Optimale nichtlineare Regelung von permanenterregten Synchronmaschinen

Anwendungen

Wolfgang Kemmetmüller*, David Faustner und Andreas Kugi

Optimale nichtlineare Regelung von permanenterregten Synchronmaschinen

Optimal nonlinear control of permanent magnet synchronous machines

DOI 10.1515/auto-2015-0041
Eingang 25. März 2015; angenommen 24. Juni 2015

Zusammenfassung: Die Momentenregelung von permanenterregten Synchronmaschinen (PSM) ist eine häufige Aufgabe. Moderne Motorkonstruktionen und der Betrieb bis weit in die magnetische Sättigung führen zu einer schlechten Regelgüte von klassischen Regelungsstrategien. In diesem Beitrag wird die PSM mit einem Reluktanznetzwerk modelliert, das die magnetische Sättigung und höhere harmonische Charakteristiken berücksichtigt. Anschließend wird für zwei Bauformen von PSM eine optimale flachheitsbasierte Regelungsstrategie entwickelt. Die Regelgüte wird schließlich anhand von Messungen an einem Prüfstand nachgewiesen.

Schlüsselwörter: Permanenterregte Synchronmaschine, Reluktanzmodellierung, optimale Momentenregelung, nichtlineare Regelung.

Abstract: The torque control of permanent magnet synchronous machines (PSM) is a frequent task. Modern motor constructions and the operation in the range of magnetic saturation bring along that classical control strategies show limited control accuracy. In this paper, magnetic equivalent circuit modeling, which allows to systematically account for magnetic saturation and nonfundamental wave characteristics, is utilized. An optimal flatness-based torque control strategy is proposed for two types of PSM. The control performance is demonstrated by means of measurement results.

***Korrespondenzautor: Wolfgang Kemmetmüller,** Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Technische Universität Wien, Wien, E-Mail: kemmetmueller@acin.tuwien.ac.at
David Faustner, Andreas Kugi: Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Technische Universität Wien, Wien

Keywords: Permanent magnet synchronous machine, magnetic equivalent circuit modeling, optimal torque control, nonlinear control.

Gewidmet Herrn Univ.-Prof. Dr. techn. Kurt Schlacher zu seinem 60. Geburtstag

1 Einleitung

Die Regelung des elektrischen Moments von permanenterregten Synchronmaschinen (PSM) ist eine wichtige Aufgabe, da die Momentenregelung meist auch als innerster Regelkreis in einer kaskadierten Drehzahl- bzw. Positionsregelung eingesetzt wird. Die Regelgüte des Momentenreglers ist damit essentiell für die erzielbare Güte des Gesamtsystems. Zur Momentenregelung wird heute fast ausschließlich die feldorientierte Regelung (FOC) eingesetzt, die auf der Transformation der Stromdynamik des Motors in ein rotorfestes Koordinatensystem (Blondel-Park Transformation) beruht, siehe z.B. [1–3]. Diese Transformation basiert auf den Annahmen, dass keine magnetische Sättigung auftritt und die wesentlichen Größen des Motors (Ströme, induzierte Spannungen) durch deren Grundwelle approximiert werden können. Unter Verwendung dieser Modelle wurden in den letzten Jahren vermehrt moderne nichtlineare Methoden zur Regelung untersucht, siehe z.B. [4–12].

Durch die Verwendung von inhomogenen Luftspaltgeometrien oder konzentrierten Einzelzahnspulen sind die für das Grundwellenmodell getroffenen Annahmen meist mehr oder weniger stark verletzt. Weiterhin werden PSM häufig bis weit in den Sättigungsbereich betrieben. Für diese Motoren liefern die genannten Regelungsstrategien meist nur eine eingeschränkte Regelgüte. Daher wurden in der Literatur (heuristische) Erweiterungen des Grundwellenmodells vorgeschlagen, um die magnetische Sättigung bzw. die höheren Harmonischen zumindest nä-

Post-print version of the article: W. Kemmetmüller, D. Faustner, and A. Kugi, “Optimale nichtlineare Regelung von permanenterregten Synchronmaschinen”, *at-Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 9, pp. 739–750, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0041
The content of this post-print version is identical to the published paper but without the publisher’s final layout or copy editing.

herungsweise zu berücksichtigen. Auf Basis dieser erweiterten Modelle lassen sich in vielen Anwendungen Regelungsstrategien mit einer signifikanten Verbesserung der Regelgüte entwerfen, vgl. [13–19].

Im Rahmen dieses Beitrags wird eine systematische Vorgehensweise zur optimalen Momentenregelung von PSM mit ausgeprägter magnetischer Sättigung und nicht sinusförmigen Größen des Motors vorgeschlagen. Die Grundlage dafür bildet die Beschreibung des Magnetkreises des Motors mit Hilfe von Reluktanznetzwerken, die eine systematische Beschreibung von magnetischer Sättigung und beliebigen Verläufen der charakteristischen Größen des Motors erlauben, siehe z.B. [20–26]. Wie in [26, 27] gezeigt wurde, ist dabei eine Übertragung der von elektrischen Netzwerken bekannten Netzwerkstheorie zur Herleitung der Gleichungen des Reluktanznetzwerkes möglich. Auf Basis dieser Modelle kann dann eine optimale flachheitsbasierte Momentenregelungsstrategie entwickelt werden, siehe [28] und [29]. Dieser Beitrag stellt die Methoden und Ergebnisse der optimalen Momentenregelung für eine PSM mit eingebetteten Magneten und eine PSM mit Oberflächenmagneten dar und zeigt die erzielbare Regelgüte anhand von Messungen an einem Prüfstand. Für eine detaillierte Beschreibung der Modellierung und der Momentenregelung der Motoren sei auf [26–29] verwiesen.

Der Beitrag gliedert sich in die folgenden Abschnitte: In Abschnitt 2 werden die Modellierung von PSM auf Basis von Reluktanznetzwerken kurz zusammengefasst und die Redundanzen der resultierenden Gleichungen zufolge der magnetischen und elektrischen Verschaltung der Spulen des Motors diskutiert. Die optimale Momentenregelung wird anschließend in Abschnitt 3 für eine PSM mit eingebetteten Magneten vorgestellt, die ein ausgeprägtes Rastmoment, eine nicht sinusförmige induzierte Spannung und maßgebliche Sättigung aufweist. Anschließend wird in Abschnitt 4 für eine PSM mit Oberflächenmagneten und ausgeprägter magnetischer Sättigung gezeigt, dass für PSM mit nahezu sinusförmigen charakteristischen Größen eine vereinfachte optimale Momentenregelungsstrategie entwickelt werden kann. Der Beitrag schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf weitere Forschungsarbeiten.

2 Modellierung auf Basis von Reluktanznetzwerken

Die Grundidee der Modellierung von elektromagnetischen Aktoren auf Basis von Reluktanznetzwerken besteht darin, den Magnetkreis in Form von magnetischen Leitwerten (Permeanzen) G und magnetischen Spannungsquellen u zufolge der Spulen und Permanentmagnete zu approximieren, siehe z.B. [20–26]. Zur systematischen Bestimmung der Gleichungen des resultierenden Netzwerkes wurde in [26] die von elektrischen Netzwerken bekannte Netzwerkstheorie übertragen. Die Grundidee besteht darin, einen Baum zu definieren, welcher alle Knoten des magnetischen Netzwerkes verbindet ohne eine Masche zu bilden. Dieser Baum muss dabei alle magnetischen Spannungsquellen beinhalten. Durch Hinzufügen eines Elements des Kobaums, welcher alle Elemente beinhaltet, die nicht Teil des Baums sind, zum Baum entsteht genau eine Masche. Die Topologie des Netzwerkes kann damit mit Hilfe der Inzidenzmatrix $\mathbf{D}^T = [\mathbf{D}_c^T, \mathbf{D}_m^T, \mathbf{D}_g^T]$ beschrieben werden.

Wendet man die in [26] beschriebene Vorgehensweise zur Modellierung an[1], so erhält man das folgende DAE-System zur Beschreibung eines elektromagnetischen Aktors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\psi}_c = -\mathbf{R}_c\mathbf{i}_c + \mathbf{v}_c \tag{1a}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = &\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_c\mathbf{G}_c\bar{\mathbf{D}}_c^T & \bar{\mathbf{D}}_c\mathbf{G}_c\mathbf{D}_g^T \\ \mathbf{D}_g\mathbf{G}_c\bar{\mathbf{D}}_c^T & \mathbf{G}_t + \mathbf{D}_g\mathbf{G}_c\mathbf{D}_g^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_c \\ \mathbf{u}_{tg}\end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}_c \\ \mathbf{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{D}_g\end{bmatrix}\mathbf{G}_c\mathbf{D}_m^T\mathbf{u}_{tm}.\end{aligned} \tag{1b}$$

Darin beschreibt $\boldsymbol{\psi}_c$ den verketteten Fluss, $\mathbf{R}_c$ den elektrischen Widerstand, $\mathbf{i}_c$ den Strom und $\mathbf{v}_c$ die elektrische Spannung an den Spulen. Weiterhin ist $\bar{\mathbf{D}}^T = [\bar{\mathbf{D}}_c^T, \mathbf{D}_m^T, \mathbf{D}_g^T]$ die transformierte Inzidenzmatrix, wobei $\bar{\mathbf{D}}_c = \mathbf{N}_c\mathbf{D}_c$ mit der Windungsmatrix $\mathbf{N}_c$ gilt. Die magnetischen Spannungen der Permanentmagneten $\mathbf{u}_{tm}$ und der Leitwerte des Baums $\mathbf{u}_{tg}$ werden gemeinsam mit dem Strom $\mathbf{i}_c$ zum Vektor $\bar{\mathbf{u}}_t^T = [\mathbf{i}_c^T, \mathbf{u}_{tm}^T, \mathbf{u}_{tg}^T]$ zusammengefasst. Die magnetischen Leitwerte des Baums $\mathbf{G}_t$ und des Kobaums $\mathbf{G}_c$ sind aufgrund der nichtlinearen Eigenschaften (Sättigung) des Materials Funktionen der zugehörigen magnetischen Spannungen und des mechanischen Freiheitsgrads φ (Relativwinkel vom Rotor zum Stator), d.h. $\mathbf{G}_t\left(\mathbf{u}_{tg}, \varphi\right)$ und $\mathbf{G}_c\left(\bar{\mathbf{u}}_c, \varphi\right)$ mit $\bar{\mathbf{u}}_c = -\bar{\mathbf{D}}_c^T\bar{\mathbf{u}}_t$. Die Gleichung (1a) beschreibt das Faradaysche Induktionsgesetz und (1b) die magnetische Verschaltung der Elemente des Reluktanznetzwerkes. Das resultierende Moment τ ergibt sich

1 Man beachte, dass in (1) im Vergleich zu [26] ein rechtshändiges Zählpfeilsystem verwendet wurde. Weiterhin wurde (1b) im Vergleich zu [26] direkt im verketteten Fluss $\boldsymbol{\psi}_c$ und den Strömen $\mathbf{i}_c$ der Spulen formuliert.

Post-print version of the article: W. Kemmetmüller, D. Faustner, and A. Kugi, "Optimale nichtlineare Regelung von permanenterregten Synchronmaschinen", *at-Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 9, pp. 739–750, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0041
The content of this post-print version is identical to the published paper but without the publisher's final layout or copy editing.

aus dem Koenergieprinzip zu [20, 26]

$$\tau = \frac{1}{2}\mathbf{u}_{tg}^T \frac{\partial \mathbf{G}_t}{\partial \varphi}\mathbf{u}_{tg} + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}_t^T \bar{\mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial \varphi}\bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{u}}_t. \tag{2}$$

2.1 Magnetische Verschaltung

Aufgrund der Wahl der verketteten Flüsse ψ_c als Zustandsgrößen müssen der Strom $\mathbf{i}_c$ und die magnetische Spannung $\mathbf{u}_{tg}$ aus dem nichtlinearen Gleichungssystem (1b) bestimmt werden. Der folgende Satz gibt Auskunft darüber, ob und unter welchen Bedingungen eine eindeutige Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems existiert.

Satz 1. *Das nichtlineare Gleichungssystem der Form*

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{3}$$

besitzt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{K}_1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{K}_1}{\partial x_j}\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \tag{4}$$

positiv definit ist und die Bedingung

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} \|\mathbf{K}_1(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \infty \tag{5}$$

erfüllt ist [30].

Man kann nun zeigen, dass die Jacobi-Matrix des nichtlinearen Gleichungssystems (1b) genau dann regulär ist, wenn $\bar{\mathbf{D}}_c$ zeilenregulär ist, d.h. wenn $\mathrm{Rang}(\bar{\mathbf{D}}_c) = s$ mit der Anzahl der Spulen s gilt. Für den häufig auftretenden Fall $\mathrm{Rang}(\bar{\mathbf{D}}_c) = s^I < s$ kann damit nicht der gesamte Vektor der Ströme $\mathbf{i}_c$ aus (1b) bestimmt werden und, wie in [26] diskutiert, nicht der gesamte verkettete Fluss ψ_c als unabhängiger Zustand gewählt werden. Wie in [26] gezeigt, wird mithilfe der Transformation

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

mit

$$\mathbf{T}_{1c} = \begin{bmatrix} \left(\bar{\mathbf{D}}_c^{\perp}\right)^T \\ \left(\bar{\mathbf{D}}_c^{I}\right)^T \end{bmatrix} \tag{7}$$

und der Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ ein reduziertes DAE-System hergeleitet. Darin ist $\bar{\mathbf{D}}_c^I$ aus s^I unabhängigen Vektoren des Bildes von $\bar{\mathbf{D}}_c$ aufgebaut und $\bar{\mathbf{D}}_c^{\perp}$ besteht aus $s - s^I$ Vektoren des Kerns von $\bar{\mathbf{D}}_c^T$. Definiert man die transformierten Ströme und verketteten Flüsse

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_c^{\perp} \\ \mathbf{i}_c^{I} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{1c}\mathbf{i}_c, \quad \begin{bmatrix} \psi_c^{\perp} \\ \psi_c^{I} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{1c}\psi_c, \tag{8}$$

so erhält man das transformierte DAE-System in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_c^I = -\left(\bar{\mathbf{D}}_c^I\right)^T \mathbf{R}_c \left(\mathbf{H}_1^I \mathbf{i}_c^I + \mathbf{H}_1^{\perp}\mathbf{i}_c^{\perp}\right) + \left(\bar{\mathbf{D}}_c^I\right)^T \mathbf{v}_c \tag{9a}$$

$$\mathbf{0} = -\left(\bar{\mathbf{D}}_c^{\perp}\right)^T \mathbf{R}_c \left(\mathbf{H}_1^I \mathbf{i}_c^I + \mathbf{H}_1^{\perp}\mathbf{i}_c^{\perp}\right) + \left(\bar{\mathbf{D}}_c^{\perp}\right)^T \mathbf{v}_c \tag{9b}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{K}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c^I \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \psi_c^I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\bar{\mathbf{D}}_c^I\right)^T \bar{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \mathbf{G}_c \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} \tag{9c}$$

mit der Inversen $\mathbf{H}_1 = [\mathbf{H}_1^{\perp}, \mathbf{H}_1^I] = \mathbf{T}_{1c}^{-1}$ von $\mathbf{T}_{1c}$ und der Abkürzung

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{D}}_c^I)^T \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{G}_c \bar{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{H}_1^I & (\bar{\mathbf{D}}_c^I)^T \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{G}_c \mathbf{D}_g^T \\ \mathbf{D}_g \mathbf{G}_c \bar{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{H}_1^I & \mathbf{G}_t + \mathbf{D}_g \mathbf{G}_c \mathbf{D}_g^T \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Es kann dann gezeigt werden, dass die Matrix $\mathbf{K}_2$ regulär ist und die Bedingungen aus Satz 1 erfüllt sind, womit das nichtlineare Gleichungssystem (9c) mit (10) eine eindeutige Lösung besitzt.

2.2 Elektrische Verschaltung

In den bisherigen Betrachtungen wurde die elektrische Verschaltung der Spulen nicht berücksichtigt. Die elektrische Verschaltung der Spulen definiert zusätzliche Zwangsbedingungen an die Spulenströme $\mathbf{i}_c$ der Form $(\mathbf{V}^{\perp})^T \mathbf{i}_c = \mathbf{0}$, mit der elektrischen Verschaltungsmatrix $\mathbf{V}^{\perp}$. Weiterhin ist durch die Vorgabe der Anschlussspannungen des Aktors häufig nicht der gesamte Vektor der Spulenspannungen $\mathbf{v}_c$ festgelegt. Die elektrische Verschaltung führt damit in vielen Fällen dazu, dass ein Teil von $\mathbf{i}_c^I$ in (9c) ebenfalls eine Zwangsbedingung erfüllen muss. Dies impliziert weiterhin, dass nicht der gesamte Vektor der transformierten verketteten Flüsse ψ_c^I als unabhängiger Zustand zur Verfügung steht, da ein Teil durch die algebraischen Gleichungen festgelegt ist.

Eine allgemeine Analyse der möglichen auftretenden Fälle gestaltet sich sehr umfangreich, weshalb im Rahmen dieses Beitrags auf eine detaillierte Diskussion verzichtet wird. In den folgenden Abschnitten, welche sich mit der optimalen Momentenregelung von zwei Bauformen von PSM beschäftigen, wird kurz auf die Behandlung der dort relevanten Fälle eingegangen.

3 PSM mit eingebetteten Magneten

In diesem Abschnitt wird eine optimale Regelungsstrategie für das Moment τ einer PSM mit eingebetteten Magneten vorgestellt. Die betrachtete PSM besteht aus 12 Spulen

Post-print version of the article: W. Kemmetmüller, D. Faustner, and A. Kugi, “Optimale nichtlineare Regelung von permanenterregten Synchronmaschinen”, *at-Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 9, pp. 739–750, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0041
The content of this post-print version is identical to the published paper but without the publisher’s final layout or copy editing.

und 8 im Rotor eingebetteten Permanentmagneten. Aufgrund der resultierenden Symmetrie des Motors wird im Weiteren nur 1/4 des Motors betrachtet. Dem Schnittbild des Motors in Abbildung 1 kann man entnehmen, dass der Motor keine konstante Luftspalthöhe aufweist, was zu einem ausgeprägten Rastmoment führt. Weiterhin bedingt eine steigende Bestromung der Spulen eine maßgebliche Sättigung des Materials des Stators und des Rotors. Damit sind, wie bereits in der Einleitung diskutiert, klassische Grundwellenmodelle für eine genaue Beschreibung des Verhaltens dieser PSM ungeeignet.

Wendet man die im letzten Abschnitt dargestellte Modellierung auf Basis von Reluktanznetzwerken an, so erhält man ein DAE-System der Form (9), siehe auch [26, 29]. Die Spulen des Motors sind in Dreieck geschaltet, womit keine weiteren Zwangsbedingungen für die Ströme $\mathbf{i}_c^I = [i_{c1} - i_{c3}, i_{c2} - i_{c3}]^T$ resultieren. Diese elektrische Verschaltung bedingt weiterhin $\left(\bar{\mathbf{D}}_c^{\perp}\right)^T \mathbf{v}_c = v_{c1} + v_{c2} + v_{c3} = 0$, womit aus (9b) mit $\mathbf{R}_c = R_c\mathbf{I}$ direkt $\mathbf{i}_c^{\perp} = i_{c1} + i_{c2} + i_{c3} = 0$ folgt. Die PSM kann damit durch das DAE-System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\psi}_c^I = -R_c\mathbf{i}_c^I + \left(\bar{\mathbf{D}}_c^I\right)^T \mathbf{v}_c \tag{11a}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{K}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c^I \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_c^I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\bar{\mathbf{D}}_c^I\right)^T \bar{\mathbf{D}}_c \\ \mathbf{D}_g \end{bmatrix} \mathbf{G}_c \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} \tag{11b}$$

beschrieben werden. Darin ist $\boldsymbol{\psi}_c^I = [\psi_{c1} - \psi_{c3}, \psi_{c2} - \psi_{c3}]^T$ der Vektor der unabhängigen verketteten Spulenflüsse und $\mathbf{K}_2$ ergibt sich nach (10). Das resultierende Moment

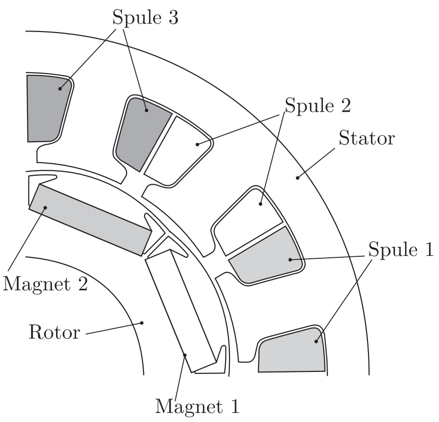

Abbildung 1: Schnitt durch die betrachtete PSM mit eingebetteten Magneten [26].

errechnet sich gemäß (2) zu

$$\tau = \frac{1}{2} p \Bigg(\mathbf{u}_{tg}^T \frac{\partial \mathbf{G}_t}{\partial \varphi} \mathbf{u}_{tg} + \left[(\mathbf{H}_1^I \mathbf{i}_c^I)^T, \mathbf{u}_{tm}^T, \mathbf{u}_{tg}^T \right] \bar{\mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial \varphi} \bar{\mathbf{D}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^I \mathbf{i}_c^I \\ \mathbf{u}_{tm} \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} \Bigg), \tag{12}$$

mit der Polpaarzahl $p = 4$ des Motors. Für eine detaillierte Beschreibung der Modellierung sei auf [26] verwiesen.

3.1 Optimale Momentenregelung

Das Ziel der Momentenregelung ist es, die Spannungen $\mathbf{v}_c$ so vorzugeben, dass das Moment τ einem gewünschten Sollmoment τ^* entspricht und dass die Ohmschen Verluste des Motors minimiert werden. Für diese Regelungsaufgabe wird im Folgenden eine flachheitsbasierte Regelungsstrategie entworfen. Dazu werden im ersten Schritt die optimalen Werte $\mathbf{i}_c^{I*}$ der Ströme $\mathbf{i}_c^I$ als Lösung des nichtlinearen statischen Optimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{i}_c, \mathbf{u}_{tg}} \frac{1}{2} \left(\mathbf{i}_c\right)^T \mathbf{i}_c = \min_{\mathbf{i}_c^I, \mathbf{u}_{tg}} \frac{1}{2} \left(\mathbf{i}_c^I\right)^T \underbrace{\left(\mathbf{H}_1^I\right)^T \mathbf{H}_1^I}_{\mathbf{Q}} \mathbf{i}_c^I \tag{13}$$

mit der positiv definiten Matrix $\mathbf{Q} > 0$ und den nichtlinearen Gleichungsnebenbedingungen

$$g = \tau(\mathbf{i}_c^I, \mathbf{u}_{tg}) - \tau^* = 0 \tag{14a}$$

$$\mathbf{h} = \left[\mathbf{D}_g \mathbf{G}_c \bar{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{H}_1^I, \mathbf{G}_t + \mathbf{D}_g \mathbf{G}_c \mathbf{D}_g^T \right] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c^I \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} + \mathbf{D}_g \mathbf{G}_c \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} = \mathbf{0} \tag{14b}$$

ermittelt. Da die Lösung dieses Optimierungsproblems in Echtzeit mit einer typischen Abtastzeit von 50 µs–200 µs ermittelt werden muss, ist eine effiziente Lösungsmethode von besonderer Bedeutung. In [29] wurde die Optimierungsaufgabe mit Hilfe der Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{i}_c^I\right)^T \mathbf{Q} \mathbf{i}_c^I + \lambda g + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{h} \tag{15}$$

und den Optimalitätsbedingungen erster Ordnung auf die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems der Form

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{i}_c^I}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_{tg}}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{16}$$

Post-print version of the article: W. Kemmetmüller, D. Faustner, and A. Kugi, "Optimale nichtlineare Regelung von permanenterregten Synchronmaschinen", *at-Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 9, pp. 739–750, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0041
The content of this post-print version is identical to the published paper but without the publisher's final layout or copy editing.

zurückgeführt. Darin beschreibt $\mathbf{x}^T = [(\mathbf{i}_c^I)^T, \mathbf{u}_{tg}^T, \lambda, \boldsymbol{\mu}^T]$ den Vektor der Unbekannten. Die besondere Struktur der algebraischen Gleichungen (11b) erlaubt es nun, die partiellen Ableitungen (16) von $\mathcal{L}$ sehr effizient zu berechnen. Weiterhin lässt sich durch Vernachlässigung der partiellen Ableitungen der magnetischen Leitwerte $\mathbf{G}_t$ und $\mathbf{G}_c$ nach $\mathbf{i}_c^I$ und $\mathbf{u}_{tg}$ ein vereinfachtes nichtlineares Gleichungssystem definieren, dessen Lösung für den betrachteten Motor nur sehr geringe Abweichungen von der Lösung des exakten Gleichungssystems zeigt.

Für die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (16) wird die Newton-Iteration der Form

$$\mathbf{x}_k^{j+1} = \mathbf{x}_k^j - \mathbf{J}(\mathbf{x}_k^j)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k^j), \quad j = 0, \ldots, n_i - 1, \tag{17}$$

angewandt, wobei die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}$ von $\mathbf{f}$ wiederum analytisch bestimmt werden kann. Bei Vorgabe eines guten Startwertes $\mathbf{x}_k^0$ reicht eine sehr geringe Anzahl von Iterationen n_i zur Bestimmung einer genauen Lösung aus. Man beachte, dass ein derartiger Startwert in Form der Lösung des letzten Abtastschrittes immer zur Verfügung steht, d.h. man wählt $\mathbf{x}_k^0 = \mathbf{x}_{k-1}^{n_i}$.

Um nun ausgehend von den optimalen Werten $\mathbf{i}_c^{I*}$ und $\mathbf{u}_{tg}^*$ den zugehörigen Vektor der optimalen verketteten Flüsse $\boldsymbol{\psi}_c^{I*}$ zu bestimmen, verwendet man die erste Zeile von (11b) in der Form

$$\boldsymbol{\psi}_c^{I*} = \left(\bar{\mathbf{D}}_c^I\right)^T \bar{\mathbf{D}}_c\mathbf{G}_c\left(\bar{\mathbf{D}}_c^T\mathbf{H}_1^I\mathbf{i}_c^{I*} + \mathbf{D}_g^T\mathbf{u}_{tg}^* + \mathbf{D}_m^T\mathbf{u}_{tm}\right). \tag{18}$$

Durch zeitliche Ableitung dieses Ausdruckes und unter Verwendung von (11a) kann dann der optimale Wert der Spannung $\mathbf{v}_c^*$ in der Form

$$\mathbf{v}_c^* = \mathbf{H}_1^I\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\psi}_c^{I*} + R_c\mathbf{i}_c^{I*}\right) \tag{19}$$

ermittelt werden. Man beachte, dass die zeitliche Ableitung von $\boldsymbol{\psi}_c^{I*}$ analytisch durch Anwendung der Kettenregel aus den zeitlichen Ableitungen von τ^* und $\dot{\varphi} = \omega$ ermittelt werden kann. In der praktischen Anwendung ist es jedoch meist effizienter, die zeitliche Ableitung durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\psi}_c^{I*}(kT_s) \approx \frac{\boldsymbol{\psi}_{c,k}^{I*} - \boldsymbol{\psi}_{c,k-1}^{I*}}{T_s} \tag{20}$$

zu approximieren, wobei T_s die Abtastzeit der Regelung bezeichnet.

Im letzten Schritt des Reglerentwurfs muss eine Stabilisierung des Trajektorienfolgefehlers $\boldsymbol{\psi}_c^I - \boldsymbol{\psi}_c^{I*}$ erfolgen. Die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers wird durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{\psi}_c^I - \boldsymbol{\psi}_c^{I*}\right) = -R_c\mathbf{e}_i^I + \left(\bar{\mathbf{D}}_c^I\right)^T\mathbf{v}_c^c \tag{21}$$

beschrieben, wobei $\mathbf{e}_i^I = \mathbf{i}_c^I - \mathbf{i}_c^{I*}$ den Stromfehler bezeichnet und $\mathbf{v}_c^c$ dem Regleranteil der Spannung $\mathbf{v}_c$ entspricht, d.h. $\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c^* + \mathbf{v}_c^c$. Natürlich steht in der praktischen Implementierung keine Messung der verketteten Flüsse zur Verfügung. Wie in [29] gezeigt, kann aus dem nichtlinearen Gleichungssystem für $\mathbf{G}_c(-\bar{\mathbf{D}}^T\bar{\mathbf{u}}_t, \varphi) \approx \mathbf{G}_c(-\bar{\mathbf{D}}^T\bar{\mathbf{u}}_t^*, \varphi)$ und $\mathbf{G}_t(\mathbf{u}_{tg}, \varphi) \approx \mathbf{G}_t(\mathbf{u}_{tg}^*, \varphi)$ eine Approximation der Form

$$\boldsymbol{\psi}_c^I - \boldsymbol{\psi}_c^{I*} = \left(\bar{\mathbf{D}}_c^I\right)^T\bar{\mathbf{D}}_c\mathbf{T}_l\bar{\mathbf{D}}_c^T\mathbf{H}_1^I\mathbf{e}_i^I = \mathbf{L}_c^I\left(\bar{\mathbf{u}}_t^*, \varphi\right)\mathbf{e}_i^I \tag{22}$$

mit der positiv definiten Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}_c^I$ formuliert werden. Die Abkürzung $\mathbf{T}_l$ errechnet sich dabei mit Hilfe des verallgemeinerten Matrizeninversionslemmas zu

$$\mathbf{T}_l(\bar{\mathbf{u}}_t^*, \varphi) = \left(\mathbf{G}_c^{-1} + \mathbf{D}_g^T\mathbf{G}_t^{-1}\mathbf{D}_g\right)^{-1}. \tag{23}$$

Verwendet man die Approximation (22) in (21), so erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_c^I\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_i^I = &-\left(\bar{\mathbf{D}}_c^I\right)^T\bar{\mathbf{D}}_c\left(\frac{\partial\mathbf{T}_l}{\partial\varphi}\omega + \frac{\partial\mathbf{T}_l}{\partial\bar{\mathbf{u}}_t^*}\frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{u}}_t^*}{\mathrm{d}t}\right)\bar{\mathbf{D}}_c^T\mathbf{H}_1^I\mathbf{e}_i^I\\ &- R_c\mathbf{e}_i^I + \left(\bar{\mathbf{D}}_c^I\right)^T\mathbf{v}_c^c.\end{aligned} \tag{24}$$

Mit Hilfe des Stellgesetzes

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_c^c = \mathbf{H}_1^I&\left[\left(\bar{\mathbf{D}}_c^I\right)^T\bar{\mathbf{D}}_c\left(\frac{\partial\mathbf{T}_l}{\partial\varphi}\omega + \frac{\partial\mathbf{T}_l}{\partial\bar{\mathbf{u}}_t^*}\frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{u}}_t^*}{\mathrm{d}t}\right)\bar{\mathbf{D}}_c^T\mathbf{H}_1^I\right]\mathbf{e}_i^I\\ &+ \mathbf{H}_1^I R_c\mathbf{e}_i^I + \mathbf{H}_1^I\mathbf{L}_c^I\left(-\lambda_1\mathbf{e}_i^I - \lambda_0\int_0^t\mathbf{e}_i^I\mathrm{d}t\right)\end{aligned} \tag{25}$$

wird mit $\lambda_1, \lambda_0 > 0$ eine exponentiell stabile Fehlerdynamik erreicht. In der praktischen Anwendung gestaltet sich die Berechnung von $\mathbf{L}_c^I$ und der Terme der ersten Zeile der rechten Seite von (25) häufig als sehr aufwändig. Unter der Annahme, dass der Stromregelfehler $\mathbf{e}_i^I$ klein ist, kann ein vereinfachtes Regelgesetz der Form

$$\mathbf{v}_c^c = \mathbf{H}_1^I\mathbf{L}_c^I\left(-\lambda_1\mathbf{e}_i^I - \lambda_0\int_0^t\mathbf{e}_i^I\mathrm{d}t\right) \tag{26}$$

angegeben werden, wobei häufig auch $\mathbf{L}_c^I$ durch eine konstante mittlere Matrix $\bar{\mathbf{L}}_c^I$ ersetzt wird. Wie in den folgenden Messergebnissen gezeigt wird, erreicht man trotz der getroffenen Vereinfachungen eine sehr gute Regelgüte in der praktischen Anwendung.

3.2 Messergebnisse

Die Güte der entworfenen optimalen nichtlinearen Regelungsstrategie wird durch Messungen an einem Prüfstand

Post-print version of the article: W. Kemmetmüller, D. Faustner, and A. Kugi, "Optimale nichtlineare Regelung von permanenterregten Synchronmaschinen", *at-Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 9, pp. 739–750, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0041
The content of this post-print version is identical to the published paper but without the publisher's final layout or copy editing.

nachgewiesen. Die gesamte Regelungsstrategie bestehend aus der Berechnung der optimalen Ströme $\mathbf{i}_c^{I*}$ (Anzahl der Iterationen $n^i = 2$), der flachheitsbasierten Vorsteuerung $\mathbf{v}_c^*$ und dem Regler $\mathbf{v}_c^c$ wurde dazu in einem dSPACE-Echtzeitsystem ds1103 mit einer Abtastzeit $T_s = 200\,\mu\mathrm{s}$ implementiert. Der Prüfstand besteht aus dem Prüfmotor, welcher über eine Momentenmesswelle mit einem Lastmotor gekoppelt ist. Der Lastmotor (HarmonicDrive) wurde in den Versuchen auf konstante Drehzahl ($n = 4\,\mathrm{U/min}$) geregelt, während die betrachtete PSM auf das konstante gewünschte Sollmoment τ^* geregelt wurde. Es sei darauf hingewiesen, dass die Momentenmessung nur zur Validierung der Momentenregelung dient, jedoch nicht in der Regelungsstrategie verwendet wurde.

Im Folgenden soll die Regelgüte der vorgeschlagenen Regelungsstrategie mit einer klassischen feldorientierten Momentenregelung (dq0) verglichen werden. Die feldorientierte Regelung basiert auf einem magnetisch linearen Grundwellenmodell, das mit Hilfe der Blondel-Park Transformation in ein rotorfestes Koordinatensystem transformiert wurde. Obwohl mit diesem Modell weder der Einfluss von magnetischer Sättigung noch das Rastmoment beschrieben werden kann, liefert die darauf beruhende feldorientierte Regelung in vielen praktischen Anwendungen gute Ergebnisse.

In Abbildung 2 sind die Ergebnisse der vorgeschlagenen nichtlinearen optimalen Momentenregelungsstrategie für Sollmomente von $\tau^* = 0\,\mathrm{N\,m}$ bis zum doppelten Nennmoment $\tau^* = 2\,\mathrm{N\,m}$ dargestellt. Die Ergebnisse für $\tau^* = 0\,\mathrm{N\,m}$ zeigen, dass mit der vorgeschlagenen Regelungsstrategie eine sehr gute Unterdrückung des Rastmomentes möglich ist. Dies ist naturgemäß mit der feldorientierten Regelung nicht möglich, da das Grundwellenmodell diesen Effekt nicht berücksichtigt. Weiterhin sind in Abbildung 2 die Ergebnisse der in Abschnitt 3.1 entwickelten Regelungsstrategie unter Vernachlässigung der Sättigung (magnetisch linear) dargestellt. Die Ergebnisse der magnetisch linearen Regelungsstrategie für $\tau^* = 0\,\mathrm{N\,m}$ sind nahezu identisch mit jenen der magnetisch nichtlinearen Regelungsstrategie. Dies liegt daran, dass für geringe Momente und damit geringe Bestromungen der Spulen nur ein geringer Einfluss der Sättigung des Materi-

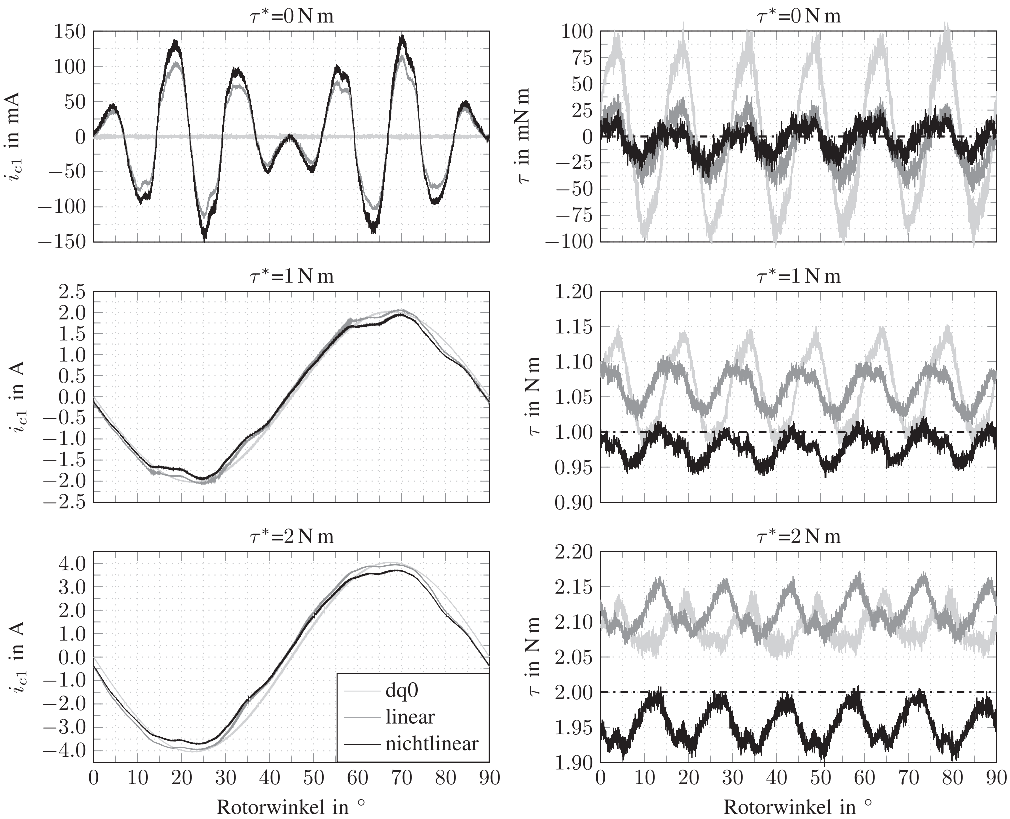

Abbildung 2: Vergleich des gemessenen Spulenstromes i_{c1} und des Moments τ der optimalen nichtlinearen Regelungsstrategie (nichtlinear) mit einem klassischen feldorientierten Regler (dq0) und der optimalen Regelungsstrategie unter Vernachlässigung der magnetischen Sättigung (linear) für $\tau^* = 0 - 2\,\mathrm{N\,m}$.

Post-print version of the article: W. Kemmetmüller, D. Faustner, and A. Kugi, "Optimale nichtlineare Regelung von permanenterregten Synchronmaschinen", *at-Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 9, pp. 739–750, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0041
The content of this post-print version is identical to the published paper but without the publisher's final layout or copy editing.

als vorhanden ist. Betrachtet man jedoch höhere Momente, so weichen die magnetisch lineare Regelungsstrategie und die feldorientierte Regelungsstrategie im Vergleich zur magnetisch nichtlinearen Regelungsstrategie stärker vom Sollmoment ab.

Die Messergebnisse zeigen damit die Vorteile der vorgeschlagenen Regelungsstrategie. In [29] wurde anhand von weiteren Messungen die Tauglichkeit der optimalen nichtlinearen Momentenregelungsstrategie auch für dynamische Vorgaben des Sollmoments und höhere Drehzahlen nachgewiesen. Weiterhin konnten die Vorteile bei Verwendung der vorgeschlagenen Regelungsstrategie in einer überlagerten Drehzahlregelung aufgezeigt werden.

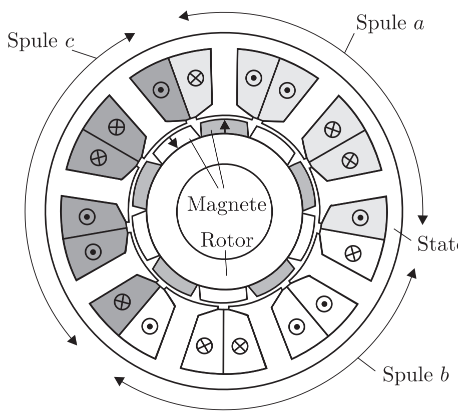

Abbildung 3: Schnitt durch die betrachtete PSM mit Oberflächenmagneten [27].

4 PSM mit Oberflächenmagneten

Der zweite in diesem Beitrag betrachtete Motor ist eine PSM mit 9 Spulen und 10 Oberflächenmagneten (Polpaarzahl $p = 5$), siehe Abbildung 3. Die Spulen von jeweils drei aufeinanderfolgenden Zähnen des Stators sind in Serie geschaltet und die resultierenden Spulen a, b und c sind in Stern mit isoliertem Sternpunkt geschaltet. Man beachte, dass diese PSM im Vergleich zur PSM mit eingebetteten Magneten keine Symmetrie aufweist.

Wendet man die Modellierung mittels Reluktanznetzwerken nach Abschnitt 2 an und eliminiert man die Zwangsbedingungen für den verketteten Fluss zufolge der magnetischen Verschaltung, so kann die PSM wiederum durch (9) mit dem Moment τ aus (2) dargestellt werden. Die Berücksichtigung der elektrischen Verschaltung der Spulen gestaltet sich etwas aufwändiger als bei der PSM mit eingebetteten Magneten in Abschnitt 3. Definiert man die elektrische Verschaltungsmatrix $\mathbf{V}^{\perp}$ wie in Abschnitt 2.2, so kann der Vektor der Spulenströme $\mathbf{i}_c$ in den unabhängigen Anteil $\tilde{\mathbf{i}}_c^I$ und den nicht frei vorgebbaren Anteil $\tilde{\mathbf{i}}_c^{\perp}$ in der Form

$$\mathbf{i}_c = \mathbf{H}_2^I \tilde{\mathbf{i}}_c^I + \mathbf{H}_2^{\perp} \tilde{\mathbf{i}}_c^{\perp} \tag{27}$$

aufgespaltet werden. Darin ist $\mathbf{H}_2 = [\mathbf{H}_2^I, \mathbf{H}_2^{\perp}] = \mathbf{T}_2^{-1}$ die Inverse von $\mathbf{T}_2^T = [\mathbf{V}^I, \mathbf{V}^{\perp}]$, wobei $\mathbf{V}^I$ aus Vektoren, die orthogonal auf $\mathbf{V}^{\perp}$ stehen, aufgebaut ist. Aus der elektrischen Verschaltung der Spulen resultiert damit unmittelbar $\tilde{\mathbf{i}}_c^{\perp} = \mathbf{0}$. Führt man die Ersatzgrößen $i_a = i_{c1} = -i_{c2} = i_{c3}$, $i_b = i_{c4} = -i_{c5} = i_{c6}$ und $i_c = i_{c7} = -i_{c8} = i_{c9}$ ein, so folgt aus der elektrischen Verschaltung $\tilde{\mathbf{i}}_c^{\perp} = i_a + i_b + i_c = 0$ und $\tilde{\mathbf{i}}_c^I = [i_a, i_b]^T$.

Wie in Abschnitt 2.2 diskutiert und in [27, 28] im Detail dargestellt, impliziert die elektrische Verschaltung, dass der Teil $\tilde{\psi}_c^I = \mathbf{H}_2^I \psi_c$ als Zustand gewählt werden kann, während der Teil $\tilde{\psi}_c^{\perp} = \mathbf{H}_2^{\perp} \psi_c$ als zusätzliche Lösung des nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems (9c) resultiert. Verwendet man $\psi_a = \psi_{c1} - \psi_{c2} + \psi_{c3}$, $\psi_b = \psi_{c4} - \psi_{c5} + \psi_{c6}$ und $\psi_c = \psi_{c7} - \psi_{c8} + \psi_{c9}$, so ergibt sich $\tilde{\psi}_c^I = [\psi_a - \psi_c, \psi_b - \psi_c]^T$. Die transformierte Differentialgleichung (9a) errechnet sich damit in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{\psi}_c^I = -\tilde{\mathbf{R}}_c^I \tilde{\mathbf{i}}_c^I + \tilde{\mathbf{v}}_c^I \tag{28}$$

mit $\tilde{\mathbf{v}}_c^I = [v_a - v_c, v_b - v_c]^T$, wobei $v_a = v_{c1} - v_{c2} + v_{c3}$, $v_b = v_{c4} - v_{c5} + v_{c6}$ und $v_c = v_{c7} - v_{c8} + v_{c9}$ die Anschlussspannungen der PSM bezeichnen. Weiterhin ist $\tilde{\mathbf{R}}_c^I$ die transformierte Widerstandsmatrix, die sich mit dem Widerstand R_c einer Einzelzahnspule zu

$$\tilde{\mathbf{R}}_c^I = \begin{bmatrix} 6R_c & 3R_c \\ 3R_c & 6R_c \end{bmatrix} \tag{29}$$

ergibt. Wie im Folgenden kurz zusammengefasst, kann für den Reglerentwurf die ursprüngliche Formulierung des nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems (9c) verwendet werden, womit die betrachtete PSM mit Oberflächenmagneten durch (28), (9c) und (2) beschrieben wird. Für eine detaillierte Beschreibung der Modellierung sei auf [27] verwiesen.

4.1 Optimale Momentenregelung

Die Vorgehensweise der optimalen Momentenregelung aus Abschnitt 3.1 kann direkt auf die PSM mit Oberflächenmagneten übertragen werden. Dazu werden im ersten Schritt die optimalen Ströme $\tilde{\mathbf{i}}_c^{I*}$ als Lösung der Optimierungsaufgabe

$$\min_{\tilde{\mathbf{i}}_c^I, \mathbf{u}_{tg}} \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathbf{i}}_c^I\right)^T \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{i}}_c^I \tag{30}$$

Post-print version of the article: W. Kemmetmüller, D. Faustner, and A. Kugi, “Optimale nichtlineare Regelung von permanenterregten Synchronmaschinen”, *at-Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 9, pp. 739–750, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0041
The content of this post-print version is identical to the published paper but without the publisher’s final layout or copy editing.

mit den nichtlinearen Gleichungsnebenbedingungen

$$g = \tau\left(\tilde{\mathbf{i}}_c^I, \mathbf{u}_{tg}\right) - \tau^* = 0 \tag{31a}$$

$$\mathbf{h} = \left[\mathbf{D}_g \mathbf{G}_c \bar{\mathbf{D}}_c^T \mathbf{H}_2^I, \mathbf{G}_t + \mathbf{D}_g \mathbf{G}_c \mathbf{D}_g^T\right] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{i}}_c^I \\ \mathbf{u}_{tg} \end{bmatrix} + \mathbf{D}_g \mathbf{G}_c \mathbf{D}_m^T \mathbf{u}_{tm} = \mathbf{0} \tag{31b}$$

bestimmt. Die resultierenden optimalen Stromverläufe $\tilde{\mathbf{i}}_c^{I*}$ für unterschiedliche Sollmomente τ^* von 0 N m bis 25 N m (ca. fünffaches Nennmoment) zeigen ein ausgeprägtes Grundwellenverhalten, sodass sie sich sehr gut durch

$$\tilde{\mathbf{i}}_c^{I*} \approx \hat{i}^*\left(\tau^*\right) \mathbf{T}_{ci}(\varphi) = \hat{i}^* \begin{bmatrix} \cos\left(p\left(\varphi - \varphi_0\right)\right) \\ \cos\left(p\left(\varphi - \varphi_0\right) + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \tag{32}$$

approximieren lassen. Der Winkel φ_0 ergibt sich aus den optimalen Stromverläufen zu $\varphi_0 = 40^\circ + 18^\circ \operatorname{sign}(\tau^*)$, siehe [28] für eine detaillierte Darstellung der Ergebnisse der Optimierungsaufgabe.

Im Vergleich zu der in Abschnitt 3 betrachteten PSM mit eingebetteten Magneten zeigt diese PSM mit Oberflächenmagneten damit ein für den Reglerentwurf angenehmeres Verhalten, da die wesentlichen Größen der PSM durch die entsprechende Grundwelle approximiert werden können. Man beachte aber, dass nach wie vor die magnetische Sättigung einen maßgeblichen Einfluss auf das Verhalten der PSM hat, was unter anderem durch den Zusammenhang zwischen der optimalen Amplitude $\hat{i}^*$ und dem resultierenden Moment τ^* in Abbildung 4 klar ersichtlich ist. Die betrachtete PSM zeigt dabei, ausgehend von einem nahezu linearen Zusammenhang zwischen τ^* und $\hat{i}^*$ bei kleinen Strömen, ein zunehmend nichtlineares Verhalten bei höheren Momenten. Wenngleich damit der Bereich des Nennmomentes von 5 N m näherungsweise durch ein magnetisch lineares Modell approximiert werden könnte, werden PSM der betrachteten Bauform dynamisch mit mehr als dem fünffachen Nennmoment betrieben, wo diese Näherung nicht mehr gültig ist und damit klassische Regelungsstrategien basierend auf dq0-Modellen häufig eine schlechte Regelgüte aufweisen.

Geht man im Weiteren von der optimalen Lösung $\tilde{\mathbf{i}}_c^{I*}$ aus, so können die zugehörigen optimalen Verläufe der verketteten Flüsse $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_c^{I*}$ wiederum durch die Grundwellen approximiert werden, d.h.

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_c^{I*} = \hat{\psi}^* \begin{bmatrix} \sin\left(p\left(\varphi - \Delta\varphi^*\right)\right) \\ \sin\left(p\left(\varphi - \Delta\varphi^* + \varphi_1\right)\right) \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Im Vergleich zu den optimalen Strömen sind sowohl die Amplitude $\hat{\psi}^*$ als auch die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ nichtlineare Funktionen des Sollmoments τ^* und damit der

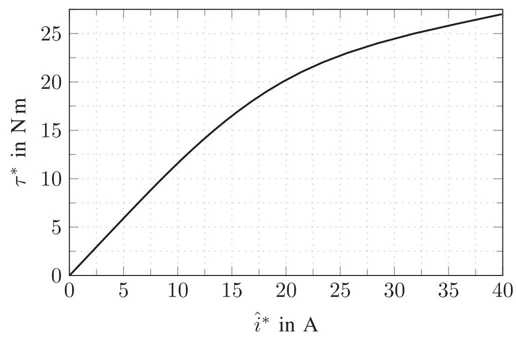

Abbildung 4: Optimale Strom-Momentencharakteristik der PSM mit Oberflächenmagneten.

Amplitude $\hat{i}^*$, d.h. $\hat{\psi}^* = \hat{\psi}^*\left(\hat{i}^*\right)$ und $\Delta\varphi^* = \Delta\varphi^*\left(\hat{i}^*\right)$. Diese optimalen Verläufe können für die spätere Implementierung einfach in Form von Polynomen approximiert werden. Die Komponenten von $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_c^{I*}$ weisen weiterhin eine konstante Phasenverschiebung von $\varphi_1 = 12^\circ$ auf.

Verwendet man diese Zwischenergebnisse in (28), so kann aus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_c^{I*} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\psi}}_c^{I*}}{\partial \hat{i}^*} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{i}^* + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\psi}}_c^{I*}}{\partial \varphi}\omega = -\tilde{\mathbf{R}}_c^I \tilde{\mathbf{i}}_c^{I*} + \tilde{\mathbf{v}}_c^{I*} \tag{34}$$

direkt der zugehörige Vektor der optimalen Spannungen $\tilde{\mathbf{v}}_c^{I*}$ ermittelt werden. Für die Erweiterung der optimalen (flachheitsbasierten) Vorsteuerung um einen Trajektorienfolgeregler wird die Stellgröße $\tilde{\mathbf{v}}_c^I$ als Summe der Vorsteuerung $\tilde{\mathbf{v}}_c^{I*}$ und des Regleranteils $\tilde{\mathbf{v}}_c^{Ic}$ angesetzt, vgl. Abschnitt 3.1. Der Trajektorienfolgefehler der verketteten Flüsse kann durch Verwendung von

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_c^I - \tilde{\boldsymbol{\psi}}_c^{I*} \approx \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\psi}}_c^{I*}}{\partial \tilde{\mathbf{i}}_c^{I*}} \mathbf{e}_i^I = \tilde{\mathbf{L}}_c^I \mathbf{e}_i^I \tag{35}$$

als Funktion der transformierten differentiellen Induktivitätsmatrix $\tilde{\mathbf{L}}_c^I$ und des Stromfehlers $\mathbf{e}_i^I = \tilde{\mathbf{i}}_c^I - \tilde{\mathbf{i}}_c^{I*}$ approximiert werden. Damit wird die Dynamik des Stromfehlers mit (34) und (28) in der Form

$$\tilde{\mathbf{L}}_c^I \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_i^I = -\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{L}}_c^I}{\partial \hat{i}^*} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{i}^* + \frac{\partial \tilde{\mathbf{L}}_c^I}{\partial \varphi}\omega\right)\mathbf{e}_i^I - \tilde{\mathbf{R}}_c^I \mathbf{e}_i^I + \tilde{\mathbf{v}}_c^{Ic} \tag{36}$$

beschrieben. Wählt man in Analogie zu (25) einen Regler der Form

$$\tilde{\mathbf{v}}_c^{Ic} = \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{L}}_c^I}{\partial \hat{i}^*} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{i}^* + \frac{\partial \tilde{\mathbf{L}}_c^I}{\partial \varphi}\omega\right)\mathbf{e}_i^I + \tilde{\mathbf{R}}_c^I \mathbf{e}_i^I + \tilde{\mathbf{L}}_c^I\left(-\lambda_1 \mathbf{e}_i^I - \lambda_0 \int_0^t \mathbf{e}_i^I \mathrm{d}t\right) \tag{37}$$

Post-print version of the article: W. Kemmetmüller, D. Faustner, and A. Kugi, "Optimale nichtlineare Regelung von permanenterregten Synchronmaschinen", *at-Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 9, pp. 739–750, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0041
The content of this post-print version is identical to the published paper but without the publisher's final layout or copy editing.

mit positiven Reglerkoeffizienten $\lambda_1, \lambda_0 > 0$, so ist die resultierende Dynamik des Stromfehlers exponentiell stabil. Für die betrachtete PSM gilt, dass $\partial \tilde{\mathbf{L}}_c^I / \partial \hat{i}^*$ und $\partial \tilde{\mathbf{L}}_c^I / \partial \varphi$ klein sind, weswegen unter der Annahme, dass $\mathbf{e}_i^I$ ebenfalls klein ist, für die praktische Anwendung wiederum ein vereinfachtes Stellgesetz der Form

$$\tilde{\mathbf{v}}_c^{Ic} = \tilde{\mathbf{R}}_c^I \mathbf{e}_i^I + \tilde{\mathbf{L}}_c^I \left(-\lambda_1 \mathbf{e}_i^I - \lambda_0 \int_0^t \mathbf{e}_i^I \mathrm{d}t \right) \tag{38}$$

zu nahezu gleichen Ergebnissen wie (37) führt. Man beachte, dass die transformierte differentielle Induktivitätsmatrix $\tilde{\mathbf{L}}_c^I$ in (38) noch immer eine nichtlineare Funktion der optimalen Stromamplitude $\hat{i}^*$ bzw. des optimalen Moments τ^* ist, womit sich hier ebenfalls der Einfluss der magnetischen Sättigung zeigt.

Zusammenfassend zeigen die Ergebnisse dieses Abschnittes, dass ausgehend von der relativ allgemeinen optimalen Momentenregelungsstrategie aus Abschnitt 3.1 eine vereinfachte Regelungsstrategie für die betrachtete PSM mit Oberflächenmagneten ermittelt werden kann, da die wesentlichen Größen dieses Motors sehr gut durch die zugehörige Grundwelle approximiert werden können.

4.2 Messergebnisse

Die Güte der entworfenen Momentenregelungsstrategie für die PSM mit Oberflächenmagneten wird anhand von Messergebnissen an einem Prüfstand analysiert. Der Prüfstand besteht aus einer PSM die direkt eine Schwungscheibe antreibt. Um den Einfluss der magnetischen Sättigung auf die Regelgüte zu untersuchen, werden im Weiteren Messungen mit Sollmomenten τ^*, die wesentlich über dem Nennmoment von ca. 5 N m liegen, durchgeführt. Man beachte, dass der Motor thermisch nicht für einen längeren Betrieb mit Momenten größer dem Nennmoment ausgelegt ist. Daher ist es im Gegensatz zu Abschnitt 3.2

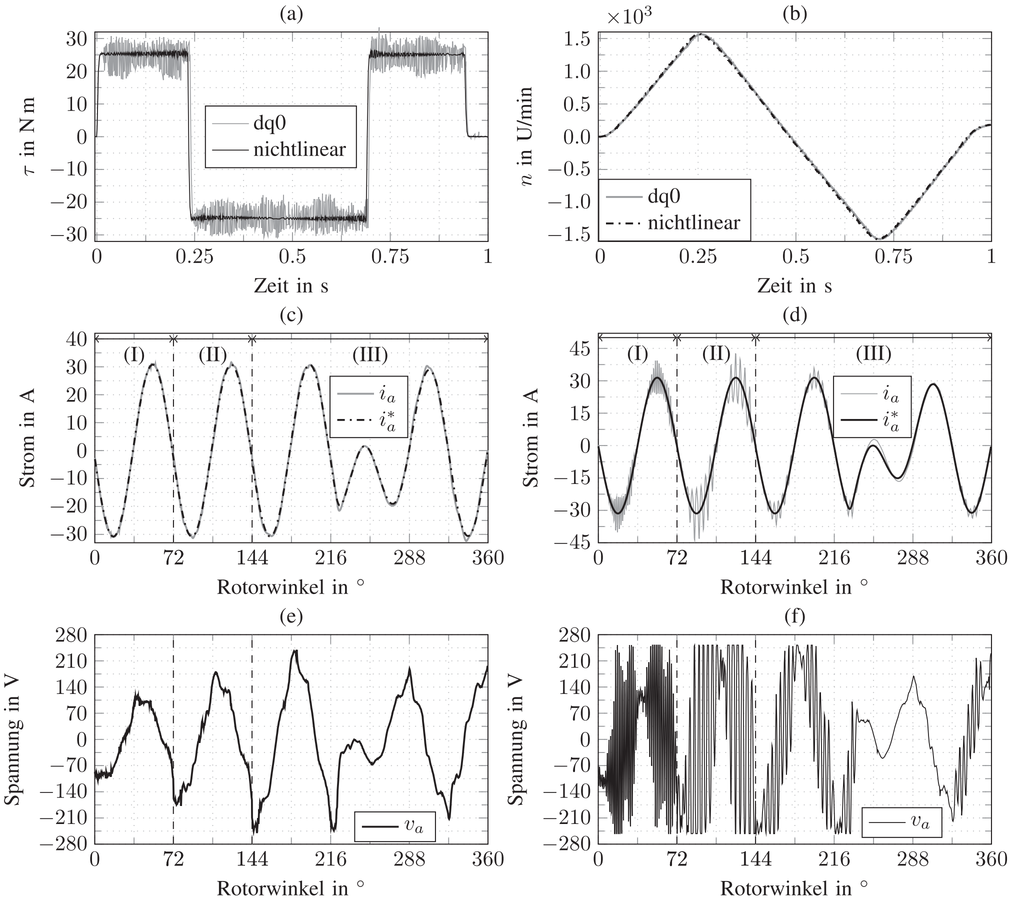

Abbildung 5: Vergleich der nichtlinearen Regelungsstrategie mit der feldorientierten Regelung (dq0) für einen Umkehrversuch mit 25 N m: (a) Momente, (b) Drehzahlen, (c), (e) Ströme und Spannungen der nichtlinearen Regelungsstrategie, (d), (f) Ströme und Spannungen der feldorientierten Regelung.

Post-print version of the article: W. Kemmetmüller, D. Faustner, and A. Kugi, "Optimale nichtlineare Regelung von permanenterregten Synchronmaschinen", *at-Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 9, pp. 739–750, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0041
The content of this post-print version is identical to the published paper but without the publisher's final layout or copy editing.

nicht möglich die Genauigkeit der Momentenregelung mit Hilfe eines Lastmotors und einer Messwelle bei geringen Drehzahlen von 4 U/min zu vermessen. In der für die Messung einer Umdrehung des Motors benötigten Zeit würden die Temperaturen des Motors die zulässigen Grenzen bei Weitem überschreiten. Eine Erhöhung der Drehzahl des Lastmotors ist jedoch aufgrund der resultierenden mechanischen Vibrationen nicht zielführend.

Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt Messungen eines Umkehrversuchs dargestellt, bei dem der Motor zuerst mit 25 N m auf ca. 1500 U/min beschleunigt, anschließend mit −25 N m abgebremst und auf −1500 U/min beschleunigt und schließlich wiederum mit 25 N m bis zum Stillstand abgebremst wird, siehe Abbildung 5 (a) und (b). In dieser Abbildung sind die Ergebnisse der vorgeschlagenen Momentenregelungsstrategie (nichtlinear) jenen einer klassischen feldorientierten Regelung gegenübergestellt. Man erkennt eine sehr hohe Momentenregelgüte mit geringen Abweichungen vom Sollwert für die nichtlineare Regelungsstrategie über den gesamten Drehzahlbereich. Die feldorientierte Regelung zeigt hingegen ein sehr schlechtes Ergebnis mit Momentenfluktuationen von bis zu 5 N m. Diese Fehler resultieren direkt aus den Fehlern in der Regelung des Stromes, siehe Abbildung 5 (d) und (f). Offensichtlich führt hier die Vernachlässigung der magnetischen Sättigung zu einem nahezu instabilen Verhalten der feldorientierten Regelung. Im Vergleich dazu zeigen die Verläufe der Ströme und Stellgrößen der mit der nichtlinearen Regelung betriebenen PSM in Abbildung 5 (c) und (e) eine ausgezeichnete Regelgüte.

5 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde eine optimale flachheitsbasierte Momentenregelungsstrategie für PSM mit ausgeprägter magnetischer Sättigung und nicht sinusförmigen charakteristischen Größen vorgestellt. Die Basis dieser Regelungsstrategie bildet die Beschreibung der Motoren durch Reluktanzmodelle, welche die systematische Berücksichtigung dieser Effekte erlauben. Die vorgeschlagene Methodik wurde an zwei Bauformen von PSM angewandt und anhand von Messergebnissen an einem Prüfstand validiert. Der Vergleich der Ergebnisse mit jenen einer feldorientierten Regelung zeigt eine wesentliche Verbesserung der Regelgüte.

In der in diesem Beitrag beschriebenen Regelungsstrategie wurde die Beschränkung der Stellgrößen, d.h. der Spannungen nicht berücksichtigt. Daher beschäftigen sich die aktuellen Forschungsarbeiten mit einer Erweiterung der Ergebnisse auf den Feldschwächbetrieb, wobei für die PSM mit Oberflächenmagneten bereits erste Ergebnisse vorhanden sind. Weiterhin bietet sich eine Erweiterung der Methoden auf andere Motorkonstruktionen wie Synchronreluktanzmotoren oder Asynchronmotoren an. Schließlich wird aktuell die Anwendung der Reluktanzmodellierung von elektrischen Motoren in einer modellprädiktiven Regelung untersucht.

Danksagung: Die Autoren bedanken sich bei der Firma Bernecker&Rainer Industrie Elektronik GmbH für die finanzielle Unterstützung der Forschungsarbeiten.

Symbolverzeichnis

ψ_c	verkettete Flüsse der Spulen
$\Delta\varphi$	Relativwinkel der optimalen verketteten Flüsse
$\hat{i}$	Amplitude der Spulenströme
λ_0, λ_1	Reglerkoeffizienten
$\mathbf{D}$	Inzidenzmatrix $\mathbf{D}^T = [\mathbf{D}_c^T, \mathbf{D}_m^T, \mathbf{D}_g^T]$
$\mathbf{G}_c$	Permeanzmatrix des Kobaums
$\mathbf{G}_t$	Permeanzmatrix des Baums
$\mathbf{i}_c$	Spulenströme
$\mathbf{L}_c^I$	transformierte Induktivitätsmatrix
$\mathbf{R}_c$	Widerstandsmatrix der Spulen $\mathbf{R}_c = \mathrm{diag}(R_c)$
$\mathbf{T}_1$	Transformationsmatrix
$\mathbf{u}_t$	magn. Spannungen der Baumelemente
$\mathbf{u}_{tg}$	magn. Spannungen der Permeanzen des Baums
$\mathbf{u}_{tm}$	magn. Spannungen der Permanentmagnete
$\mathbf{V}^\perp$	elektr. Verschaltungsmatrix
$\mathbf{v}_c$	Spulenspannungen
$\mathbf{v}_c^*$	Vorsteuerungsanteil der Spulenspannung
$\mathbf{v}_c^c$	Regleranteil der Spulenspannung
τ	Drehmoment
φ	Drehwinkel des Rotors
φ_0	Relativwinkel der optimalen Ströme
p	Polpaarzahl
T_s	Abtastzeit des Reglers

Literatur

1. W. Leonhard. *Control of Electrical Drives*. Springer, 2001. ISBN 3-540-41820-2.
2. P.C. Krause, O. Wasynczuk, und S.D. Sudhoff. *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. IEEE Press, 2002.
3. A. Kugi. Nichtlineare Regelungsmethoden für elektrische Maschinen. *e&i, Elektrotechnik und Informationstechnik*, 110(7/8):406–411, 1993.
4. S. Rebouh, A. Kaddouri, R. Abdessemed, und A. Haddoun. Nonlinear control by input-output linearization scheme for ev permanent magnet synchronous motor. In *Proc. of the IEEE*

Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC), pages 185–190, Arlington, TX, USA, Sept 2007.
5. M. Morawiec. The adaptive backstepping control of permanent magnet synchronous motor supplied by current source inverter. *IEEE Trans. Ind. Informat.*, 9(2):1047–1055, 2013.
6. M. Karabacak und H.I. Eskikurt. Speed and current regulation of a permanent magnet synchronous motor via nonlinear and adaptive backstepping control. *Mathematical and Computer Modelling*, 53(9–10):2015–2030, 2011.
7. M. Khanchoul, M. Hilairet, und D. Normand-Cyrot. A passivity-based controller under low sampling for speed control of pmsm. *Control Engineering Practice*, 26:20–27, 2014.
8. P.J. Nicklasson, R. Ortega, G. Espinosa-Perez, und C.G.J. Jacobi. Passivity-based control of a class of blondel-park transformable electric machines. *IEEE Trans. Autom. Control*, 42(5):629–647, 1997.
9. X. Zhang, L. Sun, K. Zhao, und L. Sun. Nonlinear speed control for pmsm system using sliding-mode control and disturbance compensation techniques. *IEEE Trans. Power Electron.*, 28(3):1358–1365, 2013.
10. M. Preindl und S. Bolognani. Model predictive direct speed control with finite control set of pmsm drive systems. *IEEE Trans. Power Electron.*, 28(2):1007–1015, 2013.
11. R. Errouissi, M. Ouhrouche, W.H. Chen, und A.M.Trzynadlowski. Robust nonlinear predictive controller for permanent-magnet synchronous motors with an optimized cost function. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 59(7):2849–2858, 2012.
12. B. Henke, A. Ruess, R. Neumann, M. Zeitz, und O. Sawodny. Flatness-based MIMO control of hybrid stepper motors - design and implementation. In *Proc. of the 2014 American Control Conference (ACC)*, pages 347–352, Portland, USA, 2014.
13. V. Petrovic, R. Ortega, A.M. Stankovic, und G. Tadmor. Design and implementation of an adaptive controller for torque ripple minimization in pm synchronous motors. *IEEE Trans. Power Electron.*, 15(5):871–880, 2000.
14. D. Flieller, N.K. Nguyen, P. Wira, G. Sturtzer, D.O. Abdeslam, und J. Merckle. A self-learning solution for torque ripple reduction for nonsinusoidal permanent-magnet motor drives based on artificial neural networks. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 61(2):655–666, 2014.
15. F. Aghili. Adaptive reshaping of excitation current for accurate torque control of brushless motors. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 16(2):356–364, 2008.
16. D.C. Hanselman. Minimum torque ripple, maximum efficiency excitation of brushless permanent magnet motors. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 41(3):292–300, 1994.
17. G. Sturtzer, D. Flieller, und J.P. Louis. Mathematical and experimental method to obtain the inverse modeling of nonsinusoidal and saturated synchronous reluctance motors. *IEEE Trans. Energy Convers.*, 18(4):494–500, 2003.
18. S.Y. Jung, J. Hong, und K. Nam. Current minimizing torque control of the ipmsm using ferrari's method. *IEEE Trans. Power Electron.*, 28(12):5603–5617, 2013.
19. A. Consoli, G. Scarcella, G. Scelba, und A. Testa. Steady-state and transient operation of ipmsms under maximum-torque-per-ampere control. *IEEE Trans. Ind. Appl.*, 46(1):121–129, 2010.
20. V. Ostovic. *Dynamics of Saturated Electric Machines*. Springer, 1989.
21. M. Amrhein und P.T. Krein. 3-d magnetic equivalent circuit framework for modeling electromechanical devices. *IEEE Trans. Energy Convers.*, 24:379–405, 2009.
22. M.F. Hsieh und Y.C. Hsu. A generalized magnetic circuit modeling approach for design of surface permanent-magnet machines. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 59:779–792, 2012.
23. T. Raminosoa, J.A. Farooq, A. Djerdir, und A. Miraoui. Reluctance network modelling of surface permanent magnet motor considering iron nonlinearities. *Energy Conversion and Management*, 50:1356–1361, 2009.
24. H. Seok-Hee, T.M. Jahns, und W.L. Soong. A magnetic circuit model for an ipm synchronous machine incorporating moving airgap and cross-coupled saturation effects. In *Proceedings of the IEEE International Electric Machines & Drives Conference*, pages 21–26, 2007.
25. A.R. Tariq, C.E. Nino-Baron, und E.G. Strangas. Iron and magnet losses and torque calculation of interior permanent magnet synchronous machines using magnetic equivalent circuit. *IEEE Trans. Magn.*, 46:4073–4080, 2010.
26. W. Kemmetmüller, D. Faustner, und A. Kugi. Modeling of a permanent magnet synchronous machine with internal magnet using magnetic equivalent circuits. *IEEE Trans. Magn.*, 50(6):8101314, 2014.
27. D. Faustner, W. Kemmetmüller, und A. Kugi. Magnetic equivalent circuit modeling of a saturated surface-mounted permanent magnet synchronous machine. In *Proc. of the 8th Vienna Int. Conference on Mathematical Modelling (MATHMOD)*, Vienna, Austria, Feb 2015.
28. D. Faustner, W. Kemmetmüller, und A. Kugi. Flatness-based torque control of saturated surface-mounted permanent magnet synchronous machines. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, eingereicht, 2014.
29. W. Kemmetmüller, D. Faustner, und A. Kugi. Optimal torque control of permanent-magnet synchronous machines using magnetic equivalent circuits. *Mechatronics*, eingereicht, 2015.
30. F. Wu und C. Desoer. Global inverse function theorem. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 19:199–201, 1972.

Autoreninformationen

Dr.Ing. Wolfgang Kemmetmüller
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Technische Universität Wien, Gusshausstrasse 27–29, 1040 Wien
kemmetmueller@acin.tuwien.ac.at

Wolfgang Kemmetmüller ist Assistenzprofessor am Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der TU Wien. Die Forschungsgebiete umfassen die physikalisch basierte Modellierung und nichtlineare Regelung von mechatronischen Systemem mit einem Schwerpunkt auf elektrohydraulischen und elektromagnetischen Aktoren.

Post-print version of the article: W. Kemmetmüller, D. Faustner, and A. Kugi, "Optimale nichtlineare Regelung von permanenterregten Synchronmaschinen", *at-Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 9, pp. 739–750, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0041
The content of this post-print version is identical to the published paper but without the publisher's final layout or copy editing.

Dipl.-Ing. David Faustner
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Technische Universität Wien, Gusshausstrasse 27–29, 1040 Wien
faustner@acin.tuwien.ac.at

David Faustner studierte Elektrotechnik an der TU Wien und ist seit 2011 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der TU Wien. Sein Forschungsgebiet umfasst die physikalisch basierte Modellierung und nichtlineare Regelung von elektrischen Maschinen.

Univ.Prof. Dr.techn. Andreas Kugi
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Technische Universität Wien, Gusshausstrasse 27–29, 1040 Wien
kugi@acin.tuwien.ac.at

Andreas Kugi ist Vorstand des Instituts für Automatisierungs- und Regelungstechnik an der TU Wien. Seine Forschungsgebiete umfassen die physikalisch basierte Modellierung und Regelung von (nichtlinearen) mechatronischen Systemen, differentialgeometrische und optimierungsbasierte Methoden der nichtlinearen Regelungstechnik sowie die Regelung von Systemen mit verteilten Parametern. Er ist an einer Vielzahl von Industrieprojekten beteiligt, im Speziellen im Bereich der Automatisierung im Stahlbereich. Prof. Kugi ist Editor-in Chief des IFAC Journals Control Engineering Practice und wirkliches Mitglied der österreichischen Akademie der Wissenschaften.

Post-print version of the article: W. Kemmetmüller, D. Faustner, and A. Kugi, “Optimale nichtlineare Regelung von permanenterregten Synchronmaschinen”, *at-Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 9, pp. 739–750, 2015. doi: 10.1515/auto-2015-0041