \partial_t \tilde{w}|_{x=L_c}$  lassen sich die Gleichungen (17) unter Verwendung von (23) als eine wohldefinierte abstrakte Differentialgleichung der Form

$$\partial_t \tilde{\mathbf{w}} = \tilde{A} \tilde{\mathbf{w}} \quad (24)$$

mit dem Systemoperator

$$\tilde{A} \tilde{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_2 \\ -\frac{1}{\mu(x)} (\gamma(x) \tilde{w}_2 + \partial_x^2 (\Lambda(x) \partial_x^2 \tilde{w}_1)) \\ \frac{1}{m} (\Lambda_c \partial_x^3 \tilde{w}_1 - \alpha_2 \tilde{w}_2 - p_1 \tilde{w}_1)|_{x=L_c} \\ -\frac{1}{J} (\Lambda_c \partial_x^2 \tilde{w}_1 + \alpha_1 \partial_x \tilde{w}_2 + p_2 \partial_x \tilde{w}_1)|_{x=L_c} \end{bmatrix} \quad (25)$$

und dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = (H_C^2(0, L_c) \cap H^4(0, L_c)) \times H_C^2(0, L_c) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (26)$$

darstellen. Dieser Formulierung liegt der Zustandsraum  $\tilde{W} = H_C^2(0, L_c) \times L_2(0, L_c) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit dem inneren

<sup>4</sup> In analoger Vorgehensweise kann das Regelgesetz (9) erweitert werden. Experimentelle Untersuchungen zeigten hier jedoch keine Verbesserung der Regelungsgüte.

Produkt

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle = & \int_0^{L_c} (\mu(x) \tilde{w}_2 \tilde{v}_2 + \Lambda(x) \partial_x^2 \tilde{w}_1 \partial_x^2 \tilde{v}_1) dx \\ & + m \tilde{w}_3 \tilde{v}_3 + J \tilde{w}_4 \tilde{v}_4 \\ & + p_1 (\tilde{w}_1 \tilde{v}_1)|_{x=L_c} + p_2 (\partial_x \tilde{w}_1 \partial_x \tilde{v}_1)|_{x=L_c}, \end{aligned} \quad (27)$$

für  $\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{W}$  und der induzierten Norm  $\|\tilde{\mathbf{w}}\|_{\tilde{W}} = \langle \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}} \rangle^{\frac{1}{2}}$  zugrunde. Aufgrund der speziellen Wahl des Zustandsraums entspricht (21) dem Ausdruck

$$\tilde{V}_e(\tilde{w}) = \tilde{V}_e(\tilde{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{\tilde{W}}^2.$$

**Satz 2** Für den Operator  $\tilde{A}$  gelten die folgenden Eigenschaften:

- i)  $\tilde{A}$  ist der infinitesimale Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $\tilde{T}(t)$  von Kontraktionen auf  $\tilde{W}$ .
- ii) Die  $C_0$ -Halbgruppe  $\tilde{T}(t)$  ist asymptotisch stabil.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt analog zum Nachweis von Satz 1 und kann im Detail in [15] nachgelesen werden.

#### 4.2 Verallgemeinertes Separationsprinzip

Der separate Nachweis der asymptotischen Stabilität des geschlossenen Regelkreises und des Beobachterfehlersystems lässt jedoch die Frage offen, ob diese auch für die Kombination von Regler und Beobachter erhalten bleibt.

Unter Verwendung der vom Beobachter rekonstruierten, rückzuführenden Größen (siehe (9)) lässt sich das Gesamtsystem aus dem geregelten System mit Beobachterfehler in der Form

$$\begin{bmatrix} \partial_t \mathbf{w} \\ \partial_t \tilde{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

darstellen. Der Operator  $F$  ist dabei durch

$$F \tilde{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2\Gamma_p}{\mu(x)} \sum_{i=1}^2 \partial_x^2 \Omega_i(x) k_i \int_0^{L_c} \partial_x^2 \Omega_i(x) \tilde{w}_2 dx \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

gegeben. Das Definitionsgebiet des Gesamtoperators ergibt sich dabei in einfacher Weise aus der direkten Summe  $\mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(\tilde{A})$ . Der Zustandsraum lautet  $W \oplus \tilde{W}$ . In einem finit-dimensionalen linearen System folgt die Stabilität des Gesamtsystems aufgrund des Separationsprinzips. Dieses Prinzip ist jedoch nicht unmittelbar auf verteilt-parametrische Systeme übertragbar. Ist die exponentielle Stabilität des Regelkreises und der Beobachterfehlerdynamik gegeben, folgt nach [4, Theorem 5.3.3] die exponentielle Stabilität des gesamten Systems. Liegt

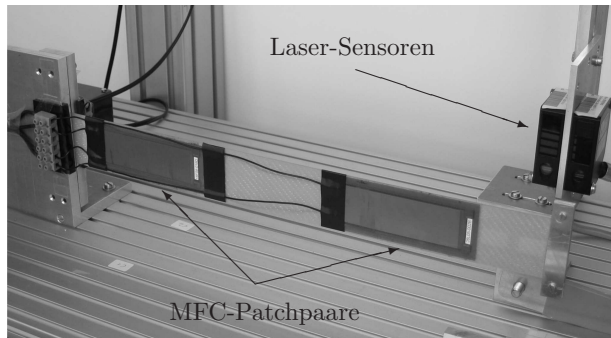


Bild 2: Versuchsaufbau.

wie hier nur asymptotische Stabilität vor, folgt nach [11] die asymptotische Stabilität des Gesamtsystems (28), wenn der Operator  $F$  in (29) beschränkt ist, was im vorliegenden Fall gezeigt werden kann. Für nähere Details dazu sei auf [15] verwiesen.

## 5 Experimentelle Validierung

Der hier vorgestellte Reglerentwurf wurde durch Messungen an einem experimentellen Versuchsaufbau, siehe Abbildung 2, validiert.

Der hierzu verwendete MFC-aktivierte Balken mit den Abmessungen  $L_c = 406$  mm,  $b_c = 45$  mm und  $h_c = 0.75$  mm besteht aus einem Glasfaserverbundmaterial und einer Endmasse von  $m = 12.6$  g. Die Rotationsträgeit der Endmasse ist im Verhältnis sehr klein und kann vernachlässigt werden. Zwei Paare von MFC-Patches vom Typ  $M8557P1^5$  mit den Abmessungen  $L_p = 85$  mm,  $b_p = 28$  mm,  $h_p = 0.3$  mm und dem Elektrodenabstand  $e_p = 0.5$  mm sind symmetrisch zur  $x$ -Achse bei  $x_{p,1} = 31$  mm und  $x_{p,2} = 246$  mm auf den Balken geklebt. Im Großsignalbetrieb weist das piezoelektrische Material der MFC-Patches signifikantes Hysterese- und Kriechverhalten auf. Zur Kompensation dieses nichtlinearen Verhaltens wird eine Hysterese- und Kriechkompensation verwendet, welche die nichtlinearen Effekte weitestgehend eliminiert [17]. Mit zwei Lasersensoren wird die Auslenkung des Balkens an zwei nahe aneinanderliegenden Messpunkten am Ende des Balkens gemessen. Unter der Annahme, dass die Krümmung des Balkens zwischen den beiden Messpunkten vernachlässigbar ist, kann anhand der Differenz der beiden Messungen der Winkel am Balkenende ermittelt werden. Die Erfassung der Messdaten sowie die Ansteuerung erfolgen mit dem Controller Board DS1103 der Firma dSPACE mit einer Abtastzeit von  $T_s = 0.2$  ms.

Zum Abgleich und zur Kontrolle des mathematischen Modells wurden die Parameter, welche nicht durch Datenblätter sowie geometrische Messungen zur Verfügung

<sup>5</sup> Smart Material Corp., <http://www.smart-material.com>

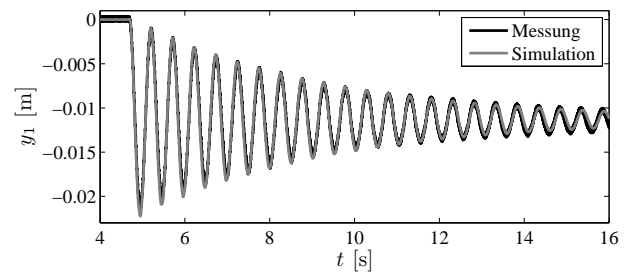


Bild 3: Vergleich von Simulation und Messung bei einem Spannungssprung von 0 auf  $-500$  V auf das erste Patch-Paar.

stehen, anhand von experimentellen Versuchen ermittelt. Die Identifikation erfolgte anhand der Sprungantwort des Systems unter Verwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Als Simulationsmodell wurde eine finit-dimensionale Approximation der Bewegungsgleichungen auf Basis der Eigenfunktionen eines homogenen einseitig eingespannten Euler-Bernoulli Balkens mit einer Anzahl von 20 Basisfunktionen verwendet. Nähere Details zur Herleitung des finit-dimensionalen Modells sind in [16] zu finden. Ferner bildete diese Approximation die Grundlage zur Implementierung des hier vorgestellten Beobachters. Als Ergebnis wurden die Parameter  $\gamma_c = 3.1$  kg/(m<sup>2</sup>s),  $\gamma_p = 10.0$  kg/(m<sup>2</sup>s),  $Y_c = 29.6 \times 10^9$  Pa,  $\rho_c = 1540.6$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_p = 5250.1$  kg/m<sup>3</sup> und  $a_1^{11}/\beta_{11} = 11.34$  As/m<sup>2</sup> identifiziert. Abbildung 3 zeigt die gemessene und simulierte Auslenkung am Ende des Balkens bei Anlegen eines Spannungssprungs von  $U_1 = -500$  V an das erste Patch-Paar. Man erkennt, dass Simulation und Messung sehr gut übereinstimmen.

Bei den im Folgenden dargestellten experimentellen Ergebnissen wurde für den Regler das Stellgesetz (10) im Sinne von Anmerkung 2 verwendet. Dies bringt den Vorteil einer einfacheren Implementierung, da keine zusätzliche örtliche Integration ausgewertet werden muss. Wie in Anmerkung 2 bereits erwähnt, kann die Stabilitätsaussage auch auf diesen Fall erweitert werden.

In den experimentellen Untersuchungen hat sich gezeigt, dass sich das Messrauschen der Lasersensoren bei dem auf Basis von (16) entworfenen Beobachter negativ auf die Qualität der geschätzten Größen auswirkt. Der Grund liegt in der notwendigen numerischen Differen-

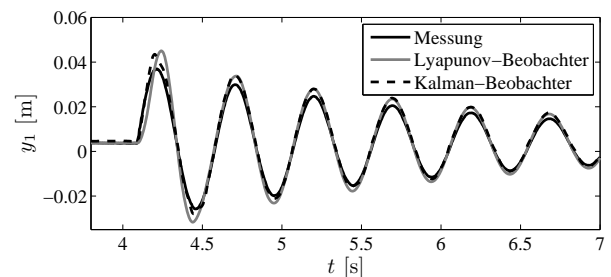
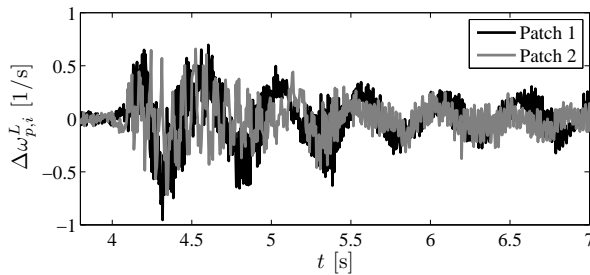
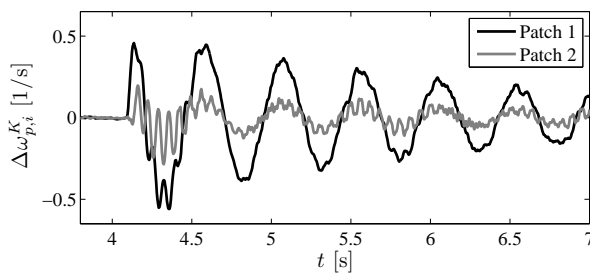


Bild 4: Vergleich des Lyapunov-basierten Beobachters mit dem Kalman-Beobachter bei einem mechanischen Stoß am Balkenende.





**Bild 5:** Ausgangsgrößen des Lyapunov-basierten Beobachters bei einem mechanischen Stoß am Balkenende.

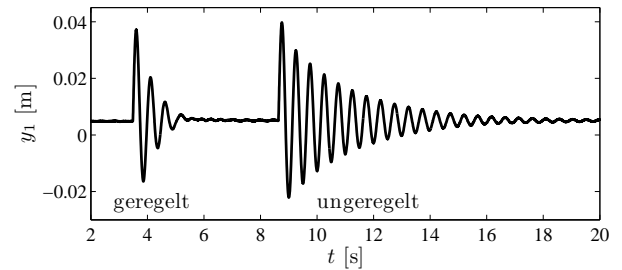


**Bild 6:** Ausgangsgrößen des Kalman-Beobachters bei einem mechanischen Stoß am Balkenende.

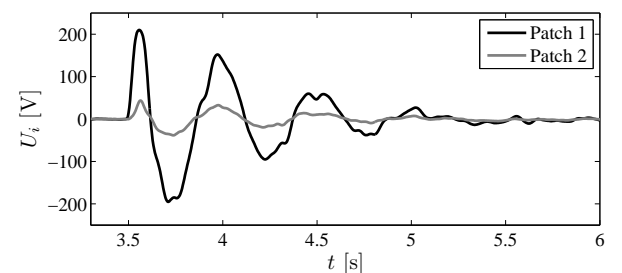
tiation der Messgrößen zur Ermittlung der Beobachterkorrektur (23). Dies führt zu hochfrequenten Oszillationen im Stellsignal. Aus diesem Grund wurde auf Basis der finit-dimensionalen Approximation des Systems ein Kalman-Beobachter unter Verwendung von 4 Basisfunktionen entworfen, welcher ein deutlich besseres Rauschverhalten zeigt. Für den Kalman-Beobachter kann jedoch zur Zeit kein systematischer Stabilitätsbeweis erbracht werden. In aktuellen Forschungsarbeiten wird versucht, diese Probleme zu lösen.

Die Abbildungen 4, 5 und 6 stellen das unterschiedliche Verhalten der beiden Beobachter dar. Im Bild 4 sind die Reaktion des Balkens auf einen mechanischen Stoß am Balkenende sowie die beobachteten Größen gezeigt. Hier ist erkennbar, dass beide Varianten den entstehenden Beobachtungsfehler ähnlich schnell minimieren. In den Bildern 5 und 6 sind die im Stellgesetz benötigten Größen  $\Delta\omega_{p,i} = \partial_x w_2|_{x=x_{p,i}+L_p} - \partial_x w_2|_{x=x_{p,i}}$  sichtbar. Das unterschiedliche Rauschverhalten der beiden Beobachter wird hier deutlich. Bei den im Folgenden dargestellten Experimenten wurde daher der Kalman-Beobachter zur Schätzung der benötigten Größen eingesetzt.

In Abbildung 7 ist die Antwort des Systems auf einen definierten Stoß am Balkenende mit und ohne Regelung gezeigt. Hier ist deutlich die dämpfende Wirkung des Reglers sichtbar und damit die Funktionalität des Konzeptes gezeigt. Die zugehörigen Stellgrößen im entsprechenden Zeitabschnitt sind in Abbildung 8 dargestellt. Man erkennt, dass der aktive Stelleingriff zur Dämpfung der Schwingungen in erster Linie am Patch-Paar, welches näher bei der Einspannung aufgebracht ist, stattfin-



**Bild 7:** Vergleich der Systemdynamik mit und ohne Regelung bei einem mechanischen Stoß am Balkenende mit Kalman-Beobachter.



**Bild 8:** Stellgrößen des Systems bei einem mechanischen Stoß am Balkenende mit Kalman-Beobachter.

det, was durch die Art der Biegeanregung unmittelbar einsichtig wird.

## 6 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde für einen einseitig eingespannten Euler-Bernoulli Balken mit piezoelektrischen Macro-Fibre Composite Aktor-Patches ein Regler zur Schwingungsdämpfung auf Basis eines verteilt-parametrischen Modells entworfen.

Mit Hilfe von Lyapunov-basierten Entwurfsmethoden wurde ein Regelgesetz entwickelt, welches die Dissipativität des geschlossenen Regelkreises gewährleistet. Für das Regelgesetz konnte durch Anwendung des Invarianzprinzips von LaSalle die asymptotische Stabilität nachgewiesen werden. Zur Rekonstruktion der im Regelgesetz benötigten, jedoch messtechnisch nicht verfügbaren Systemgrößen wurde ein asymptotisch stabiler, verteilt-parametrischer Luenberger-Beobachter entworfen, dessen Integration in den Regelkreis zu einem asymptotisch stabilen Gesamtsystem führt.

An einem experimentellen Versuchsaufbau wurden die entwickelten Verfahren implementiert und validiert. Die mit den verteilt-parametrischen Luenberger-Beobachter auftretenden Probleme bei der Implementierung wurden diskutiert und die Ergebnisse wurden mit jenen eines Kalmanfilters basierend auf einer finit-dimensionalen Approximation verglichen. Es zeigte sich, dass durch den aktiven Reglereingriff das System deutlich gedämpft werden kann.

## Anhang: Beweis von Satz 1

Im ersten Schritt ist die Dissipativität des Operators  $A$  nachzuweisen. Hierfür ist zu zeigen, dass (siehe [8, Definition 1.1.1])

$$\langle \mathbf{w}, A\mathbf{w} \rangle \leq 0. \quad (30)$$

Der linke Ausdruck von (30) entspricht unter Berücksichtigung von (11) und (12), d.h.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}, A\mathbf{w} \rangle = & \int_0^L (\mu(x)w_2\partial_t w_2 + \Lambda(x)\partial_x^2 w_1\partial_x^2 w_2) dx \\ & + mw_3\partial_t w_3 + Jw_4\partial_t w_4, \end{aligned}$$

der zeitlichen Ableitung des Lyapunov-Funktional  $V(\mathbf{w})$  gemäß (7). Wie schon in (8) gezeigt, ist diese unter Verwendung des Regelgesetzes (9) stets negativ semidefinit, woraus unmittelbar die Dissipativität des Operators  $A$  folgt.

Der Nachweis, dass der Operator  $A$  ein infinitesimaler Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe von Kontraktionen ist, erfordert die Bestimmung des inversen Operators  $A^{-1}$ . Hierfür muss der Zustand  $\mathbf{w}$  bei bekanntem  $\mathbf{v}$  aus der Gleichung  $A\mathbf{w} = \mathbf{v}$  für  $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(A)$ ,  $\mathbf{v} \in W$  bzw.

$$v_1 = w_2 \quad (31a)$$

$$\begin{aligned} v_2 = & -\frac{1}{\mu(x)} \left( \gamma(x)v_1 + \partial_x^2 (\Lambda(x)\partial_x^2 w_1) \right. \\ & \left. + 2\Gamma_p \sum_{i=1}^2 \partial_x^2 \Omega_i(x)k_i \int_0^{L_c} \partial_\kappa^2 \Omega_i(\kappa)v_1 d\kappa \right) \end{aligned} \quad (31b)$$

$$v_3 = \frac{1}{m} \Lambda_c \partial_x^3 w_1|_{x=L_c} \quad (31c)$$

$$v_4 = -\frac{1}{J} \Lambda_c \partial_x^2 w_1|_{x=L_c} \quad (31d)$$

ermittelt werden. Dabei ergibt sich unmittelbar  $w_2 = v_1$ . Zur Bestimmung von  $w_1$  wird (31b) umgeformt und zweifach bezüglich der Ortsvariablen  $x$  integriert,

$$\begin{aligned} \Lambda(x)\partial_x^2 w_1 = & -\int_0^x \int_0^\zeta (\mu(\xi)v_2 + \gamma(\xi)v_1 \\ & + 2\Gamma_p \sum_{i=1}^2 \partial_\xi^2 \Omega_i(\xi)k_i \int_0^{L_c} \partial_\kappa^2 \Omega_i(\kappa)v_1 d\kappa) d\xi d\zeta \\ & + C_1 x + C_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  können anhand (31c) und (31d) unter Berücksichtigung von  $v_1 = w_2$  durch

$$\begin{aligned} C_1 = & mv_3 + \int_0^{L_c} (\mu(\xi)v_2 + \gamma(\xi)v_1 \\ & + 2\Gamma_p \sum_{i=1}^2 \partial_\xi^2 \Omega_i(\xi)k_i \int_0^{L_c} \partial_\kappa^2 \Omega_i(\kappa)v_1 d\kappa) d\xi, \\ C_2 = & -Jv_4 + \int_0^{L_c} \int_0^\zeta (\mu(\xi)v_2 + \gamma(\xi)v_1 \\ & + 2\Gamma_p \sum_{i=1}^2 \partial_\xi^2 \Omega_i(\xi)k_i \int_0^{L_c} \partial_\kappa^2 \Omega_i(\kappa)v_1 d\kappa) d\xi d\zeta - C_1 L_c \end{aligned}$$

bestimmt werden. Die weitere zweifache örtliche Integration von (32) führt zu einer expliziten Darstellung von  $w_1$ , d.h.

$$\begin{aligned} w_1 = & -\int_0^x \int_0^\chi \left( \frac{1}{\Lambda(\eta)} \int_0^\eta \int_0^\zeta (\mu(\xi)v_2 + \gamma(\xi)v_1 \right. \\ & \left. + 2\Gamma_p \sum_{i=1}^2 \partial_\xi^2 \Omega_i(\xi)k_i \int_0^{L_c} \partial_\kappa^2 \Omega_i(\kappa)v_1 d\kappa) d\xi d\zeta \right. \\ & \left. - C_1 \eta - C_2 \right) d\eta d\chi + C_3 x + C_4. \end{aligned}$$

Mit dem Definitionsbereich (14) ergeben sich die beiden Konstanten zu  $C_3 = C_4 = 0$ . Damit ist die Existenz des inversen Operators  $A^{-1}$  gezeigt.

Für den inversen Operator  $A^{-1}$  konnte in [15] gezeigt werden, dass dieser beschränkt ist. Aus der Beschränktheit von  $A^{-1}$  folgt, dass  $\lambda = 0$  kein Eigenwert von  $A$  sein kann und daher in der Resolventenmenge liegt. Nach dem Lumer-Phillips Theorem (siehe [8]) ist damit gezeigt, dass  $A$  der infinitesimale Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  von Kontraktionen auf  $W$  ist.

Die Anwendbarkeit des Invarianzprinzips von LaSalle setzt die Präkompaktheit des Orbits durch  $\mathbf{w}$  voraus (siehe [9, Theorem 3.64]), welche bei verteilt-parametrischen Systemen a priori nicht gegeben ist. Eine Möglichkeit dies zu zeigen, bietet Theorem 3.65 in [9]. Hier muss jedoch nachgewiesen werden, dass ein  $\lambda > 0$  existiert, für welches die Resolvente  $(\lambda I - A)^{-1}$  kompakt ist. Dies erfolgt anhand der Betrachtung des Bildes von  $A^{-1}$ . Der Operator  $A$  bildet Mengen aus dem Definitionsbereich  $\mathcal{D}(A)$  auf den Zustandsraum  $W$  ab. Der beschränkte Operator  $A^{-1}$  bildet beschränkte Mengen aus  $W$  auf beschränkte Mengen aus  $\mathcal{D}(A)$  ab. Nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz sind beschränkte Mengen aus  $\mathcal{D}(A)$  präkompakt in  $W$ . Damit bildet  $A^{-1}$  beschränkte Teilmengen aus  $W$  auf präkompakte Teilmengen aus  $W$  ab, woraus die Kompaktheit des inversen Operators  $A^{-1}$  folgt. Mit Theorem 6.29 [5] hat der Operator  $A$  daher eine kompakte Resolvente und  $A$  weist nur diskrete Eigenwerte mit endlicher algebraischer Vielfachheit auf. Damit existieren Punkte  $\lambda > 0$ , für welche die Resolvente  $(\lambda I - A)^{-1}$  kompakt ist. Damit ist die Präkompaktheit des Orbits nachgewiesen und die Anwendbarkeit des Invarianzprinzips von LaSalle ist gegeben.

Nun muss noch gezeigt werden, dass die größte positiv invariante Teilmenge von  $\{\mathbf{w} \in \mathcal{D}(T) \mid \dot{V}(\mathbf{w}) = 0\}$  der Ursprung  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  ist. Aus  $\dot{V}(\mathbf{w}) = 0$  (siehe (8), (9)) folgt

$$\int_0^{L_c} \gamma(x)w_2^2 dx + 2\Gamma_p \sum_{i=1}^2 k_i \left( \int_0^{L_c} \partial_x^2 \Omega_i(x)w_2 dx \right)^2 = 0. \quad (33)$$

Damit (33) erfüllt wird, muss  $w_2 = 0$  und somit auch  $w_3 = w_4 = 0$  gelten. Nun stellt sich die Frage, ob eine Lösung  $w_1 \neq 0$  existieren kann, welche gemeinsam mit

$w_2 = w_3 = w_4 = 0$  die Differentialgleichung (12) erfüllt, also

$$\partial_x^2 \left( \Lambda(x) \partial_x^2 w_1 \right) = 0 \quad (34)$$

gilt. Durch Integration von (34) unter Berücksichtigung von (13) und des Definitionsbereichs (14) kann nachgewiesen werden, dass  $w_1 = 0$  die einzig mögliche Lösung von (34) darstellt. Damit ist gezeigt, dass die Ruhelage  $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0$  die größte positiv invariante Teilmenge von  $\{\mathbf{w} \in \mathcal{D}(T) \mid \dot{V}(\mathbf{w}) = 0\}$  ist, womit die asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises nachgewiesen ist.

#### Literatur

- [1] M. J. Balas, "Active Control of Flexible Systems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 25(3): S.415-436, 1998.
- [2] H. T. Banks, R. C. H. del Rosario und H. T. Trans, "Proper Orthogonal Decomposition-Based Control of Transverse Beam Vibrations: Experimental Implementation", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(5): S.717-726, 2002.
- [3] P. A. Chodavarapu und M. W. Spong, "On Noncollocated Control of a Single Flexible Link", *International Conference on Robotics and Automation, Minneapolis, Minnesota, S. 1101-1106 vol.2*, 1996.
- [4] R. F. Curtain und H. J. Zwart, "An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. Text in Applied Mathematics 21", *Springer-Verlag, New York*, 1995.
- [5] T. Kato, "Perturbation theory for linear operators", *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg*, 1995.
- [6] A. Kugi, D. Thull und Thomas Meurer "Regelung adaptiver Systeme, Teil 1: Piezoelektrische Strukturen", *at-Automatisierungstechnik*, 54(6): S.259-269, 2006.
- [7] Kuhnen, K. and Krejci, P., "Compensation of Complex Hysteresis and Creep Effects in Piezoelectrically Actuated Systems - A New Preisach Modeling Approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(3): S.537-550, 2009.
- [8] Z. Liu und S. Zheng, "Semigroups associated with dissipative systems", *Chapman and Hall CRC, London*, 1999.
- [9] Z. H. Luo, B. Z. Guo und O. Morgül, "Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications", *Springer-Verlag, London*, 1999.
- [10] L. Meirovitch, "Dynamics and Control of Structures", *John Wiley & Sons, New York*, 1990.
- [11] T. Meurer und A. Kugi, "Tracking control design for a wave equation with dynamic boundary conditions modeling a piezoelectric stack actuator", *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 21(5), 542-562, 2011.
- [12] T. Meurer, D. Thull und A. Kugi, "Flatness-based tracking control of a piezoactuated Euler-Bernoulli beam with non-collocated output feedback: theory and experiments", *International Journal of Control*, 81(3): S.475-493, 2008.
- [13] A. Preumont, "Vibration Control of Active Structures: An Introduction", *Kluwer, Dordrecht*, 2002.
- [14] Chr. D. Rahn, "Mechatronic Control of Distributed Noise and Vibration - A Lyapunov Approach", *Springer-Verlag, Berlin*, 2001.
- [15] J. Schröck, "Mathematical Modeling of Piezo-actuated Flexible Structures and Tracking Control of the Deflection Profiles", *Dissertation, Technische Universität Wien*, 2011.
- [16] J. Schröck, T. Meurer und A. Kugi, "Control of a flexible beam actuated by macro-fiber composite patches - Part I: Modelling and feedforward trajectory control", *Smart Materials and Structures*, 20, Article 015015 (7 Seiten) 2011.
- [17] J. Schröck, T. Meurer und A. Kugi, "Control of a flexible beam actuated by macro-fiber composite patches - Part II: Hysteresis and creep compensation, experimental results", *Smart Materials and Structures*, 20, Article 015016 (10 Seiten) 2011.

Manuskripteingang: 14. Juni 2011.

---

**Dipl.-Ing. Johannes Henikl** arbeitet als Projektassistent am Institut für Automatisierungs- & Regelungstechnik an der TU Wien. Hauptarbeitsgebiete: Modellierung und Regelung von hydraulisch aktuierten, flexiblen Mehrkörpersystemen.

Adresse: Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, A-1040 Wien, Fax: + 43 1 58801 - 37699, E-Mail:henikl@acin.tuwien.ac.at

**Dr. techn. Johannes Schröck** arbeitet als Projektassistent am Institut für Automatisierungs- & Regelungstechnik an der TU Wien. Hauptarbeitsgebiete: Modellierung und Regelung von elastomechanischen Systemen mit örtlich verteilter Aktorik.

Adresse: Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, A-1040 Wien, Fax: + 43 1 58801 - 37699, E-Mail:schroeck@acin.tuwien.ac.at

**Dr.-Ing./M.Sc. Thomas Meurer** ist Post-Doktorand und Habilitant am Institut für Automatisierungs- & Regelungstechnik an der TU Wien. Hauptarbeitsgebiete: modellbasierter Steuerungs- und Regelungsentwurf für lineare und nichtlineare verteilt-parametrische Systeme mit Anwendungen in der Verfahrenstechnik, Mechatronik und Robotik sowie flachheitsbasierte Methoden.

Adresse: Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, A-1040 Wien, Fax: + 43 1 58801 - 37699, E-Mail:meurer@acin.tuwien.ac.at

**Univ.-Prof. Dr. techn. Andreas Kugi** ist Institutsvorstand am Institut für Automatisierungs- & Regelungstechnik an der TU Wien. Hauptarbeitsgebiete: Modellierung, Simulation und Regelung nichtlinearer sowie infinit-dimensionaler komplexer dynamischer Systeme mit Anwendungen in der hydraulischen Aktorik, der Walzwerksautomatisierung, in der Automobilindustrie sowie für mikromechanische Systeme.

Adresse: Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, A-1040 Wien, Fax: + 43 1 58801 - 37699, E-Mail:kugi@acin.tuwien.ac.at