

This document contains a post-print version of the paper

Trajektorienfolgeregelung für parabolische partielle Differentialgleichungen mit variablen Parametern

authored by **L. Jadachowski, T. Meurer, and A. Kugi**

and published in *at – Automatisierungstechnik*.

The content of this post-print version is identical to the published paper but without the publisher's final layout or copy editing. Please, scroll down for the article.

Cite this article as:

L. Jadachowski, T. Meurer, and A. Kugi, "Trajektorienfolgeregelung für parabolische partielle Differentialgleichungen mit variablen Parametern", *at – Automatisierungstechnik*, vol. 58, no. 3, pp. 128–131, 2010. DOI: [10.1524/auto.2010.0822](https://doi.org/10.1524/auto.2010.0822)

BibTeX entry:

```
@article{acinpaper,  
  author = {Jadachowski, L. and Meurer, T. and Kugi, A.},  
  title = {Trajektorienfolgeregelung für parabolische partielle Differentialgleichungen mit variablen Parametern},  
  journal = {at -- Automatisierungstechnik},  
  year = {2010},  
  volume = {58},  
  number = {3},  
  pages = {128--131},  
  doi = {10.1524/auto.2010.0822}  
}
```

Link to original paper:

<http://dx.doi.org/10.1524/auto.2010.0822>

Read more ACIN papers or get this document:

<http://www.acin.tuwien.ac.at/literature>

Contact:

Automation and Control Institute (ACIN)
Vienna University of Technology
Gusshausstrasse 27-29/E376
1040 Vienna, Austria

Internet: www.acin.tuwien.ac.at
E-mail: office@acin.tuwien.ac.at
Phone: +43 1 58801 37601
Fax: +43 1 58801 37699



Trajektorienfolgeregelung für parabolische partielle Differenzialgleichungen mit variablen Parametern

Tracking Control for Parabolic PDEs with Varying Parameters

Lukas Jadachowski, Thomas Meurer, Andreas Kugi, TU Wien

Zusammenfassung Dieser Beitrag beschäftigt sich mit dem Entwurf von Trajektorienfolgeregelungen für Systeme, die durch lineare parabolische partielle Differenzialgleichungen mit orts- und zeitvariablen Parametern und Randeingriff beschrieben werden. Der Regelungsentwurf wird mittels der so genannten Backstepping-Methodik durchgeführt, mit Hilfe derer eine exponentiell stabilisierende Zustandsrückführung ermittelt wird, die garantiert, dass sich im nominellen Fall der geschlossene Regelkreis wie ein vorgegebenes Zielsystem verhält. Für den Entwurf des Führungsverhaltens wird eine Modifikation des Zielsystems derart vorgenommen, dass ein zusätzlicher Freiheitsgrad im Zielsystem zur Verfügung steht. Dieser wird im Rahmen eines flachheitsbasierten Entwurfs als Eingangsgröße für eine Steuerung herangezogen. Da die Implementierung des Reglers die Kenntnis des vollständigen Zustandsprofils er-

fordert, wird zusätzlich ein Zustandsbeobachter mittels der Backstepping-Methodik entworfen. ▶▶▶ **Summary** This paper deals with the tracking control design for systems governed by linear parabolic partial differential equations with spatially and temporally varying coefficients and boundary input. For the boundary feedback control the backstepping method is applied, which allows to determine an exponentially stabilizing state feedback controller such that the closed-loop system behaves in the nominal case like a predefined target system. For trajectory tracking an additional degree-of-freedom is introduced in the target system, which is exploited within the flatness based feedforward control design. The realization of the state feedback controller requires the knowledge of the full state evolution. For this, also a backstepping-like observer design is considered.

Schlagwörter Trajektorienfolgeregelung, partielle Differenzialgleichung, Backstepping, differenzielle Flachheit, Stabilisierung, Beobachterentwurf, orts- und zeitabhängige Parameter ▶▶▶ **Keywords** Tracking control, partial differential equation, backstepping, differential flatness, stabilization, observer design, spatially and temporally varying coefficients

1 Einleitung und Problemstellung

Die mathematische Modellierung eines dynamischen Prozesses führt in der Regel auf eine Beschreibung durch partielle Differenzialgleichungen (PDgl.), wenn örtliche Einflüsse nicht mehr vernachlässigt werden können. Ty-

pische Beispiele umfassen hierbei Rohr- und Festbettreaktoren der Verfahrenstechnik oder 3-Wege-Katalysatoren in der Automobiltechnik, für die spezifische Anfahr- bzw. Abfahrstrategien entlang gewünschter Solltrajektorien zu realisieren sind, sowie Aufheiz- bzw. Abkühlprozesse in

der Stahlverarbeitung, wo beispielsweise Brammen entlang vorgegebener Temperaturprofile zu erwärmen bzw. abzukühlen sind.

Eine reine Steuerung für Systeme mit verteilten Parametern (SVPn) setzt in der Regel ein stabiles Streckenverhalten voraus. Zudem ist eine Steuerung nicht in der Lage, Modellfehler und Störungen zu kompensieren. Aus diesem Grund ist es notwendig, die Steuerung um eine stabilisierende Regelung zu ergänzen. In diesem Beitrag wird die so genannte Backstepping-Methodik [4; 12] verwendet, die es ermöglicht, einen systematischen Entwurf exponentiell stabilisierender Zustandsrückführungen für verteilt-parametrische Systeme durchzuführen. Im Rahmen dieses Entwurfsverfahrens wird eine zustandsabhängige Integraltransformation des ursprünglichen und möglicherweise instabilen Originalsystems in ein exponentiell stabiles verteilt-parametrisches Zielsystem gesucht, indem eine neue PDgl. für den so genannten Integralkern gelöst wird. Die so ermittelte Zustandsrückführung garantiert, dass sich im nominellen Fall der geschlossene Regelkreis wie das exponentiell stabile Zielsystem verhält.

Zur Lösung der Trajektorienfolgeaufgabe für SVPn wird die Backstepping-Methodik mit den flachheitsbasierten Methoden [5; 9; 11] kombiniert. Der Begriff der differentiellen Flachheit bezeichnet hierbei die Existenz eines so genannten flachen Ausgangs, der eine differentielle Parametrierung sämtlicher Zustands- und Eingangsgrößen des Systems ermöglicht. Die Kombination von differentieller Flachheit und der Backstepping-Methodik kann auf zwei Arten erfolgen. Einerseits können – wie in [8] gezeigt – formale Potenzreihenansätze zur Bestimmung der Zustands- und Eingangsparametrierung des Originalsystems in Abhängigkeit eines flachen Ausgangs und dessen Zeitableitungen verwendet werden, während die Backstepping-Methodik zur Stabilisierung des verteilt-parametrischen Trajektorienfolgefehlersystems benutzt wird. Dies führt prinzipiell auf den klassischen Zwei-Freiheitsgrad-Entwurf, bei dem das Führungsverhalten durch die flache Steuerung realisiert wird und der Backstepping-basierte Rückführanteil zur Stabilisierung des Folgefehlers dient. Eine zweite Möglichkeit zur Kombination von differentieller Flachheit und Backstepping besteht darin, dass zuerst die Backstepping-Methodik angewandt wird, wobei das stabile Zielsystem derart modifiziert wird, dass ein zusätzlicher Freiheitsgrad zur Verfügung gestellt wird [7]. Dieser wird im Rahmen des flachheitsbasierten Entwurfs als Eingangsgröße für die Steuerung herangezogen, wobei im Gegensatz zur vorigen Methode die Parametrierung sämtlicher Zustands- und Eingangsgrößen anhand des Zielsystems erfolgt. Diese zweite Methode erweist sich als besonders vorteilhaft, da in diesem Fall die einfachere Struktur des exponentiell stabilen Zielsystems bei der Zustands- und Eingangsparametrierung unmittelbar genutzt werden kann.

Für die Realisierung der Backstepping-basierten Zustandsrückführung ist die Kenntnis des vollständigen orts- und zeitvariablen Zustandsprofils erforderlich. Für SVPn ist diese Forderung im Allgemeinen nicht direkt zu erfüllen, da hierzu im Prinzip eine unendliche Anzahl von Messgliedern vorausgesetzt werden müsste. Aus diesem Grund werden in diesem Beitrag die Ergebnisse zur Kombination von differentieller Flachheit und Backstepping gemäß [7] um den Beobachterentwurf erweitert. In einer gewissen Analogie zum Regelungsentwurf wird hierzu ebenfalls die Backstepping-Methodik angewandt und ein verteilt-parametrischer Beobachter zur Zustandschätzung entworfen [4; 13].

Dies wird im Weiteren exemplarisch anhand des Trajektorienfolgeproblems für eine parabolische PDgl. der Form

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + \lambda(x, t)u(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > t_0 \quad (1)$$

mit dem Anfangszustand

$$u(x, t_0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1] \quad (2)$$

sowie den konsistenten Randbedingungen

$$\partial_x u(0, t) = 0, \quad t > t_0 \quad (3)$$

$$u(1, t) = v(t), \quad t > t_0 \quad (4)$$

illustriert, wobei $v(t)$ den Randeingriff darstellt. Der Parameter $\lambda(x, t)$ bezeichnet hierbei eine orts- und zeitvariable Funktion $\lambda : (0, 1) \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}_0^+ := \{t \in \mathbb{R}^+ \mid t > t_0\}$. Das Trajektorienfolgeproblem besteht darin, den Randeingriff $v(t)$ bestehend aus einer Zustandsrückführung $\Delta v(t)$ und einer Steuerung $v^*(t)$, d. h.

$$v(t) = \Delta v(t) + v^*(t) \quad (5)$$

so zu entwerfen, dass die Ausgangsgröße

$$y(t) = u(0, t), \quad t \geq t_0 \quad (6)$$

einer geeigneten Solltrajektorie $y^*(t)$ folgt und der Trajektorienfolgefehler $e(t) = y(t) - y^*(t)$ exponentiell abklingt. Dies umfasst die Realisierung eines gewünschten Übergangs zwischen einem stationären Anfangsprofil $u(x, t_0) = u_0(x)$ und einem möglicherweise zeitvariablen Endprofil $u(x, t), t \geq t_0 + T$ innerhalb des vorgegebenen Zeitintervalls $t \in (t_0, T]$.

Der Artikel ist wie folgt gegliedert: Zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems wird in Abschnitt 2 eine stabilisierende Zustandsrückführung $\Delta v(t)$ mittels der so genannten Backstepping-Methodik entworfen. Im dritten Abschnitt des Beitrages erfolgt im Rahmen des flachheitsbasierten Entwurfs die Trajektorienplanung und der Steuerungsentwurf. In Abschnitt 4 wird mittels des Backstepping-Verfahrens ein verteilt-parametrischer Zustandsbeobachter entworfen. Zum Abschluss wird in Abschnitt 5 anhand von Simulationsstudien für den geschlossenen Regelkreis mit Zustandsbeobachter die Güte der so entworfenen Trajektorienfolgeregelung und die

Robustheit des Systems im Hinblick auf die Beobachterimplementierung untersucht.

2 Entwurf einer stabilisierenden Zustandsrückführung mittels Backstepping

Gegenstand des folgenden Abschnitts ist der Entwurf einer stabilisierenden Zustandsrückführung $\Delta v(t)$ mittels der Backstepping-Methodik. Hierzu wird eine Integraltransformation gesucht, die es ermöglicht, das möglicherweise instabile Ausgangssystem (1)–(4) in ein vorgegebenes exponentiell stabiles Zielsystem überzuführen. Wie im Weiteren gezeigt wird, muss der Kern der Integraltransformation einer speziellen PDgl., der so genannten Kern-PDgl., genügen. Die Lösung dieser Kern-PDgl. wird dabei mittels der Methode der Integraloperatoren unter Einbeziehung der sukzessiven Approximation bestimmt.

2.1 Wahl des Zielsystems

Eine der entscheidenden Fragestellungen beim Reglerentwurf mittels der Backstepping-Methodik stellt die geeignete Wahl des Zielsystems dar. Für die weitere Analyse wird exemplarisch das Zielsystem wie folgt

$$\partial_t w(x, t) = \partial_x^2 w(x, t) - \mu w(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > t_0 \quad (7)$$

$$w(x, t_0) = w_0(x), \quad x \in [0, 1] \quad (8)$$

mit den Randbedingungen

$$\partial_x w(0, t) = 0, \quad t > t_0 \quad (9)$$

$$w(1, t) = 0, \quad t > t_0 \quad (10)$$

gewählt. Es kann nun gezeigt werden, dass das Zielsystem (7)–(10) für $\mu > -\pi^2/4$ exponentiell stabil im Sinne der L_2 -Norm $\|w(x, t)\|_2 = (\int_0^1 w^2(x, t) dx)^{1/2}$ sowie der sup-Norm $\|w(x, t)\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |w(x, t)|$ ist. Für eine allgemeinere Diskussion der Wahl des Zielsystems sowie der zugehörigen Stabilitätsanalyse wird auf [7] verwiesen.

2.2 Backstepping-Transformation

Die Grundidee des Reglerentwurfs basiert auf der Anwendung der Volterraschen Integraltransformation

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_0^x k(x, \tilde{x}, t) u(\tilde{x}, t) d\tilde{x}, \quad (11)$$

um das Originalsystem (1)–(4) in das exponentiell stabile Zielsystem (7)–(10) überzuführen [4]. Man beachte, dass aufgrund des orts- und zeitvariablen Systemparameters $\lambda(x, t)$ in (1) der zu bestimmende Integrkern $k(x, \tilde{x}, t)$ ebenfalls als orts- und zeitabhängige Funktion gewählt werden muss. Für eine Motivation der Integraltransformation (11) als Grenzwert der Anwendung des klassischen Backstepping-Verfahrens auf die finite Differenzdiskretisierung der PDgl. sei der Leser beispielsweise auf [1] verwiesen.

Um den Integrkern zu bestimmen, wird im Folgenden der Ansatz (11) für $w(x, t)$ unter Berücksichtigung der Gleichungen des Originalsystems (1)–(4) in die Gleichungen (7)–(10) eingesetzt. Die dabei notwendigen partiellen Ableitungen von (11) bezüglich x und t ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \partial_x w(x, t) &= \partial_x u(x, t) - k(x, x, t) u(x, t) \\ &\quad - \int_0^x \partial_x k(x, \tilde{x}, t) u(\tilde{x}, t) d\tilde{x}, \\ \partial_x^2 w(x, t) &= \partial_x^2 u(x, t) - k(x, x, t) \partial_x u(x, t) \\ &\quad - (2\partial_x k(x, x, t) + \partial_{\tilde{x}} k(x, x, t)) u(x, t) \\ &\quad - \int_0^x \partial_x^2 k(x, \tilde{x}, t) u(\tilde{x}, t) d\tilde{x}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \partial_t w(x, t) &= \partial_t u(x, t) - \int_0^x [\partial_t k(x, \tilde{x}, t) u(\tilde{x}, t) \\ &\quad + k(x, \tilde{x}, t) \partial_t u(\tilde{x}, t)] d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Mit (1) und zweifacher partieller Integration führt die letzte Gleichung auf

$$\begin{aligned} \partial_t w(x, t) &= \partial_x^2 u(x, t) + \lambda(x, t) u(x, t) - \int_0^x [\partial_t k(x, \tilde{x}, t) \\ &\quad + \partial_{\tilde{x}}^2 k(x, \tilde{x}, t) + \lambda(\tilde{x}, t) k(x, \tilde{x}, t)] u(\tilde{x}, t) d\tilde{x} \\ &\quad + \partial_{\tilde{x}} k(x, x, t) u(x, t) + k(x, 0, t) \partial_x u(0, t) \\ &\quad - \partial_{\tilde{x}} k(x, 0, t) u(0, t) - k(x, x, t) \partial_x u(x, t). \end{aligned} \quad (13)$$

Setzt man nun (11)–(13) unter Berücksichtigung der homogenen Randbedingung (3) in die PDgl. des Zielsystems (7) ein, so ergibt sich unmittelbar, dass der Integrkern $k(x, \tilde{x}, t)$ die folgende Gleichung erfüllen muss

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^x [\partial_t k(x, \tilde{x}, t) + \partial_{\tilde{x}}^2 k(x, \tilde{x}, t) - \partial_x^2 k(x, \tilde{x}, t) \\ &\quad + \gamma(\tilde{x}, t) k(x, \tilde{x}, t)] u(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \partial_x k(x, 0, t) u(0, t) \\ &\quad - (\gamma(x, t) + 2\partial_x k(x, x, t)) u(x, t) \end{aligned} \quad (14)$$

mit $d_x k(x, x, t) = \partial_x k(x, x, t) + \partial_{\tilde{x}} k(x, x, t)$ und $\gamma(x, t) = \lambda(x, t) + \mu$. Die Forderung, dass der Ausdruck auf der rechten Seite von (14) ebenfalls identisch verschwindet, führt auf eine PDgl. für den Integrkern

$$\begin{aligned} \partial_t k(x, \tilde{x}, t) &= \partial_x^2 k(x, \tilde{x}, t) - \partial_{\tilde{x}}^2 k(x, \tilde{x}, t) \\ &\quad - \gamma(\tilde{x}, t) k(x, \tilde{x}, t) \end{aligned} \quad (15)$$

mit den Randbedingungen

$$d_x k(x, x, t) = -\frac{\gamma(x, t)}{2} \quad (16)$$

$$\partial_{\tilde{x}} k(x, 0, t) = 0. \quad (17)$$

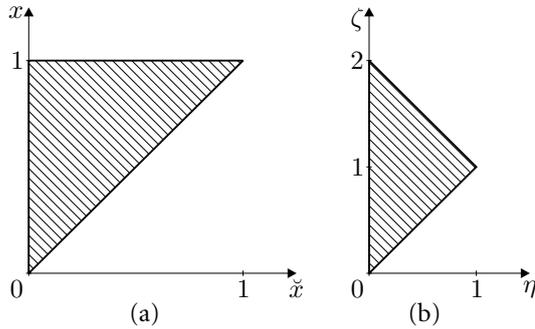


Bild 1 Definitionsbereiche für die PDgl. des Integralkerns: (a) in der (x, \tilde{x}) -Ebene mit $\tilde{x} \in (0, 1)$, $x \in (\tilde{x}, 1)$ und (b) in der (ζ, η) -Ebene mit $\eta \in (0, 1)$, $\zeta \in (\eta, 2 - \eta)$.

Das örtliche Definitionsbereich der Kern-PDgl. (15) umfasst dabei das in Bild 1a dargestellte Dreieck $\tilde{x} \in (0, 1)$, $x \in (\tilde{x}, 1)$. Die Anfangsbedingung für den Integralkern ergibt sich aus (8) und (11) zu $k(x, \tilde{x}, 0) = 0$, falls $w_0(x) = u_0(x)$ gewählt wird. Man beachte, dass die Kern-PDgl. (15) aufgrund des hyperbolischen Charakters des Differenzialoperators $\partial_{\tilde{x}}^2 - \partial_x^2$ auf der rechten Seite und der lediglich ersten Zeitableitung von $k(x, \tilde{x}, t)$ auf der linken Seite nicht klassifizierbar ist. Dies erschwert die Ermittlung des Integralkerns $k(x, \tilde{x}, t)$, da klassische Lösungsverfahren nicht unmittelbar zur Lösung dieser ungewöhnlichen PDgl. herangezogen werden können. Aus diesem Grund wird im Folgenden zur Bestimmung von $k(x, \tilde{x}, t)$ die Methode der Integraloperatoren zusammen mit der sukzessiven Approximation, wie in [2] zur Lösung gewisser Klassen von linearen PDgl. beschrieben, angewandt.

2.3 Lösung der Kern-PDgl.

Um die Kern-PDgl. (15) mit Hilfe der Methode der Integraloperatoren lösen zu können, wird diese zunächst in eine Normalform überführt. Hierzu wird in einem ersten Schritt eine Koordinatentransformation $\zeta = x + \tilde{x}$, $\eta = x - \tilde{x}$ eingeführt mit $k(x, \tilde{x}, t) = \bar{k}(\zeta(x, \tilde{x}), \eta(x, \tilde{x}), t)$. In den neuen Koordinaten ergibt sich die transformierte Kern-PDgl. (15) mit den Randbedingungen (16) und (17) zu

$$\partial_\zeta \partial_\eta \bar{k}(\zeta, \eta, t) = \frac{1}{4} \partial_t \bar{k}(\zeta, \eta, t) + \frac{1}{4} \gamma \left(\frac{\zeta - \eta}{2}, t \right) \bar{k}(\zeta, \eta, t) \quad (18)$$

$$\bar{k}(\zeta, 0, t) = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\zeta}{2}} \gamma(\alpha, t) d\alpha \quad (19)$$

$$\partial_\zeta \bar{k}(\eta, \eta, t) = \partial_\eta \bar{k}(\eta, \eta, t) \quad (20)$$

definiert auf dem Gebiet $\eta \in (0, 1)$, $\zeta \in (\eta, 2 - \eta)$, siehe Bild 1b. Um die Lösung von (18)–(20) zu bestimmen, wird im Weiteren die Gleichung der transformierten Kern-PDgl. (18) formal bezüglich ζ und η über das örtli-

che Definitionsbereich integriert. Dies ergibt eine implizite Lösung für $\bar{k}(\zeta, \eta, t)$ der Form

$$\begin{aligned} \bar{k}(\zeta, \eta, t) = & \frac{1}{4} \int_\eta^\zeta \int_0^\eta B_{\bar{k}}(\beta, \alpha, t) d\alpha d\beta \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\eta \int_0^\beta B_{\bar{k}}(\beta, \alpha, t) d\alpha d\beta \\ & - \frac{1}{4} \int_\eta^\zeta \gamma \left(\frac{\beta}{2}, t \right) d\beta - \frac{1}{2} \int_0^\eta \gamma \left(\frac{\beta}{2}, t \right) d\beta, \quad (21) \end{aligned}$$

wobei

$$B_{\bar{k}}(\beta, \alpha, t) = \partial_t \bar{k}(\beta, \alpha, t) + \gamma \left(\frac{\beta - \alpha}{2}, t \right) \bar{k}(\beta, \alpha, t). \quad (22)$$

Zur expliziten Bestimmung von $\bar{k}(\zeta, \eta, t)$ wird im Folgenden die Methode der sukzessiven Approximation herangezogen. Hierzu wird eine Reihenlösung der Form

$$\bar{k}(\zeta, \eta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{K}_n(\zeta, \eta, t) \quad (23)$$

gesucht, deren Koeffizienten rekursiv gemäß

$$\begin{aligned} \bar{K}_n(\zeta, \eta, t) = & \frac{1}{4} \int_\eta^\zeta \int_0^\eta B_{\bar{K}_{n-1}}(\beta, \alpha, t) d\alpha d\beta \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\eta \int_0^\beta B_{\bar{K}_{n-1}}(\beta, \alpha, t) d\alpha d\beta, \quad n \geq 1 \quad (24) \end{aligned}$$

mit

$$\bar{K}_0(\zeta, \eta, t) = -\frac{1}{4} \int_\eta^\zeta \gamma \left(\frac{\beta}{2}, t \right) d\beta - \frac{1}{2} \int_0^\eta \gamma \left(\frac{\beta}{2}, t \right) d\beta \quad (25)$$

bestimmt werden. Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass im allgemeinen Fall eines orts- und zeitvariablen Parameters $\gamma(x, t) = \lambda(x, t) + \mu$ keine geschlossene Lösung für den Kern $\bar{k}(\zeta, \eta, t)$ ermittelt werden kann. Im Sonderfall für konstantes $\gamma(x, t) = \gamma$, d. h. $\lambda(x, t) = \lambda$, kann die Backstepping-Methodik auf einen zeitinvarianten Kern so reduziert werden, dass eine geschlossene Lösung von (15)–(20) sehr wohl existiert [4].

Die Anwendung der Methode der sukzessiven Approximation setzt die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe (23)–(25) voraus. Offensichtlich ist die Konvergenzanalyse entscheidend von der Parameterfunktion $\gamma(x, t)$ abhängig. Es kann gezeigt werden [7], dass die Reihenlösung (23)–(25) absolut und gleichmäßig konvergiert, falls $\gamma(x, t)$ eine Gevrey-Funktion der Ordnung $\sigma \leq 2$ darstellt.

Definition 1. (Gevrey-Funktion [10]). Eine Funktion $f(t) \in G_{D,\sigma}(\Omega)$ wird als Gevrey-Funktion der Ordnung σ bezeichnet, falls $f(t) \in C^\infty(\Omega)$ und eine positive Konstante D so existiert, dass gilt

$$\sup_{t \in \Omega} |\partial_t^n f(t)| \leq D^{n+1} (n!)^\sigma \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (26)$$

Es sei bemerkt, dass die Klasse der Gevrey-Funktionen für $\sigma < 1$ die Menge der ganzen Funktionen und für $\sigma = 1$ die Menge der analytischen Funktionen umfasst. Für $\sigma > 1$ ist die Gevrey-Funktion nicht analytisch.

Wie in [7] mittels vollständiger Induktion nachgewiesen wurde, konvergiert die Reihenlösung (23) mit den rekursiv zu bestimmenden Reihenoeffizienten (24) und (25) absolut und gleichmäßig für alle Funktionen $\gamma(x, t) \in C^0([0, 1]) \times G_{D,\sigma}(\mathbb{R}_{t_0}^+)$ falls $\sigma \leq 2$.

2.4 Stabilisierende Zustandsrückführung

Mit Hilfe des Kerns $k(x, \dot{x}, t)$ kann nun direkt die Zustandsrückführung ermittelt werden, die die Transformation des Ausgangssystems (1)–(4) in das exponentiell stabile Zielsystem (7)–(10) realisiert. Mit $w(1, t) = u(1, t) - \int_0^1 k(1, \dot{x}, t) u(\dot{x}, t) d\dot{x}$ sowie den Randbedingungen (4) und (10) ergibt sich der Rückführanteil $\Delta v(t)$ am Stelleingriff $v(t)$ zu

$$\Delta v(t) = \int_0^1 k(1, \dot{x}, t) u(\dot{x}, t) d\dot{x}. \quad (27)$$

Im Weiteren wird die stabilisierende Zustandsrückführung um einen Steuerungsanteil $v^*(t)$ zur Realisierung eines gewünschten Führungsverhaltens erweitert.

3 Flachheitsbasierte Trajektorienplanung und Steuerung

Wie in Abschnitt 2 gezeigt wurde, garantiert die entworfene Rückführung (27), dass sich der geschlossene Regelkreis wie das exponentiell stabile Zielsystem (7)–(10) verhält. Man beachte, dass sich die Stabilität des Zielsystems nicht ändert, wenn die Randbedingung (10) zu

$$w(1, t) = v^*(t) \quad (28)$$

modifiziert wird, wobei $v^*(t)$ eine zeitabhängige Funktion darstellt. Dieser zusätzliche Freiheitsgrad wird im Folgenden zum Entwurf einer Steuerung zur Realisierung einer gewünschten Solltrajektorie $t \rightarrow y^*(t)$ für die Ausgangsgröße $y(t)$ gemäß (6) herangezogen.

3.1 Entwurf einer flachheitsbasierten Steuerung

Die Basis für den flachheitsbasierten Steuerungsentwurf bildet die Tatsache, dass die Ausgangsgröße (6) unter der Backstepping-Transformation (11) erhalten bleibt, d. h.

$$w(0, t) = y(t). \quad (29)$$

Im Rahmen des flachheitsbasierten Steuerungsentwurfs wird der Zustand $w(x, t)$ in Form einer Potenzreihe in der Ortskoordinate x

$$\check{w}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \check{w}_n(t) \frac{x^n}{n!} \quad (30)$$

angesetzt, wobei die zeitvariablen Koeffizienten $\check{w}_n(t)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$ im Weiteren zu bestimmen sind. Hierzu wird (30) in die PDgl. (7) des Zielsystems eingesetzt, was mit

$$\partial_t \check{w}(x, t) = \partial_t \left(\sum_{n=0}^{\infty} \check{w}_n(t) \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t \check{w}_n(t) \frac{x^n}{n!} \quad (31)$$

$$\partial_x^k \check{w}(x, t) = \partial_x^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \check{w}_n(t) \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \check{w}_{n+k}(t) \frac{x^n}{n!} \quad (32)$$

nach der Sortierung von Termen identischen Grades in x unmittelbar auf die Rekursion

$$\check{w}_{n+2}(t) = \partial_t \check{w}_n(t) + \mu \check{w}_n(t), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (33)$$

für $\check{w}_n(t)$, $n \geq 2$ führt. Es ist direkt zu erkennen, dass zur Lösung dieser Rekursion zwei Start-Bedingungen für $\check{w}_0(t)$ und $\check{w}_1(t)$ notwendig sind. Diese werden aus (29) und (9) entsprechend

$$\check{w}_0(t) = y(t), \quad (34)$$

$$\check{w}_1(t) = 0, \quad (35)$$

bestimmt, sodass sich unmittelbar eine geschlossene Lösung der Rekursion (33)–(35) zu

$$\check{w}_{2n}(t) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mu^{n-j} \partial_t^j y(t), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$\check{w}_{2n+1}(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (36)$$

ergibt. Offensichtlich kann somit eine Parametrierung aller Koeffizienten $\check{w}_n(t)$, $n \in \mathbb{N}_0$, der Potenzreihe (30) und somit des Zustandes $\check{w}(x, t)$ durch die Ausgangsgröße $y(t)$ und deren Zeitableitungen gemäß

$$\check{w}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mu^{n-j} \partial_t^j y(t) \quad (37)$$

ermittelt werden. Des Weiteren folgt aus (28) direkt die Parametrierung des Randeingriffs zu

$$\check{v}^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mu^{n-j} \partial_t^j y(t). \quad (38)$$

Dementsprechend stellt $y(t)$ einen flachen Ausgang bzw. eine Basisgröße dar. Um sicherzustellen, dass $\check{w}(x, t) \rightarrow w(x, t)$ und $\check{v}^*(t) \rightarrow v^*(t)$ muss die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (37) gewährleistet werden. Gemäß den Ausführungen in [5;6] kann leicht gezeigt werden, dass die parametrisierte Reihe (37) einen unendlichen Konvergenzradius für $y(t) \in G_{D,\sigma}(\mathbb{R}_{t_0}^+)$ mit $\sigma < 2$ aufweist.



Bemerkung 1. Der flachheitsbasierte Entwurf ist prinzipiell auch anhand des Originalsystems (1)–(4), (6) möglich, wobei analog $y(t) = u(0, t)$ einen flachen Ausgang repräsentiert. Dies wird jedoch durch den orts- und zeitvariablen Parameter $\lambda(x, t)$ signifikant erschwert, wodurch keine geschlossene Parametrierung ermittelt werden kann. Der hier vorgeschlagene Weg der Parametrierung des Zielsystems im Rahmen des Entwurfs einer Trajektorienfolgeregelung erweist sich als besonders vorteilhaft, da hier die wesentlich einfachere Struktur des Zielsystems mit konstantem Parameter unmittelbar genutzt werden kann.

3.2 Trajektorienplanung für den flachen Ausgang

Offensichtlich reduziert sich die Konvergenz der Zustands- und Eingangsparametrierungen (37) und (38) auf ein Problem der Trajektorienplanung für den flachen Ausgang $y(t)$. Aufgrund der Differenzierbarkeitsanforderungen wird im Folgenden die stückweise analytische Funktion der Form

$$y^*(t) = y_{s,0}^* + (y_{s,T}^* - y_{s,0}^*) \Theta_{\omega,T}(t - t_0) \quad (39)$$

mit einer „geglätteten Sprungfunktion“

$$\Theta_{\omega,T}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t \geq T \\ \frac{\int_0^t \theta_{\omega,T}(\tau) d\tau}{\int_0^T \theta_{\omega,T}(\tau) d\tau}, & t \in (0, T) \end{cases} \quad (40)$$

und einer „glockenförmigen Impulsfunktion“

$$\theta_{\omega,T}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin (0, T) \\ \exp\left(\frac{-1}{\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{t}{T}\right]^\omega}\right), & t \in (0, T) \end{cases} \quad (41)$$

als Solltrajektorie verwendet. Insbesondere besitzt $y^*(t)$ die Gevrey-Ordnung $\sigma = 1 + 1/\omega$, sodass aufgrund der Konvergenzbedingung des vorigen Abschnitts im Weiteren $\omega > 1$ angenommen wird. Zudem ist leicht ersichtlich, dass wegen $y^*(t) = y_{s,0}^*$ mit $\partial_t^l y^*(t) = 0$ für $t \leq t_0$, $l \in \mathbb{N}$ und $y^*(t) = y_{s,T}^*$ mit $\partial_t^l y^*(t) = 0$ für $t \geq t_0 + T$, $l \in \mathbb{N}$ die Solltrajektorie $y^*(t)$ für $t = t_0$ und $t = t_0 + T$ lokal nicht analytisch sein kann.

Aufgrund der Eigenschaften von $y^*(t)$ ermöglicht diese Wahl der Solltrajektorie unmittelbar die Realisierung von Übergängen zwischen stationären Profilen innerhalb des Zeitintervalls $t \in [t_0, t_0 + T]$ für das zeitinvariante Zielsystem. Die stationären Profile $w_s(x) = w_s(x; y_s^*)$ sind dabei infolge der Flachheitseigenschaft durch das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_x^2 w_s(x) - \mu w_s(x) &= 0, \quad x \in (0, 1) \\ \partial_x w_s(0) &= 0 \\ w_s(0) &= y_s^* \end{aligned}$$

definiert, wobei $y_s^* \in \{y_{s,0}^*, y_{s,T}^*\}$. Der zugehörige Eingang folgt aus (28) zu $v_s^* = w_s(1; y_s^*)$. Mit (38) und (39) ergibt sich somit unmittelbar die Steuerung $v^*(t)$, die den Übergang vom stationären Anfangsprofil $w_s(x; y_{s,0}^*)$ zum stationären Endprofil $w_s(x; y_{s,T}^*)$ realisiert. Aufgrund der Zeitvarianz des Originalsystems ist dies jedoch nicht notwendigerweise äquivalent zum Übergang zwischen stationären Zuständen in $u(x, t)$, was anhand der inversen Backstepping-Transformation¹

$$u(x, t) = w(x, t) - \int_0^x k^{inv}(x, \tilde{x}, t) w(\tilde{x}, t) d\tilde{x} \quad (42)$$

vom Zielsystem mit dem Zustand w in das Originalsystem mit dem Zustand u illustriert werden kann. Mit (42) ergibt sich somit die Abbildung

$$u(x, t; y_s^*) = w_s(x; y_s^*) - \int_0^x k^{inv}(x, \tilde{x}, t) w_s(\tilde{x}; y_s^*) d\tilde{x}. \quad (43)$$

Folglich wird ein stationäres Profil $w_s(x; y_s^*)$ des Zielsystems im Allgemeinen auf ein zeitvariables Profil $u(x, t; y_s^*)$ des Originalsystems transformiert. Dies ist offensichtlich auf die Orts- und Zeitabhängigkeit des Systemparameters $\lambda(x, t)$ zurückzuführen. Man beachte, dass für $y_s^* = 0$ das entsprechende stationäre Profil des Zielsystems sich zu $w_s(x; 0) = 0$ ergibt. Wertet man (43) mit $y_s^* = 0$ aus, so folgt, dass das zugehörige Profil des Originalsystems ebenfalls stationär und hierbei unabhängig von dem Parameter $\lambda(x, t)$ wird, d. h. $u_s(x, t; 0) = 0$.

Angesichts des zeitvariablen Profils $u(x, t; y_s^*)$ sei jedoch angemerkt, dass aufgrund der Invarianz der Ausgangsgröße (6) gegenüber der Backstepping-Transformation (11) die Trajektorienfolge $y(t) \rightarrow y^*(t)$ garantiert ist.

3.3 Trajektorienfolgeregelung

Mit den Ergebnissen der vorherigen Abschnitte kann im Folgenden eine Trajektorienfolgeregelung gemäß (5) ermittelt werden. Der Steuerungsanteil $v^*(t)$ ergibt sich dabei aus der Eingangsparametrierung (38) zu

$$v^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mu^{n-j} \partial_t^j y^*(t), \quad (44)$$

indem an Stelle des flachen Ausgangs $y(t)$ und dessen Zeitableitungen $\partial_t^j y(t)$ die Solltrajektorie $y^*(t)$ gemäß (39)–(41) und deren Zeitableitungen $\partial_t^j y^*(t)$ eingesetzt werden. Die Trajektorienfolgeregelung bestehend aus dem Steuerungsanteil $v^*(t)$, siehe (44), und dem

¹ Auf den Existenzbeweis der durch den Integralkern $k^{inv}(x, \tilde{x}, t)$ definierten inversen Backstepping-Transformation wird an dieser Stelle aus Platzgründen verzichtet. Die Berechnung von $k^{inv}(x, \tilde{x}, t)$ erfolgt hierbei analog zu der Vorgehensweise in Abschnitt 2.2, indem die inverse Backstepping-Transformation (42) von w auf u angewandt und die zugehörige Kern-PDgl. für $k^{inv}(x, \tilde{x}, t)$ gelöst wird.

Rückführanteil $\Delta v(t)$, siehe (27), errechnet sich somit gemäß (5) zu

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mu^{n-j} \partial_t^j y^*(t) + \int_0^1 k(1, \tilde{x}, t) u(\tilde{x}, t) d\tilde{x}. \quad (45)$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, erfordert die so ermittelte Trajektorienfolgeregelung die Kenntnis des vollständigen orts- und zeitvariablen Zustandsprofils $u(x, t)$ für alle $x \in [0, 1]$ und $t > t_0$. Aus diesem Grund wird im folgenden Abschnitt ein verteilt-parametrischer Beobachter zur Zustandsschätzung entworfen.

4 Beobachterentwurf mittels Backstepping

Der Beobachterentwurf wird in einer gewissen Analogie zum Reglerentwurf mit Hilfe der Backstepping-Methode durchgeführt [13]. Hierzu wird im Folgenden ein verteilt-parametrischer Zustandsbeobachter der Form

$$\partial_t \hat{u}(x, t) = \partial_x^2 \hat{u}(x, t) + \lambda(x, t) \hat{u}(x, t) + p_1(x, t) [y(t) - \hat{u}(0, t)], \quad x \in (0, 1), \quad t > t_0 \quad (46)$$

$$\hat{u}(x, t_0) = \hat{u}_0(x), \quad x \in [0, 1] \quad (47)$$

mit den Randbedingungen

$$\partial_x \hat{u}(0, t) = p_{10} [y(t) - \hat{u}(0, t)], \quad t > t_0 \quad (48)$$

$$\hat{u}(1, t) = v(t), \quad t > t_0 \quad (49)$$

entworfen, wobei als einzige Messgröße $y(t) = u(0, t)$ angenommen wird. Der Beobachtungsfehler $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - \hat{u}(x, t)$ genügt hierbei den Gleichungen

$$\partial_t \tilde{u}(x, t) = \partial_x^2 \tilde{u}(x, t) + \lambda(x, t) \tilde{u}(x, t) - p_1(x, t) \tilde{u}(0, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > t_0 \quad (50)$$

$$\partial_x \tilde{u}(0, t) = -p_{10} \tilde{u}(0, t), \quad t > t_0$$

$$\tilde{u}(1, t) = 0, \quad t > t_0.$$

Man beachte, dass der Beobachter (46)–(49) die um die zusätzlichen Korrektortermine $p_1(x, t) [y(t) - \hat{u}(0, t)]$ und $p_{10} [y(t) - \hat{u}(0, t)]$ erweiterte Kopie des Systems (1)–(4) darstellt und somit in seiner Form einem vollständigen Luenberger-Beobachter für eine Strecke mit endlich-dimensionalem Charakter ähnelt.

Die beiden Verstärkungsfaktoren der Korrektortermine $p_1(x, t)$ und p_{10} werden im Folgenden so entworfen, dass der Beobachtungsfehler $\tilde{u}(x, t)$ exponentiell abklingt.

4.1 Wahl des Zielsystems

Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 2 wird im Folgenden ein exponentiell stabiles Zielsystem für die

Fehlerdynamik (50) des Beobachters (46)–(49) gesucht. Eine geeignete Wahl stellt ein Zielsystem der Form

$$\partial_t \tilde{w}(x, t) = \partial_x^2 \tilde{w}(x, t) - \tilde{\mu} \tilde{w}(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > t_0 \quad (51)$$

$$\tilde{w}(x, t_0) = \tilde{w}_0(x), \quad x \in [0, 1] \quad (52)$$

mit den Randbedingungen

$$\partial_x \tilde{w}(0, t) = 0, \quad t > t_0 \quad (53)$$

$$\tilde{w}(1, t) = 0, \quad t > t_0 \quad (54)$$

dar. Man erkennt, dass für diese PDgl. (vgl. dazu (7)–(10) in Abschnitt 2.1) die exponentielle Stabilität in der L_2 -Norm sowie in der sup-Norm für $\tilde{\mu} > -\pi^2/4$ nachgewiesen werden kann.

4.2 Inverse Backstepping-Transformation

Um die Verstärkungsfaktoren der Korrektortermine $p_1(x, t)$ und p_{10} zu bestimmen, wird im Folgenden die inverse Volterrasche Integraltransformation

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{w}(x, t) - \int_0^x p(x, \tilde{x}, t) \tilde{w}(\tilde{x}, t) d\tilde{x} \quad (55)$$

betrachtet² [4; 12]. Setzt man den Ausdruck (55) für $\tilde{u}(x, t)$ unter Berücksichtigung der Gleichungen (51)–(54) in die Fehlerdynamik des Beobachters (50) ein, so folgt nach der analogen Vorgehensweise wie in Abschnitt 2.2 eine neue PDgl. für den Integralkern $p(x, \tilde{x}, t)$ der Form

$$\partial_t p(x, \tilde{x}, t) = \partial_x^2 p(x, \tilde{x}, t) - \partial_{\tilde{x}}^2 p(x, \tilde{x}, t) + \tilde{\gamma}(\tilde{x}, t) p(x, \tilde{x}, t) \quad (56)$$

mit den Randbedingungen

$$p(x, x, t) = \frac{1}{2} \int_0^x \tilde{\gamma}(\alpha, t) d\alpha + p(0, 0, t) \quad (57)$$

$$p(1, \tilde{x}, t) = 0, \quad (58)$$

wobei $\tilde{\gamma}(x, t) = \lambda(x, t) + \tilde{\mu}$. Die Anfangsbedingung für $p(x, \tilde{x}, t)$ ergibt sich zu $p(x, \tilde{x}, t_0) = 0$, falls $\tilde{w}_0(x) = \tilde{u}_0(x)$ gewählt wird. Aus (50) ergeben sich zwei weitere Beziehungen

$$p_{10} = p(0, 0, t) \quad (59)$$

$$p_1(x, t) = \partial_x p(x, 0, t),$$

die eine Vorschrift zur Bestimmung der gesuchten Verstärkungsfaktoren der Korrektortermine $p_1(x, t)$ und p_{10} darstellen. Hierzu muss jedoch zunächst der Integralkern $p(x, \tilde{x}, t)$ berechnet werden.

² Aufgrund des zusätzlichen Terms $\tilde{u}(0, t)$ auf der rechten Seite der PDgl. (50) ist es wesentlich komplizierter, die Verstärkungsfaktoren der Korrektortermine $p_1(x, t)$ und p_{10} durch die Anwendung der Integraltransformation von \tilde{u} auf \tilde{w} zu bestimmen. Unter der Voraussetzung, dass die Existenz und Eindeutigkeit dieser inversen Transformation gewährleistet ist, können $p_1(x, t)$ und p_{10} analog zu den Ausführungen in [4; 12] mit Hilfe der Transformation (55) ermittelt werden.



4.3 Lösung der Kern-PDgl.

Um den Integralkern $p(x, \check{x}, t)$ zu bestimmen, wird in einem ersten Schritt eine Koordinatentransformation durchgeführt. Mit den neuen Koordinaten $\bar{x} = 1 - \check{x}$, $\check{\bar{x}} = 1 - x$ und $p(x, \check{x}, t) = \bar{p}(\bar{x}(\check{x}), \check{\bar{x}}(x), t)$ lautet die transformierte PDgl. (56) in $\bar{p}(\bar{x}, \check{\bar{x}}, t)$

$$\partial_t \bar{p}(\bar{x}, \check{\bar{x}}, t) = \partial_{\bar{x}}^2 \bar{p}(\bar{x}, \check{\bar{x}}, t) - \partial_{\check{\bar{x}}}^2 \bar{p}(\bar{x}, \check{\bar{x}}, t) + \bar{\gamma}(1 - \bar{x}, t) \bar{p}(\bar{x}, \check{\bar{x}}, t) \quad (60)$$

mit den Randbedingungen

$$\bar{p}(\bar{x}, \check{\bar{x}}, t) = \frac{1}{2} \int_0^{1-\bar{x}} \bar{\gamma}(\alpha, t) d\alpha + \bar{p}(1, 1, t) \quad (61)$$

$$\bar{p}(\bar{x}, 0, t) = 0. \quad (62)$$

Offensichtlich ähnelt die PDgl. (60) für den Integralkern $\bar{p}(\bar{x}, \check{\bar{x}}, t)$ in den transformierten Koordinaten in ihrer Form der PDgl. (15) aus Abschnitt 2.2, sodass die Lösung von (60)–(62) in einer gewissen Analogie zur Vorgehensweise in Abschnitt 2.3 für $k(x, \check{x}, t)$ ermittelt werden kann. In einem zweiten Schritt wird also mit Hilfe einer weiteren Koordinatentransformation $\bar{\zeta} = \bar{x} + \check{\bar{x}}$, $\bar{\eta} = \bar{x} - \check{\bar{x}}$ und $\bar{p}(\bar{x}, \check{\bar{x}}, t) = \bar{g}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, t)$ sowie anschließender formaler Integration über das örtliche Definitionsgebiet die PDgl. (60) in eine Integralgleichung

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, t) &= \frac{1}{4} \int_{\bar{\eta}}^{\bar{\zeta}} \int_0^{\bar{\eta}} B_{\bar{g}}(\beta, \alpha, t) d\alpha d\beta \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{\bar{\eta}}^{\bar{\zeta}} \bar{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{2}, t \right) d\beta \end{aligned} \quad (63)$$

mit

$$B_{\bar{g}}(\beta, \alpha, t) = -\partial_t \bar{g}(\beta, \alpha, t) + \bar{\gamma} \left(1 - \frac{\beta + \alpha}{2}, t \right) \bar{g}(\beta, \alpha, t) \quad (64)$$

überführt, wobei sich im Vergleich zu (22) das Vorzeichen des Terms $\partial_t \bar{g}(\beta, \alpha, t)$ geändert hat. Der Integralkern $\bar{g}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, t)$ wird in den $(\bar{\zeta}, \bar{\eta})$ -Koordinaten entsprechend (23) mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation in Form einer Reihe

$$\bar{g}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{G}_n(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, t), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (65)$$

bestimmt, wobei die Reihenglieder rekursiv gemäß

$$\bar{G}_n(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, t) = \frac{1}{4} \int_{\bar{\eta}}^{\bar{\zeta}} \int_0^{\bar{\eta}} B_{\bar{G}_{n-1}}(\beta, \alpha, t) d\alpha d\beta \quad (66)$$

mit

$$\bar{G}_0(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, t) = -\frac{1}{4} \int_{\bar{\eta}}^{\bar{\zeta}} \bar{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{2}, t \right) d\beta \quad (67)$$

ermittelt werden. Ähnlich wie in Abschnitt 2.3 kann beim Beobachterentwurf im Allgemeinen keine geschlossene Lösung für den Kern $\bar{g}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, t)$ im Fall einer orts- und zeitabhängigen Funktion $\bar{\gamma}(x, t)$ gefunden werden. Lediglich im Sonderfall für $\bar{\gamma}(x, t) = \bar{\gamma}$, d. h. $\lambda(x, t) = \lambda$, kann ein geschlossener Ausdruck für $\bar{g}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, t)$ bestimmt werden [13]. Zum Konvergenznachweis von (65)–(67) kann eine analoge Argumentation wie in Abschnitt 2.3 herangezogen werden. Gilt $\bar{\gamma}(x, t) \in C^0([0, 1]) \times G_{D, \sigma}(\mathbb{R}_0^+)$ mit $\sigma \leq 2$, so konvergiert die Reihe (65)–(67) absolut und gleichmäßig.

Mit diesen Ergebnissen folgt die Lösung der Integralgleichung (63) bzw. der PDgl. (56) nach der Rücktransformation in die (x, \check{x}) -Koordinaten durch $\bar{\zeta} = 2 - x - \check{x}$, $\bar{\eta} = x - \check{x}$ zu

$$p(x, \check{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{G}_n(2 - x - \check{x}, x - \check{x}, t) \quad (68)$$

und die gesuchten Verstärkungsfaktoren der Korrektortermine p_{10} und $p_1(x, t)$ des Beobachters ergeben sich gemäß (59) zu

$$p_{10} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{G}_n(2, 0, t) \quad (69)$$

$$p_1(x, t) = -\sum_{n=0}^{\infty} (\partial_{\bar{\zeta}} \bar{G}_n(2 - x, x, t) + \partial_{\bar{\eta}} \bar{G}_n(2 - x, x, t)). \quad (70)$$

4.4 Separationsprinzip

Für lineare finit-dimensionale Systeme besagt das Separationsprinzip, dass die Dynamiken des Reglers und des Beobachters unabhängig voneinander vorgegeben werden können. Im Folgenden wird gezeigt, dass diese Eigenschaft auch im Fall des verteilt-parametrischen Systems (1)–(4) mit dem Backstepping-basierten Zustandsregler (27) und dem verteilt-parametrischen Beobachter (46)–(49), (68)–(70) gültig ist.

Dazu sei angemerkt, dass die Auswertung der Backstepping-Transformation (11) mit dem geschätzten Zustand $\hat{u}(x, t) = u(x, t) - \bar{u}(x, t)$ zusammen mit der inversen Backstepping-Transformation (55) in einer einseitigen Kopplung der jeweiligen Zielsysteme (7)–(10) für den Regler und (51)–(54) für den Beobachtungsfehler gemäß

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{w}(x, t) &= \partial_x^2 \hat{w}(x, t) - \mu \hat{w}(x, t) + \bar{w}(0, t) f(x, t), \\ \hat{w}(x, t_0) &= \hat{w}_0(x), \\ \partial_x \hat{w}(0, t) &= p_{10} \bar{w}(0, t), \\ \hat{w}(1, t) &= 0, \end{aligned} \quad (71a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{w}(x, t) &= \partial_x^2 \bar{w}(x, t) - \bar{\mu} \bar{w}(x, t), \\ \bar{w}(x, t_0) &= \bar{w}_0(x), \\ \partial_x \bar{w}(0, t) &= 0, \\ \bar{w}(1, t) &= 0, \end{aligned} \quad (71b)$$

resultiert. Hierbei stellt $f(x, t) = p_1(x, t) + k(x, 0, t)p_{10} - \int_0^x k(x, \tilde{x}, t)p_1(x, t)d\tilde{x}$ aufgrund der Beschränktheit der Integralkerne $k(x, \tilde{x}, t)$ und $p(x, \tilde{x}, t)$ für $x \in [0, 1]$, $t > t_0$ unter der Voraussetzung, dass $\gamma(x, t) \in C^0([0, 1]) \times G_{D,\sigma}(\mathbb{R}_0^+)$ und $\tilde{\gamma}(x, t) \in C^0([0, 1]) \times G_{D,\sigma}(\mathbb{R}_0^+)$, $\sigma \leq 2$ eine beschränkte Funktion dar. Insbesondere erkennt man, dass lediglich das mit dem geschätzten Zustand $\hat{u}(x, t)$ ermittelte Zielsystem für den Regler (71a) von dem Teilsystem (71b) beeinflusst wird.

Die Stabilität des Gesamtsystems (71) wird im Folgenden mit Hilfe der Lyapunov-Theorie untersucht. Hierzu wird das Lyapunov-Funktional der Form

$$V(x, t) = \frac{A}{2} \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \hat{w}^2(x, t) dx \quad (72)$$

betrachtet, wobei A einen im Weiteren zu bestimmenden Gewichtungsfaktor bezeichnet. Die zeitliche Ableitung von (72) führt zusammen mit (71) auf

$$\begin{aligned} \partial_t V(x, t) = & -A \int_0^1 (\partial_x \tilde{w}(x, t))^2 dx - A\bar{\mu} \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t) dx \\ & - \int_0^1 (\partial_x \hat{w}(x, t))^2 dx - \mu \int_0^1 \hat{w}^2(x, t) dx \\ & + \tilde{w}(0, t) \int_0^1 \hat{w}(x, t) f(x, t) dx \\ & - p_{10} \tilde{w}(0, t) \hat{w}(0, t). \end{aligned} \quad (73)$$

Dabei ergeben sich mit Hilfe der Ungleichungen von Young, Cauchy-Schwarz und Poincaré unter Berücksichtigung der Randbedingungen von (71) folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} -p_{10} \tilde{w}(0, t) \hat{w}(0, t) \leq & \frac{1}{4} \int_0^1 (\partial_x \hat{w}(x, t))^2 dx \\ & + p_{10}^2 \int_0^1 (\partial_x \tilde{w}(x, t))^2 dx, \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}(0, t) \int_0^1 \hat{w}(x, t) f(x, t) dx \leq & \frac{1}{4} \int_0^1 (\partial_x \hat{w}(x, t))^2 dx \\ & + 4B^2 \int_0^1 (\partial_x \tilde{w}(x, t))^2 dx, \end{aligned} \quad (75)$$

wobei $B = \sup_{t \in \mathbb{R}_0^+} \max_{x \in [0, 1]} f(x, t)$. Mit (74) und (75) sowie $A = 2(4B^2 + p_{10}^2)$ folgt aus (73), dass gilt

$$\begin{aligned} \partial_t V(x, t) \leq & -\frac{A}{2} \int_0^1 (\partial_x \tilde{w}(x, t))^2 dx - A\bar{\mu} \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t) dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^1 (\partial_x \hat{w}(x, t))^2 dx - \mu \int_0^1 \hat{w}^2(x, t) dx \end{aligned}$$

sowie mit der Wirtinger-Ungleichung

$$\begin{aligned} \partial_t V(x, t) \leq & -\left(\frac{\pi^2}{4} + 2\bar{\mu}\right) \frac{A}{2} \int_0^1 \tilde{w}^2(x, t) dx \\ & - \left(\frac{\pi^2}{4} + 2\mu\right) \frac{1}{2} \int_0^1 \hat{w}^2(x, t) dx \\ \leq & -\left(\frac{\pi^2}{4} + 2\bar{\mu}\right) V(x, t), \end{aligned}$$

wobei $\bar{\mu} = \min\{\mu, \bar{\mu}\}$. Hieraus folgt, dass das Gesamtsystem (71) für $\bar{\mu} > -\pi^2/8$ exponentiell stabil ist und das Separationsprinzip gilt. Offensichtlich kann durch die Entwurfsparameter μ und $\bar{\mu}$ das Abklingverhalten des Gesamtsystems direkt vorgegeben werden. Dabei sei jedoch angemerkt, dass die gewonnene Abschätzung mittels der Lyapunov-Theorie auf ein etwas konservativeres Ergebnis führt, da für die einzelnen Zielsysteme (7)–(10) und (51)–(54) die exponentielle Stabilität für $\mu > -\pi^2/4$ und $\bar{\mu} > -\pi^2/4$ nachgewiesen werden kann.

5 Simulationsergebnisse

Im Folgenden werden numerischen Resultate zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems für das betrachtete System (1)–(4) mit dem stationären Anfangsprofil $u_0(x) = 0$ präsentiert. Der Einfachheit halber wird im Weiteren die Anfangszeit $t_0 = 0$ gewählt. Die orts- und zeitvariable Parameterfunktion $\lambda(x, t)$ wird zu

$$\lambda(x, t) = 3(x + 1)[\cos(4t) + 1], \quad x \in [0, 1], t \geq 0 \quad (76)$$

angenommen – Bild 2 zeigt deren Verlauf in der (x, t) -Ebene. Die in den vorherigen Abschnitten ermittelte Trajektorienfolgeregelung (45) wird für die Realisierung approximiert, indem die Reihenansätze des Rückführ- und des Steuerungsanteils (23) und (30) mit einer Anzahl $N_{\tilde{K}} = 7$ und $N^* = 20$ von Reihenkoeffizienten berechnet werden. Eine analoge Approximation erfolgt bei der Implementierung des Zustandsbeobachters (46)–(49). Zur

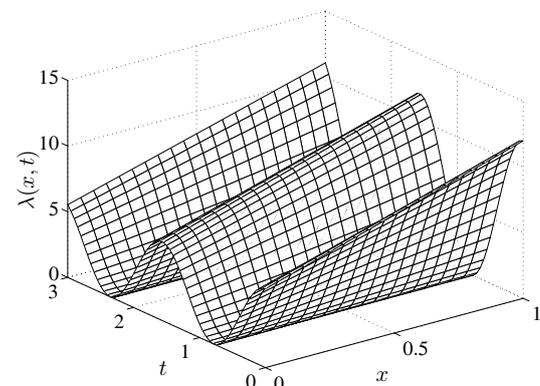


Bild 2 Orts- und zeitvariable Parameterfunktion $\lambda(x, t)$ gemäß (76).

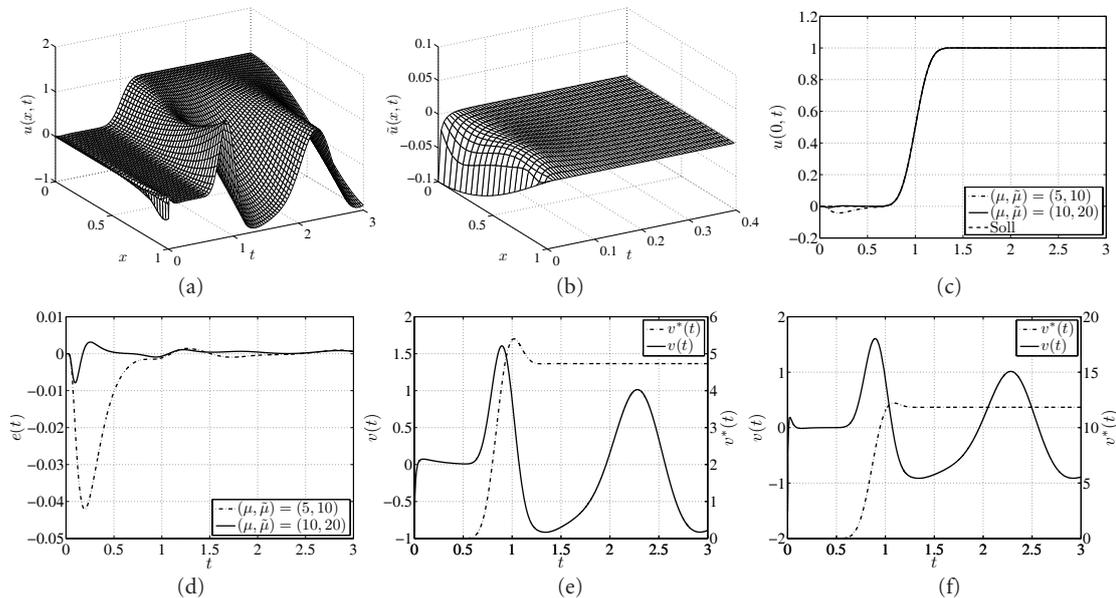


Bild 3 Simulationsergebnisse zur Trajektorienfolgeregelung (45) für das System (1)–(4) mit dem Parameter $\lambda(x, t)$ gemäß (76) und dem Zustandsbeobachter (46)–(49). Für die Entwurfsparameter gilt $(\mu, \bar{\mu}) \in \{(5, 10), (10, 20)\}$. (a) Zustandsprofil $u(x, t)$ in der (x, t) -Ebene für $(\mu, \bar{\mu}) = (10, 20)$; (b) Profil des Beobachtungsfehlers $\hat{u}(x, t)$ für $(\mu, \bar{\mu}) = (10, 20)$; (c) Vergleich von Isttrajektorie $y(t)$ und Solltrajektorie $y^*(t)$ für $(\mu, \bar{\mu}) \in \{(5, 10), (10, 20)\}$; (d) Zeitverlauf des Folgefehlers $e(t) = y(t) - y^*(t)$ für $(\mu, \bar{\mu}) \in \{(5, 10), (10, 20)\}$; (e) Randregelung $v(t)$ mit dem Steuerungsanteil $v^*(t)$ für $(\mu, \bar{\mu}) = (5, 10)$; (f) Randregelung $v(t)$ mit dem Steuerungsanteil $v^*(t)$ für $(\mu, \bar{\mu}) = (10, 20)$.

Berechnung der Verstärkungsfaktoren der Korrektortermine p_{10} und $p_1(x, t)$ werden hierzu die Reihen (69) und (70) mit einer Anzahl von jeweils $N_{\hat{c}} = 7$ der Reihenoeffizienten ausgewertet. Des Weiteren wählt man für die Anwendung des Beobachters im geschlossenen Regelkreis $\bar{\mu} > \mu > -\pi^2/8$ mit der Absicht, dass einerseits die Dynamik des Beobachtungsfehlers schneller als die der geregelten Strecke ist und andererseits die Stabilität des Gesamtsystems gewährleistet wird. Das Anfangsprofil des Beobachters wird mit $\hat{u}_0(x) = -0,1 \cos(x\pi/2) \neq u_0(x)$ festgelegt, d.h. es liegt ein Anfangsfehler $\hat{u}_0(x) \neq 0$ bei der Zustandsschätzung zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ vor. Die Solltrajektorie $y^*(t)$ gemäß (39)–(41) wird durch den Anfangswert $y_{s,0}^* = 0$, den Endwert $y_{s,T}^* = 1$, die Übergangszeit $T = 2$ und die Gevrey-Ordnung $\sigma = 1,5$ mit $\omega = 2$ definiert.

Simulationsergebnisse zur Trajektorienfolgeregelung sind exemplarisch für zwei Szenarien mit den Entwurfsparametern $(\mu, \bar{\mu}) \in \{(5, 10), (10, 20)\}$ in Bild 3 dargestellt. Speziell zeigt Bild 3a den Verlauf des geregelten Zustandes $u(x, t)$ für $(\mu, \bar{\mu}) = (10, 20)$ in der (x, t) -Ebene. Das Abklingen des Beobachtungsfehlers $\hat{u}(x, t)$ im gesamten Profil kann Bild 3b entnommen werden. Bild 3c zeigt die Ausgangsgröße $y(t)$ im Vergleich zu der vorgegebenen Solltrajektorie $y^*(t)$ abhängig von den Entwurfsparametern μ und $\bar{\mu}$. Die durch den Anfangsfehler $\hat{u}_0(x)$ induzierte Störung in der Trajektorienfolgeregelung kann in Bild 3d anhand des Folgefehlers $e(t) = y(t) - y^*(t)$ beobachtet werden. Hierbei erkennt

man eindeutig, dass das Abklingverhalten von $e(t)$ unmittelbar mit den Entwurfsparametern μ und $\bar{\mu}$ verbunden ist und für $(\mu, \bar{\mu}) = (10, 20)$ bessere Ergebnisse erzielt werden. Demgegenüber zeigen die Resultate in Bild 3e und Bild 3f, dass mit dem relativ schnellen Abklingverhalten für $(\mu, \bar{\mu}) = (10, 20)$ eine deutliche Steigerung der Stellgröße $v(t)$ verbunden ist. Darüber hinaus ist es aus Bild 3a, e und f ersichtlich, dass trotz der konstant gehaltenen Ausgangsgröße $y(t) = y_{s,T}^*, t \geq T$ kein stationäres Endprofil $u(x, t), t \geq T$ erreicht wird. Dies ist auf den zeitabhängigen periodischen Charakter der Parameterfunktion $\lambda(x, t)$ zurückzuführen.

6 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde eine Trajektorienfolgeregelung mit Zustandsbeobachter für ein verteilt-parametrisches System beschrieben durch eine parabolische PDgl. mit orts- und zeitvariablen Reaktionsparameter $\lambda(x, t)$ entworfen. Hierzu wurde eine Kombination von einem Backstepping-basierten Zustandsregler zur exponentiellen Stabilisierung des Systems mit flachheitsbasierten Methoden zur Realisierung der Trajektorienplanung und der Steuerung einer Ausgangsgröße verwendet.

In einem ersten Schritt wurde mit Hilfe einer Backstepping-Transformation eine stabilisierende Zustandsrückführung so ermittelt, dass das Originalsystem in ein exponentiell stabiles Zielsystem transformiert wurde. Hierzu war die Berechnung des Kerns einer Volterraschen Integraltransformation erforderlich, was

unmittelbar auf die Ermittlung der Lösung einer Kern-PDgl. mit orts- und zeitvariablen Parametern führte. Zu deren Lösung wurde die Methode der Integraloperatoren unter Einbeziehung einer sukzessiven Approximation eingesetzt.

Um die Backstepping-Methodik mit differenzieller Flachheit zu kombinieren, wurde im Weiteren das Zielsystem derart modifiziert, dass ein zusätzlicher Freiheitsgrad entstanden ist, der jedoch das stabile Verhalten des Zielsystems nicht beeinflusst. Basierend auf der Erkenntnis, dass im vorliegenden Fall die Eigenschaft der Flachheit sowie die Ausgangsgröße des Systems invariant gegenüber der Backstepping-Transformation sind, ermöglicht der zusätzliche Freiheitsgrad einen systematischen flachheitsbasierten Steuerungsentwurf. Hierzu wurden formale Potenzreihenansätze zur Zustands- und Eingangsparametrierung des Zielsystems durch die invariante Ausgangsgröße und deren Zeitableitungen verwendet.

Um letztendlich die entworfene Trajektorienfolge realisiert zu können, wurde der geschlossene Regelkreis um einen verteilt-parametrischen Zustandsbeobachter erweitert. Hierbei wurde als Beobachter die um geeignete Korrektortermine erweiterte Kopie des Originalsystems gewählt, sodass eine Ähnlichkeit zu einem vollständigen Luenberger-Beobachter für konzentriert-parametrische Systeme zu erkennen ist. Für den Beobachterentwurf wurde ebenfalls die Backstepping-Methodik eingesetzt. Der Unterschied zum Reglerentwurf bestand allerdings darin, dass die Ermittlung der Verstärkungsfaktoren der Korrektortermine mit Hilfe einer inversen Backstepping-Transformation erfolgte. Die erzielte Regelgüte und das Folgeverhalten der Ausgangsgröße wurde anschließend anhand von Simulationsergebnissen des Gesamtsystems illustriert.

Danksagung

Die dargestellte Arbeit entstand im Rahmen des Doktorandenkollegs PDTEch (Partielle Differenzialgleichungen in technischen Systemen: Modellierung, Simulation und Regelung) der TU Wien.

Literatur

- [1] D. M. Boskovic, A. Balogh, M. Krstić, „Backstepping in infinite dimension for a class of parabolic distributed parameter systems“, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, Volume 16, S. 44–75, 2003.
- [2] D. Colton, „The Solution of Initial–Boundary Value Problems for Parabolic Equations by the Method of Integral Operators“, *J. Diff. Eqs.*, Volume 26(2), S. 181–190, 1977.
- [3] R. F. Curtain, H. J. Zwart, „An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory“, *Springer-Verlag*, 1995.
- [4] M. Krstic, A. Smyshlyaev, „Boundary Control of PDEs. A Course on Backstepping Designs“, *SIAM, Philadelphia*, 2008.
- [5] B. Laroche, P. Martin, P. Rouchon, „Motion planning for the heat equation“, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Volume 10(8), S. 629–643, 2000.
- [6] A. F. Lynch, J. Rudolph, „Flatness-based boundary control of a class of quasilinear parabolic distributed parameter systems“, *Int. J. Control*, Volume 75(15), S. 1219–1230, 2002.
- [7] T. Meurer, A. Kugi, „Tracking control for boundary controlled parabolic PDEs with varying parameters: Combining backstepping and differential flatness“, *Automatica*, Volume 45(15), S. 1182–1194, 2009.
- [8] T. Meurer, A. Kugi, „Zur Kombination von differenzieller Flachheit und Backstepping für die Trajektorienfolge-regelung eines Diffusions-Konvektions-Reaktionssystems“, *Elektrotechnik und Informationstechnik (e&i)*, Volume 125(1/2), S. 2–11, 2008.
- [9] T. Meurer, „Feedforward and Feedback Tracking Control of Diffusion–Convection–Reaction Systems using Summability Methods“, *Fortschr.-Ber., VDI Reihe 8 Nr. 1081*, VDI Verlag, Düsseldorf, 2005.
- [10] L. Rodino, „Linear partial differential operators in Gevrey spaces“, *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore*, 1993.
- [11] J. Rudolph, „Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension“, *Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik*, Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [12] A. Smyshlyaev, M. Krstic, „On control design for PDEs with space-dependent diffusivity or time-dependent reactivity“, *Automatica*, Volume 41(9), S. 1601–1608, 2005.
- [13] A. Smyshlyaev, M. Krstic, „Backstepping observers for a class of parabolic PDEs“, *Systems and Control Letters*, Volume 54(7), S. 613–625, 2003.

Manuskripteingang: 3. August 2009



Dipl.-Ing. Lukas Jadachowski ist wissenschaftlicher Assistent am Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik (ACIN) an der Technischen Universität Wien. Hauptarbeitsgebiete: modellbasierter Steuerungs- und Regelungsentwurf für parabolische und hyperbolische verteilt-parametrische Systeme.

Adresse: TU Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, A-1040 Wien, Österreich, E-Mail: jadachowski@acin.tuwien.ac.at



Dr.-Ing. Thomas Meurer ist Post-Doktorand am Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik (ACIN) der Technischen Universität Wien. Hauptarbeitsgebiete: modellbasierter Steuerungs- und Regelungsentwurf für lineare und nichtlineare verteilt-parametrische Systeme mit Anwendungen in der Verfahrenstechnik, Mechatronik und Robotik sowie flachheitsbasierte Methoden.

Adresse: TU Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, A-1040 Wien, Österreich, E-Mail: meurer@acin.tuwien.ac.at



Univ.-Prof. Dr. techn. Andreas Kugi ist Institutsvorstand am Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik (ACIN) an der Technischen Universität Wien. Hauptarbeitsgebiete: Modellierung, Simulation und Regelung nichtlinearer sowie infinit-dimensionaler mechatronischer Systeme mit Anwendungen in der hydraulischen Aktorik, der Walzwerksautomatisierung, in der Automobilindustrie sowie für mikromechanische Systeme.

Adresse: TU Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, A-1040 Wien, Österreich, E-Mail: kugi@acin.tuwien.ac.at