

This document contains a pre-print version of the paper

## Ein Programmpaket zur Modellierung kapazitiver MEMS-Drehratensensoren

authored by F. Mair, M. Egretzberger, and A. Kugi  
and published in *at – Automatisierungstechnik*.

---

The content of this pre-print version is identical to the published paper but without the publisher's final layout or copy editing. Please, scroll down for the article.

---

### Cite this article as:

F. Mair, M. Egretzberger, and A. Kugi, "Ein Programmpaket zur Modellierung kapazitiver MEMS-Drehratensensoren", *at – Automatisierungstechnik*, vol. 58, no. 6, pp. 307–315, 2010. DOI: [10.1524/auto.2010.0845](https://doi.org/10.1524/auto.2010.0845)

---

### BibTeX entry:

```
@article{Mair10,  
  author = {Mair, F. and Egretzberger, M. and Kugi, A.},  
  title = {Ein {P}rogrammpaket zur {M}odellierung kapazitiver {MEMS}-{D}rehratensensoren},  
  journal = {at -- Automatisierungstechnik},  
  year = {2010},  
  volume = {58},  
  number = {6},  
  pages = {307--315},  
  doi = {10.1524/auto.2010.0845}  
}
```

---

### Link to original paper:

<http://dx.doi.org/10.1524/auto.2010.0845>

---

### Read more ACIN papers or get this document:

<http://www.acin.tuwien.ac.at/literature>

---

### Contact:

Automation and Control Institute (ACIN)  
Vienna University of Technology  
Gusshausstrasse 27-29/E376  
1040 Vienna, Austria

Internet: [www.acin.tuwien.ac.at](http://www.acin.tuwien.ac.at)  
E-mail: [office@acin.tuwien.ac.at](mailto:office@acin.tuwien.ac.at)  
Phone: +43 1 58801 37601  
Fax: +43 1 58801 37699

# Ein Programmpaket zur Modellierung kapazitiver MEMS-Drehratensensoren

A Software Tool for the modeling of capacitive MEMS gyroscopes

Florian Mair, Markus Egretzberger, Andreas Kugi, Technische Universität Wien

Dieser Beitrag beschreibt ein Programmpaket zur automatisierten Herleitung des mathematischen Modells in symbolischer Darstellung von kapazitiven MEMS-Drehratensensoren. Im Anschluss an die Beschreibung des Funktionsprinzips eines speziellen einachsigen Drehratensensors mit kapazitivem Antrieb und kapazitiven Auslesestrukturen wird ein mathematisches Konzept zur systematischen Beschreibung einer bestimmten Klasse von Drehratensensoren vorgestellt. Das resultierende System von Differentialgleichungen kann im Computeralgebraprogramm MAPLE zum Reglerentwurf und zur weiteren Analyse verwendet werden und ein automatisierter C-Code-Generator ermöglicht eine nahtlose Einbindung in die Simulationsumgebung von MATLAB/SIMULINK.

This article presents a software tool to automatically generate the mathematical model of capacitive MEMS gyroscopes in a symbolic form. After describing the operational principle of a specific one-axis gyroscope with capacitive drive actuators and capacitive sensors, a mathematical concept is presented that allows for the systematic description of a certain class of capacitive MEMS gyroscopes. The resulting system of differential equations can be used for controller design and further analysis within the computer algebra program MAPLE. Additionally, an automatic C code generator provides a link to the numeric simulation environment MATLAB/SIMULINK.

**Schlagwörter:** MEMS, kapazitive Drehratensensoren, Computeralgebra, Modellbildung

**Keywords:** MEMS, capacitive angular rate sensors, computer algebra, modeling

## 1 Einleitung

Mikro-Elektro-Mechanische-Systeme (MEMS) kommen in einer Vielzahl von Applikationen zum Einsatz. Dem großen Vorteil einer kostengünstigen Massenfertigung steht der Nachteil eines im Allgemeinen sehr aufwändigen Entwicklungsprozesses gegenüber. Neben den sehr hohen Prototypen- und Entwicklungskosten erschweren die meist langen Produktionszeiten die Verifikation neuer Ideen, weshalb in der Regel neue Konzepte vorab einer detaillierten und umfangreichen Analyse unterzogen werden. Große Bedeutung kommt hierbei den zur Verfügung stehenden mathematischen Modellen des zu untersuchenden Systems zu, da diese – unabhängig von der Art ihrer weiteren Verwendung – die Basis aller Untersuchungen bilden.

MEMS sind trotz ihrer sehr kleinen Abmessungen meist

komplexe Systeme und die systematische Herleitung geeigneter mathematischer Modelle stellt in vielen Fällen eine große Herausforderung dar. Gewöhnlich bestehen MEMS aus Komponenten bzw. Subsystemen verschiedener physikalischer Domänen, wie zum Beispiel Starrkörper, elastische Strukturen, kapazitive Aktor- und Sensorelemente, Spulen, optische Elemente u.v.a.. Deshalb müssen die entsprechenden Gesetze der Kontinuumsmechanik, der Elektrodynamik und der Thermodynamik herangezogen werden, um eine korrekte mathematische Beschreibung der Systeme zu erhalten. Entsprechend dem jeweiligen Einsatz können die Anforderungen an die mathematischen Modelle stark variieren. Um die grundsätzliche Funktionsweise zu verstehen, beschränkt man sich auf die Verwendung einfacher konzentriert parametrischer Modelle, die jedoch für eine detaillierte Analyse meist zu ungenau sind. Mit Hilfe der Fi-

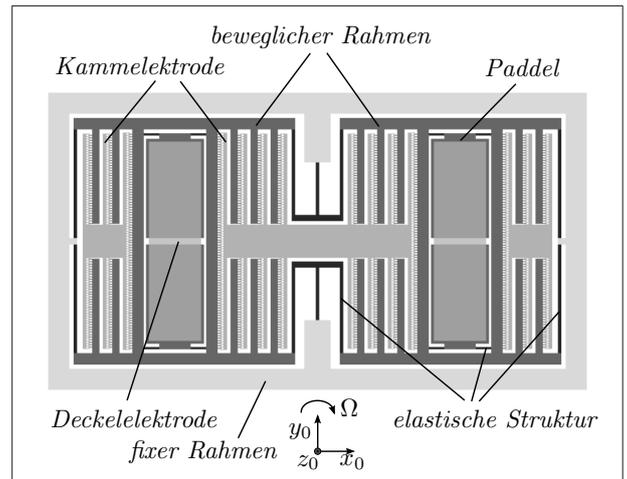
nite Elemente Methode (FEM) kann das Systemverhalten selbst bei kompliziertem geometrischen Aufbau mit hinreichender Genauigkeit untersucht werden, weshalb sie für eine Vielzahl von Anwendungen wie zum Beispiel zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenmoden sowie zur Berechnung der Spannungs- bzw. Verzerrungsverteilung von elastischen mechanischen Strukturen, zur Untersuchung der thermischen Interaktionen oder zur Berechnung von elektrischen und magnetischen Feldern herangezogen wird. Diese Methode hat jedoch den Nachteil, dass das resultierende System von Differentialgleichungen im Allgemeinen sehr groß ist und deshalb weder für den Reglerentwurf noch für transiente Simulationen mit annehmbaren Simulationszeiten verwendet werden kann. Nicht zuletzt deshalb gibt es in den letzten Jahren eine Vielzahl von Forschungsaktivitäten im Bereich der Modell-Ordnungsreduktion, siehe beispielsweise [11], [14], [15] mit der Anwendung auf MEMS oder [12] für einen allgemeinen Überblick. Dabei werden auf Basis der Finite Elemente Modelle, Modelle mit geringerer Ordnung abgeleitet, welche das Systemverhalten mit einer noch ausreichenden Genauigkeit wiedergeben. Die Grenzen dieser Vorgehensweise liegen darin, dass die systematische Reduktion von nichtlinearen Mehrgrößensystemen, wie sie bei der Modellierung von kapazitiven MEMS auftreten, noch nicht zufriedenstellend systematisch gelöst ist.

Eine alternative Vorgehensweise, um zu einer mathematischen Beschreibung mit einer vertretbaren Anzahl an Zuständen zu gelangen, liegt darin, die zu untersuchenden MEMS vor der Herleitung der mathematischen Modelle in ihre funktionalen Komponenten (Starrkörper, elastische Körper, konzentrierte Kapazitäten, usw.) zu unterteilen.

Derzeit sind mehrere Simulationsumgebungen kommerziell verfügbar (Ansys[1], COMSOL[2], Coventor[3]), die sich unter anderem mit der Modellierung von MEMS beschäftigen. Die diversen Programmpakete verfolgen dabei unterschiedliche Modellierungsstrategien, jedoch erlaubt keines von ihnen die Extraktion beziehungsweise den Zugriff auf die symbolischen Gleichungen des zugehörigen mathematischen Modells. Da diese jedoch die Basis von modellbasierten Regler- und Optimierungsverfahren bilden und zudem ein fundamentales Verständnis der Funktionsweise ermöglichen, wird in diesem Beitrag ein Programmpaket vorgestellt, welches die nichtlinearen Bewegungsgleichungen von kapazitiven Drehratensensoren direkt auf Basis der Geometriedaten aus einem CAD-Programm berechnen kann.

## 2 Funktionsprinzip Drehratensensor

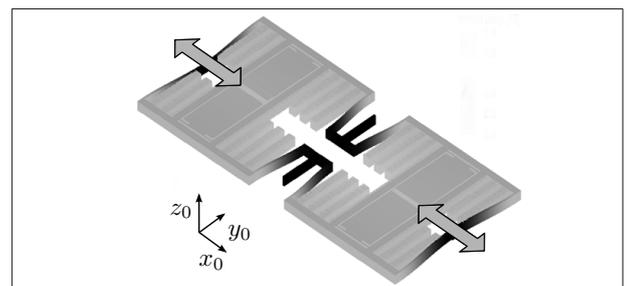
Um in den nachfolgenden Abschnitten die Funktionalität des Programmpakets beschreiben zu können, wird zunächst das Funktionsprinzip eines kapazitiven Drehratensensors erläutert. Abbildung 1 zeigt einen kapazitiven Drehratensensor, siehe [10], welcher mittels des *Co-*



**Bild 1:** Kapazitiver Drehratensensor.

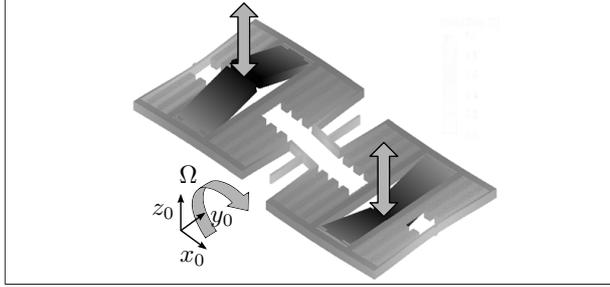
*riolis Effekts* eine von außen anliegende Drehrate  $\Omega$  um die  $y_0$ -Achse messen kann.

Wie in Abbildung 1 ersichtlich, besteht der kapazitive Drehratensensor aus mehreren Elementen. Die beweglichen Rahmen, die Paddel und die elastischen Strukturen bilden den beweglichen mechanischen Teil der Konstruktion, während die Kamm- und Deckelektroden sowie der fixe Rahmen starr mit dem Gehäuse des Sensors verbunden sind. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass alle mechanischen Teile des Sensors aus demselben Material (Silizium) gefertigt werden, weshalb die funktionalen Eigenschaften der Elemente durch die geometrische Formgebung festgelegt ist. Durch den Spalt zwischen den feststehenden Elektroden und der beweglichen Struktur entstehen Kondensatoren, welche auf Grund ihrer variablen Kapazität als kapazitive Aktoren und Sensoren verwendet werden können. Auf die



**Bild 2:** Antriebsmode Drehratensensor.

Antriebselektrode (mittlere Kammelektrode) wird nun eine harmonische Spannung eingeprägt, welche in einer harmonischen Kraft resultiert und somit den beweglichen Teil des Sensors in eine harmonische Oszillation in  $x_0$ -Richtung (Antriebsmode) versetzt, siehe Abbildung 2. Wird nun der Sensor durch eine externe Drehrate  $\Omega$  um die  $y_0$ -Achse gedreht, so bewirkt der *Coriolis Effekt* eine antiparallele harmonische Kraft in  $z_0$ -Richtung,



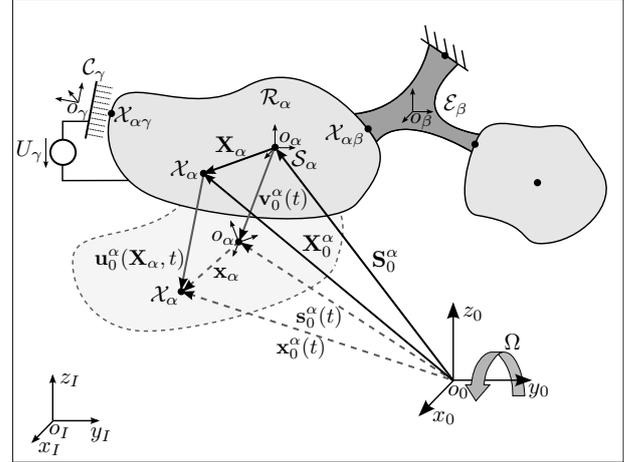
**Bild 3:** Auslesemode Drehratensensor.

welche wiederum eine Oszillation der beweglichen Elemente in  $z_0$ -Richtung (Auslesemode) zur Folge hat, siehe Abbildung 3. Diese Oszillation kann durch die Kapazitätsänderung der über den Paddeln angebrachten Deckelektroden gemessen werden.

### 3 Mathematisches Konzept

In abstrakter Form kann ein kapazitiver Drehratensensor als Mehrkörpersystem bestehend aus Starrkörpern, elastischen Körpern und kapazitiven Aktoren und Sensoren betrachtet werden. Um die folgenden Darstellungen präziser erläutern zu können, wird in Abbildung 4 ein allgemeiner Starrkörper  $\mathcal{R}_\alpha$  in unverformter und verformter (strichliert abgebildet) Konfiguration, ein allgemeiner elastischer Körper  $\mathcal{E}_\beta$  und ein allgemeiner Kondensator  $\mathcal{C}_\gamma$  dargestellt. Es werden nun ein räumliches Referenzkoordinatensystem  $(o_0x_0y_0z_0)$  sowie zwei körperfeste Koordinatensysteme  $(o_\alpha x_\alpha y_\alpha z_\alpha)$  und  $(o_\beta x_\beta y_\beta z_\beta)$  eingeführt. Ein Starrkörper  $\mathcal{R}_\alpha$  wird beschrieben durch seine Masse  $m_\alpha$ , seinen Trägheitstensor  $\mathbf{J}_\alpha$  und seinen Schwerpunkt  $\mathcal{S}_\alpha$ . Jede Starrkörperbewegung setzt sich aus einer reinen Translation und einer reinen Rotation zusammen, weshalb es sinnvoll ist, die translatorischen Freiheitsgrade  $\mathbf{v}_0^\alpha \in \mathbb{R}^3$  und die rotatorischen Freiheitsgrade  $\phi_0^\alpha \in \mathbb{R}^3$ , welche eine Parametrierung der Rotation  $\mathbf{R}_0^\alpha \in SO(3)$  erlauben, als generalisierte Koordinaten zu wählen, [16]. Bezeichnen nun  $\mathbf{S}_0^\alpha$  und  $\mathbf{s}_0^\alpha(t)$  den Positionsvektor zum Massenschwerpunkt in unverformter bzw. in verformter Konfiguration, dann kann der momentane Verschiebungsvektor des Massenschwerpunktes durch  $\mathbf{v}_0^\alpha(t) = \dot{\mathbf{s}}_0^\alpha(t) - \dot{\mathbf{S}}_0^\alpha$  ausgedrückt werden. Unterzieht sich das Referenzkoordinatensystem  $(o_0x_0y_0z_0)$  einer Rotation um die  $y_0$ -Achse mit der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\Omega$  relativ zum Inertialkoordinatensystem  $(o_Ix_Iy_Iz_I)$ , dann lautet die absolute Geschwindigkeit des Schwerpunktes, ausgedrückt im Referenzkoordinatensystem,  $(\dot{\mathbf{s}}_I^\alpha)_0 = (\boldsymbol{\omega}_I^0)_0 \times \mathbf{s}_0^\alpha + \dot{\mathbf{s}}_0^\alpha$  mit dem Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeit  $(\boldsymbol{\omega}_I^0)_0 = [0, \Omega, 0]^T$ .

Zur Berechnung der kinetischen Energie des Starrkörpers  $\mathcal{R}_\alpha$  ist es zweckmäßig, den Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeiten im körperfesten Koordinatensystem  $(o_\alpha x_\alpha y_\alpha z_\alpha)$  auszudrücken  $(\boldsymbol{\omega}_I^\alpha)_\alpha =$



**Bild 4:** Zur abstrakten Darstellung eines kapazitiven Drehratensensors.

$\mathbf{R}_\alpha^0 (\boldsymbol{\omega}_0^\alpha + (\boldsymbol{\omega}_I^0)_0)$  mit der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_\alpha^0$  und dem zugehörigen Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega}_0^\alpha$ . Dies resultiert in [16]

$$T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\mathbf{s}}_I^\alpha)_0^T (\dot{\mathbf{s}}_I^\alpha)_0 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_I^\alpha)_\alpha^T \mathbf{J}_\alpha (\boldsymbol{\omega}_I^\alpha)_\alpha \quad (1)$$

Ein Starrkörper besitzt die Eigenschaft, dass der Positionsvektor  $\mathbf{X}_\alpha$ , dargestellt in Abbildung 4, vom Ursprung des Koordinatensystems  $(o_\alpha x_\alpha y_\alpha z_\alpha)$  zu einem beliebigen Punkt  $\mathcal{X}_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ , ausgedrückt im Koordinatensystem  $(o_\alpha x_\alpha y_\alpha z_\alpha)$ , bei Änderung der Konfiguration konstant bleibt, d.h.  $\mathbf{X}_\alpha = \mathbf{x}_\alpha$ , und dass jeder beliebige Punkt  $\mathcal{X}_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$  der gleichen Rotation  $\mathbf{R}_0^\alpha$  unterliegt. Unter der Annahme, dass der Starrkörper keiner initialen Rotation unterliegt, d.h.  $\mathbf{R}_0^\alpha(\phi_0^\alpha(t_0)) = \mathbf{E}$ , mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$ , kann die Translation eines beliebigen Punktes  $\mathcal{X}_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$  in der Form  $\mathbf{u}_0^\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t) = (\mathbf{R}_0^\alpha(\phi_0^\alpha) - \mathbf{E}) \mathbf{X}_\alpha + \mathbf{v}_0^\alpha(t)$  beschrieben werden. Um die Notation übersichtlich zu halten, werden die translatorischen Verschiebungen  $\mathbf{u}_0^\alpha$  und die rotatorischen Freiheitsgrade  $\phi_0^\alpha$  eines beliebigen Punktes  $\mathcal{X}_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$  zu einem Verschiebungs- und Rotationsvektor  $\mathbf{r}_0^\alpha = [(\mathbf{u}_0^\alpha)^T, (\phi_0^\alpha)^T]^T \in \mathbb{R}^6$  zusammengefasst, dessen Komponenten Funktionen der generalisierten Koordinaten des zugehörigen Körpers sind.

Für die weiteren Betrachtungen wird angenommen, dass die Masse der elastischen Körper im Vergleich zur Masse der Starrkörper vernachlässigt werden kann und dass die elastischen Verformungen klein sind. Ist ein elastischer Körper  $\mathcal{E}_\beta$  mit  $w$  Starrkörpern  $\mathcal{R}_{\alpha_i}$ ,  $i = 1, \dots, w$  verbunden, so erlauben die oben angeführten Annahmen die Berechnung der Verzerrungsenergie

$$V_\beta = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_0^\beta)^T \mathbf{K}_0^\beta \mathbf{r}_0^\beta \quad (2)$$

mit der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_0^\beta$  und dem Vektor  $\mathbf{r}_0^\beta = [(\mathbf{u}_0^{\alpha_1\beta})^T, (\phi_0^{\alpha_1\beta})^T, \dots, (\mathbf{u}_0^{\alpha_w\beta})^T, (\phi_0^{\alpha_w\beta})^T]^T \in \mathbb{R}^{6w}$ , welcher die Verschiebungen und Drehungen an den Schnittpunkten  $\mathcal{X}_{\alpha_i\beta}$  mit den Starrkörpern vereinigt. Ist ein ela-

stischer Körper am Schnittpunkt  $\mathcal{X}_0$  starr mit dem Referenzkoordinatensystem verbunden, so verschwinden die Verschiebungen und Drehungen an diesem Punkt, d.h.,  $\mathbf{u}_0^0 = \mathbf{0}$ ,  $\phi_0^0 = \mathbf{0}$ . Ein elektrostatischer Aktor bildet zusammen mit dem Starrkörper  $\mathcal{R}_\alpha$  einen Kondensator  $\mathcal{C}_\gamma$ , dessen Kapazität  $C_\gamma$  als Funktion des Verschiebungs- und Rotationsvektors  $\mathbf{r}_0^\gamma = [(\mathbf{u}_0^{\alpha\gamma})^\top, (\phi_0^{\alpha\gamma})^\top]^\top \in \mathbb{R}^6$  an einem Punkt  $\mathcal{X}_{\alpha\gamma}$  an der Oberfläche des Starrkörpers berechnet werden kann. Somit folgt die potentielle Ko-Energie des elektrostatischen Aktors bzw. Sensors zu

$$V_\gamma = \frac{1}{2} C_\gamma(\mathbf{r}_0^\gamma) (U_\gamma)^2 \quad (3)$$

mit der eingepprägten elektrischen Spannung  $U_\gamma$ .

Unter der Annahme, dass Starrkörper nur mit elastischen Körpern verbunden sind und keine weiteren generalisierten Kräfte auf das System wirken, kann der *Lagrange*-Formalismus

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right)^\top - \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{z}} \right)^\top + \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{z}} \right)^\top = \mathbf{0} \quad (4)$$

mit den generalisierten Koordinaten  $\mathbf{z} = [(\mathbf{v}_0^{\alpha_1})^\top, (\phi_0^{\alpha_1})^\top, \dots, (\mathbf{v}_0^{\alpha_n})^\top, (\phi_0^{\alpha_n})^\top]^\top \in \mathbb{R}^{6n}$  der  $n$  Starrkörper, der gesamten kinetischen Energie  $T = \sum_\alpha T_\alpha$  und der gesamten potentiellen Energie  $V = \sum_\beta V_\beta - \sum_\gamma V_\gamma$  zur Berechnung der Bewegungsgleichungen herangezogen werden. Gemäß [16] liefert die Auswertung der Gleichung (4)

$$\mathbf{M}(\mathbf{z}) \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}(\Omega, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{f}(\Omega, \dot{\Omega}, \mathbf{z}, \bar{\mathbf{u}}_\gamma) = \mathbf{0} \quad (5)$$

mit der positiv definiten Trägheitsmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{z})$ , der Matrix  $\mathbf{C}(\Omega, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ , welche aus den Zentrifugal- und Coriolistermen besteht, und dem Vektor  $\mathbf{f}(\Omega, \dot{\Omega}, \mathbf{z}, \bar{\mathbf{u}}_\gamma)$ , der alle Terme zufolge der potentiellen Energie und alle Zentrifugal- und Trägheitsterme, welche aus der externen Rotation des Referenzsystems mit der Drehrate  $\Omega$  folgen, beinhaltet. Der Vektor  $\bar{\mathbf{u}}_\gamma$  setzt sich aus den  $m$  eingepprägten Spannungen  $\bar{\mathbf{u}}_\gamma = [U_{\gamma_1}, \dots, U_{\gamma_m}]^\top$  zusammen. Der Ausgang des Systems

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{z}) \quad (6)$$

ist durch den Vektor der Kapazitäten  $\mathbf{g} = [C_{\gamma_1}, \dots, C_{\gamma_p}]^\top$  der  $p$  kapazitiven Sensorelemente gegeben. In den bisher vorgelegten Betrachtungen des Systems wurden keine dissipativen Elemente berücksichtigt, da diese mit geringerem Aufwand nachträglich in das durch eine modale Analyse abgeleitete Modell integriert werden können.

## 4 Software

Das in Abschnitt 3 vorgestellte mathematische Konzept erlaubt nun die systematische mathematische Beschreibung von kapazitiven Drehratensensoren. Ziel des

Programmpakets ist es nun, alle zur Beschreibung des Systems benötigten Informationen möglichst selbst zu generieren beziehungsweise aus Geometriedaten abzuleiten sowie eine Implementierung der mathematischen Gleichungen aus Abschnitt 3 vorzunehmen. Dafür wurde das Programmpaket in zwei Teile gegliedert, siehe Abbildung 5. Der erste Teil, *ModelMEMS*, wurde in der objektorientierten Programmiersprache *Python* [5] implementiert. Durch einen integrierten interaktiven Interpreter ist es möglich, gesamte kapazitive mikromechanische Systeme in *ModelMEMS* zu entwerfen<sup>1</sup>, jedoch liegt die Kernaufgabe des Programmes in der Bereitstellung der benötigten Funktionen, um vorhandene Geometriedaten zu verarbeiten und diese darzustellen. Der zweite Teil, *MathMEMS*, wurde als Bibliothek für das kommerzielle Computeralgebraprogramm *Maple* ausgeführt und stellt symbolische mathematische Modelle der vorgestellten Elemente (Starrkörper  $\mathcal{R}$ , elastischer Körper  $\mathcal{E}$ , Kapazität  $\mathcal{C}$ , etc.) bereit. Bei beiden Programmteilen wurde auf eine objektorientierte beziehungsweise modularisierte Implementierung geachtet, um eine unkomplizierte und strukturierte Erweiterung zu ermöglichen.

### 4.1 ModelMEMS

Die Sensoranalyse in *ModelMEMS* erfolgt in mehreren Schritten. Zuerst wird die Eingabedatei, welche einem bestimmten Format genügen muss, eingelesen. Die Datei besteht aus verschiedenen Abschnitten, die das Material, die Geometrie und Teile der Topologie des Sensors beschreiben. In der derzeitigen Version ist die Auswahl der zur Verfügung stehenden geometrischen Elemente auf Quader limitiert. Es gibt jedoch keine Einschränkung bezüglich der Anzahl der verwendeten Elemente. Da die Geometriedaten meist aus einem CAD Programm extrahiert werden, das keine Informationen bezüglich der Funktion der einzelnen geometrischen Elemente besitzt, wurden verschiedene Topologie-Algorithmen implementiert, welche die detaillierte Zusammenstellung des Sensors bestimmen können. Der Benutzer muss nur definieren ob ein Quader Teil eines Starrkörpers, einer elastischen Struktur oder Teil einer Elektrode ist und die genannten Algorithmen stellen sicher, dass Starrkörperlemente, welche an andere Starrkörperelemente angrenzen zu einem Starrkörper, elastische Elemente, welche andere elastische Elemente berühren zu einer elastischen Struktur und Elemente einer Elektrode, die an weitere Elemente einer Elektrode grenzen, zu einer gesamten Elektrode zusammengefügt werden.

Als Resultat des ersten Analyseschrittes werden die diversen funktionalen Komponenten des Sensors (Starrkörper, Balkenstruktur und Elektroden) durch Software-Klassen repräsentiert, welche von nun an als

<sup>1</sup> Die Entwurfsmöglichkeiten mit *ModelMEMS* gehen weit über die im Rahmen dieses Artikels dargestellten Konzepte hinaus und werden hier nicht weiter im Detail betrachtet.

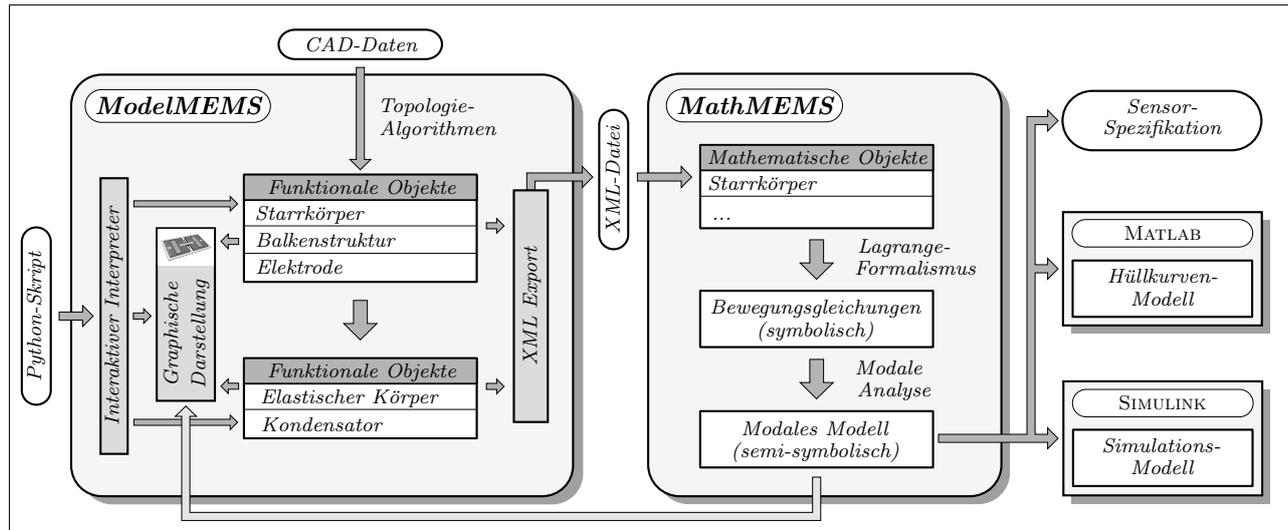


Bild 5: Programm-Struktur.

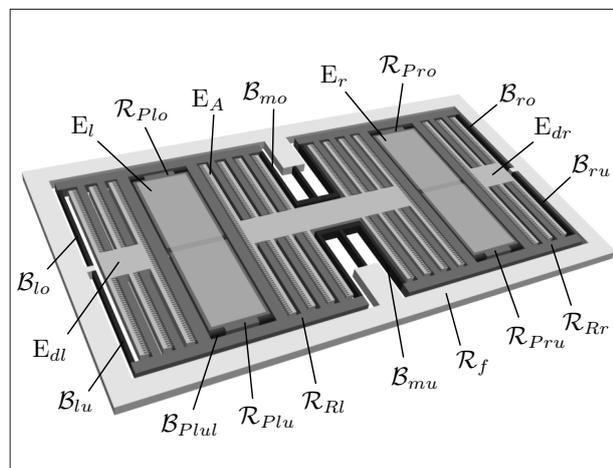


Bild 6: Resultat des Topologiealgorithmus.

funktionale Objekte bezeichnet werden. Für den in Abschnitt 2 vorgestellten Sensor bedeutet dies, dass man sieben Starrkörper (vier Paddeln ( $\mathcal{R}_{Plo}$ ,  $\mathcal{R}_{Plu}$ ,  $\mathcal{R}_{Pro}$ ,  $\mathcal{R}_{Pru}$ ), zwei bewegliche Rahmen ( $\mathcal{R}_{Rl}$ ,  $\mathcal{R}_{Rr}$ ) und einen fixen Rahmen  $\mathcal{R}_f$ ), zwölf Balkenstrukturen (sechs Balkenstrukturen  $\mathcal{B}_\beta$ ,  $\beta \in \{lo, lu, ro, ru, mo, mu\}$  zwischen den beweglichen Rahmen und dem fixen Rahmen und acht Balkenstrukturen  $\mathcal{B}_\beta$ ,  $\beta \in \{Plol, Plor, Plur, Prol, Pror, Prul, Prur\}$  zwischen den Paddeln und den beweglichen Rahmen) und fünf Elektroden (eine Antriebselektrode  $E_A$ , zwei Antriebsausleseelektroden ( $E_{dl}$ ,  $E_{dr}$ ) und zwei Ausleseelektroden ( $E_l$ ,  $E_r$ )) erhält, siehe Abbildung<sup>2</sup> 6.

Basierend auf diesen funktionalen Objekten wird eine Sensoranalyse durchgeführt, die zu einer zusätzlichen Anzahl an funktionalen Objekten, nämlich elasti-

<sup>2</sup> Der Übersicht halber wurde nur einer der Balken zwischen den Paddeln und den beweglichen Rahmen beschriftet.

scher Körper und Kondensator, führt. Zusammen repräsentieren diese funktionalen Objekte die mathematischen Eigenschaften von Starrkörpern  $\mathcal{R}$ , elastischen Körpern  $\mathcal{E}$  und Kondensatoren  $\mathcal{C}$ .

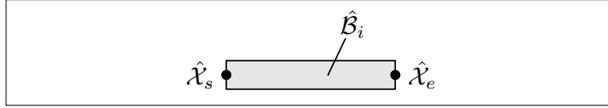
#### 4.1.1 Starrkörper

Aufgrund der Tatsache, dass ein Starrkörper  $\mathcal{R}_\alpha$  aus einer Menge von Quadern besteht, kann seine Masse  $m_\alpha$ , der Vektor vom Ursprung des Referenzkoordinatensystems zum Massenschwerpunkt  $\mathbf{S}_0^\alpha$  in unverformter Lage und sein Trägheitstensor  $\mathbf{J}_\alpha$  bezogen auf den Massenschwerpunkt sehr einfach mit Hilfe der bekannten Beziehungen der Starrkörperdynamik berechnet werden, siehe beispielsweise [16].

#### 4.1.2 Elastischer Körper

Die Spezifikation der Verzerrungsenergie (2) eines elastischen Körpers ist für gewöhnlich aus mehreren Gründen eine größere Herausforderung. Erstens, die Geometrie solcher elastischer Elemente kann kompliziert sein und eine Approximation durch Quader ist in vielen Fällen nicht ausreichend genau. Zweitens, da der Sensor aus dem kubisch kristallinen Material Silizium aufgebaut ist, kann die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_0^\beta$  eines einzelnen Balkenelements nur für bestimmte Orientierungen des anisotropen Materials symbolisch angegeben werden, siehe [9]. Um die größtmögliche Flexibilität zu erlangen, kann aus diesem Grund im Programmpaket ein elastischer Körper  $\mathcal{E}_\beta$  auf zwei Arten definiert werden. Die erste Möglichkeit besteht darin, ihn direkt in der Eingabedatei durch Angabe der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_0^\beta$ , welche zum Beispiel durch eine Finite Elemente Analyse bestimmt werden kann, und der Positionsvektoren  $\mathbf{X}_0^{\alpha\beta}$  der Anschlusspunkte  $\mathcal{X}_{\alpha\beta}$  in unverformter Konfiguration zu definieren. Die zweite Möglichkeit besteht darin, ihn direkt von einem Balkenstruktur-Objekt abzuleiten. Obwohl diese Vorgehensweise auf Quaderelemente beschränkt ist,

ist sie für viele Sensorbauformen anwendbar. Im Folgenden wird angenommen, dass die Masse der elastischen Balken im Vergleich zur Masse der Starrkörper vernachlässigbar ist und dass die elastischen Verschiebungen der Körper klein sind. Abbildung 7 zeigt ein ein-



**Bild 7:** Einzelnes Balkenelement.

zernes elastisches Balkenelement  $\hat{\mathcal{B}}_i$ . Laut [13] kann ein elastisches Balkenelement, welches durch die Bernoulli-Euler-Theorie approximiert wird, durch die Beziehung

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_0^s \\ \hat{\mathbf{p}}_0^e \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{ss} & \hat{\mathbf{K}}_{se} \\ \hat{\mathbf{K}}_{es} & \hat{\mathbf{K}}_{ee} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}_0^i} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_0^s \\ \hat{\mathbf{r}}_0^e \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{K}}_{es} = \hat{\mathbf{K}}_{se}^T \quad (7)$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet  $\hat{\mathbf{K}}_0^i$  die Steifigkeitsmatrix, die Vektoren  $\hat{\mathbf{p}}_0^s = [(\mathbf{f}_0^s)^T, (\mathbf{t}_0^s)^T]^T \in \mathbb{R}^6$  und  $\hat{\mathbf{p}}_0^e = [(\mathbf{f}_0^e)^T, (\mathbf{t}_0^e)^T]^T \in \mathbb{R}^6$  die Kräfte  $\mathbf{f}_0^s, \mathbf{f}_0^e$  und Momente  $\mathbf{t}_0^s, \mathbf{t}_0^e$  und die Vektoren  $\hat{\mathbf{r}}_0^s = [(\mathbf{u}_0^s)^T, (\phi_0^s)^T]^T \in \mathbb{R}^6$  und  $\hat{\mathbf{r}}_0^e = [(\mathbf{u}_0^e)^T, (\phi_0^e)^T]^T \in \mathbb{R}^6$  die translatorischen  $\mathbf{u}_0^s, \mathbf{u}_0^e$  und rotatorischen Verschiebungen  $\phi_0^s, \phi_0^e$  an den Anfangs-  $\hat{\mathcal{X}}_s$  und Endknoten  $\hat{\mathcal{X}}_e$ . Alle angeführten Größen sind im räumlichen Koordinatensystem  $(o_0x_0y_0z_0)$  definiert.

Besteht eine Balkenstruktur nur aus einem einzelnen elastischen Balkenelement, dann kann die potentielle Energie des elastischen Körpers  $\mathcal{E}_\beta$  direkt mit Hilfe von (2) mit  $\mathbf{K}_0^\beta = \hat{\mathbf{K}}_0^i$  und  $\mathbf{r}_0^\beta = [(\hat{\mathbf{r}}_0^s)^T, (\hat{\mathbf{r}}_0^e)^T]^T$  berechnet werden. Setzt sich die Balkenstruktur hingegen aus mehreren Elementen zusammen, so müssen noch weitere Überlegungen getroffen werden.

Um diese verständlicher zu machen, wird der Ablauf anhand eines anschaulichen Beispiels erläutert. Abbildung 8 (a) zeigt eine T-förmige Balkenstruktur mit drei Anschlussknoten  $\mathcal{X}_{\alpha_i\beta}, i \in \{1, 2, 3\}$  wie sie als Teil der Balkenstrukturen  $\mathcal{B}_{mo}$  und  $\mathcal{B}_{mu}$  auftritt. Die Balkenelemente  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$  der Balkenstruktur werden durch geeignete Balkenelemente  $\hat{\mathcal{B}}_1, \hat{\mathcal{B}}_2$  und  $\hat{\mathcal{B}}_3$  (dargestellt in Abbildung 8 (b)), welche im Folgenden noch genauer spezifizierte Randbedingungen erfüllen müssen, ersetzt. Die Beziehung (7) angewendet auf jedes Balkenelement  $\hat{\mathcal{B}}_i$  erlaubt es nun, eine lineare Abbildung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_0^1 \\ \hat{\mathbf{p}}_0^2 \\ \hat{\mathbf{p}}_0^3 \\ \hat{\mathbf{p}}_0^4 \\ \hat{\mathbf{p}}_0^5 \\ \hat{\mathbf{p}}_0^6 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{p}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{11} & \hat{\mathbf{K}}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{K}}_{21} & \hat{\mathbf{K}}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_{33} & \hat{\mathbf{K}}_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_{43} & \hat{\mathbf{K}}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_{55} & \hat{\mathbf{K}}_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_{65} & \hat{\mathbf{K}}_{66} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_0^1 \\ \hat{\mathbf{r}}_0^2 \\ \hat{\mathbf{r}}_0^3 \\ \hat{\mathbf{r}}_0^4 \\ \hat{\mathbf{r}}_0^5 \\ \hat{\mathbf{r}}_0^6 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{r}}} \quad (8)$$

zu formulieren, welche den Zusammenhang zwischen den Kraft- und Momentenvektoren  $\hat{\mathbf{p}}$  und den Verschiebungs- und Rotationsvektoren  $\hat{\mathbf{r}}$  an den äußeren  $\hat{\mathcal{X}}_{i\beta}, i \in \{1, 4, 6\}$  und inneren Knoten  $\hat{\mathcal{X}}_{j\beta}, j \in \{2, 3, 5\}$  beschreibt.

Wie in Abbildung 8 (b) ersichtlich, erfüllen die inneren Knoten  $\hat{\mathcal{X}}_{j\beta}, j \in \{2, 3, 5\}$  die kinematische Randbedingung  $\hat{\mathbf{r}}_0^2 = \hat{\mathbf{r}}_0^3 = \hat{\mathbf{r}}_0^5$ . Als Konsequenz kann der Verschiebungs- und Rotationsvektor  $\hat{\mathbf{r}}$  durch einen neuen Vektor  $\bar{\mathbf{r}} = [(\hat{\mathbf{r}}_0^1)^T, (\hat{\mathbf{r}}_0^2)^T, (\hat{\mathbf{r}}_0^4)^T, (\hat{\mathbf{r}}_0^6)^T]^T$  über die Beziehung

$$\hat{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{r}} \quad (9)$$

mit

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (10)$$

dargestellt werden.

Einsetzen von (9) in (8) und Multiplikation mit der transponierten Matrix  $\bar{\mathbf{H}}^T$  von der linken Seite liefert

$$\underbrace{\bar{\mathbf{H}}^T}_{\bar{\mathbf{p}}} \hat{\mathbf{p}} = \underbrace{\bar{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{H}}}_{\bar{\mathbf{K}}} \bar{\mathbf{r}}. \quad (11)$$

Im resultierenden Vektor der Kräfte und Momente  $\bar{\mathbf{p}}$  kann man erkennen, dass – entsprechend der statischen Randbedingungen – die Summe der Kräfte und Momente am Knoten  $\hat{\mathcal{X}}_{2\beta}$  verschwindet, was in

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_0^1 \\ \hat{\mathbf{p}}_0^2 + \hat{\mathbf{p}}_0^3 + \hat{\mathbf{p}}_0^5 \\ \hat{\mathbf{p}}_0^4 \\ \hat{\mathbf{p}}_0^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_0^1 \\ \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{p}}_0^4 \\ \hat{\mathbf{p}}_0^6 \end{bmatrix}$$

resultiert. Um einen neuen Vektor der Kräfte und Momente  $\tilde{\mathbf{p}}$  zu erhalten, bei dem sich alle Null-Einträge der inneren Knoten in den unteren Einträgen des Vektors  $\bar{\mathbf{p}}$  wiederfinden, muss der Vektor  $\bar{\mathbf{p}}$  mit einer Permutationsmatrix

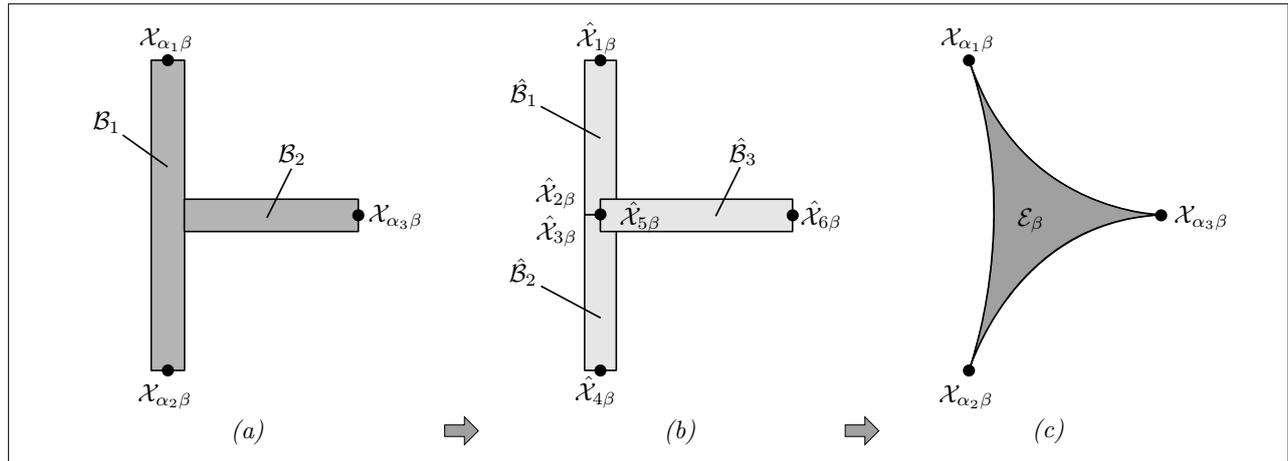
$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

multipliziert werden, was

$$\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0^\beta \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}_0^\beta = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_0^1 \\ \hat{\mathbf{p}}_0^4 \\ \hat{\mathbf{p}}_0^6 \end{bmatrix}$$

ergibt. Eine Permutationsmatrix erfüllt immer  $\tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^T = \mathbf{I}$ . Ersetzen von  $\bar{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{p}}$  in (11), Multiplikation mit  $\tilde{\mathbf{H}}$  und Erweiterung mit  $\tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}}$  liefert

$$\underbrace{\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{H}}^T}_{\mathbf{I}} \tilde{\mathbf{p}} = \underbrace{\tilde{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{H}}^T}_{\bar{\mathbf{K}}} \underbrace{\tilde{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{r}}}_{\bar{\mathbf{r}}} \quad (12)$$



**Bild 8:** Balkenstruktur eines elastischen Körpers.

mit dem neuen Verschiebungs- und Rotationsvektor

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0^\beta \\ \hat{\mathbf{r}}_0^2 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_0^\beta = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_0^1 \\ \hat{\mathbf{r}}_0^4 \\ \hat{\mathbf{r}}_0^6 \end{bmatrix}.$$

Um die weiteren Betrachtungen klarer zu gestalten, wird (12) in der Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_0^\beta \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{\beta\beta} & \tilde{\mathbf{K}}_{\beta 0} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{0\beta} & \tilde{\mathbf{K}}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0^\beta \\ \hat{\mathbf{r}}_0^2 \end{bmatrix}$$

angegeben. Der Verschiebungs- und Rotationsvektor  $\hat{\mathbf{r}}_0^2$  am inneren Knoten  $\hat{\mathcal{X}}_{2\beta}$  kann nun in der Form

$$\hat{\mathbf{r}}_0^2 = -\tilde{\mathbf{K}}_{00}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{0\beta} \mathbf{r}_0^\beta$$

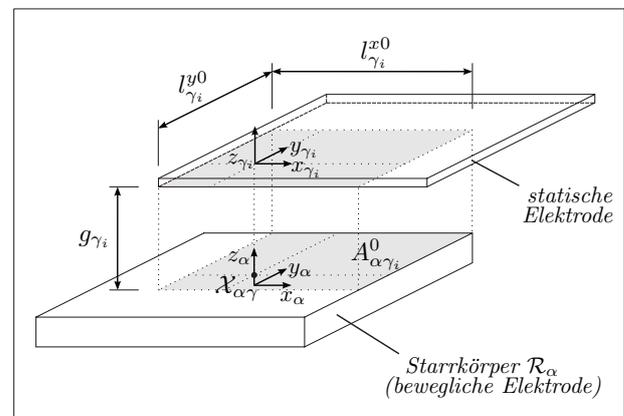
als Funktion des Verschiebungs- und Rotationsvektors  $\mathbf{r}_0^\beta$  an den äußeren Knoten  $\hat{\mathcal{X}}_{i\beta}$ ,  $i \in \{1, 4, 6\}$  berechnet werden. Somit ist die gesuchte Beziehung durch

$$\mathbf{p}_0^\beta = \underbrace{\left( \tilde{\mathbf{K}}_{\beta\beta} - \tilde{\mathbf{K}}_{\beta 0} \tilde{\mathbf{K}}_{00}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{0\beta} \right)}_{\mathbf{K}_0^\beta} \mathbf{r}_0^\beta$$

mit der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_0^\beta$  gegeben, was die Beschreibung der potentiellen Energie des elastischen Körpers  $\mathcal{E}_\beta$  mit Hilfe von (2) ermöglicht.

### 4.1.3 Kondensator

Im letzten Analyseschritt werden die Kondensatorelemente  $\mathcal{C}_\gamma$  bestimmt. Wie in Abschnitt 3 angedeutet, werden nur jene Kondensatoren betrachtet, die zwischen den statisch befestigten Elektroden und den beweglichen Starrkörpern entstehen. Die Kapazitäten der Kondensatoren sind Funktionen der generalisierten Koordinaten und eignen sich deshalb zur Verwendung als Aktor- und Sensorelemente. Unter der Annahme, dass der Starrkörper  $\mathcal{R}_\alpha$  und die Elektrode in unverformter Konfiguration parallel zueinander angeordnet sind, was für die betrachtete Klasse an Sensoren zutreffend ist,



**Bild 9:** Kondensator in unverformter Konfiguration.

besteht ein Kondensator  $\mathcal{C}_\gamma$  immer aus ein oder mehreren rechteckigen, parallelen Plattenelementen  $\mathcal{C}_{\gamma_i}$  mit konstanter, initialer Spalthöhe  $g_0$  und rechteckiger, initialer Überlappfläche  $A_{\alpha\gamma_i}^0$ , wie in Abbildung 9 dargestellt. Für die weiteren Betrachtungen wird ein Koordinatensystem  $(o_{\gamma_i}, x_{\gamma_i}, y_{\gamma_i}, z_{\gamma_i})$  eingeführt, dessen Ursprung  $o_{\gamma_i}$  auf der Unterseite der Elektrode angeordnet ist und das so ausgerichtet wird, dass  $z_{\gamma_i}$  normal auf die plane Oberfläche der Elektrode und  $x_{\gamma_i}$  und  $y_{\gamma_i}$  parallel zu den Seitenkanten der Überlappfläche  $A_{\alpha\gamma_i}^0$  sind. Somit kann die Verschiebung eines Punktes  $\mathcal{X}_{\alpha\gamma_i}$ , der Teil der Überlappfläche  $A_{\alpha\gamma_i}$  und im Koordinatensystem  $(o_{\gamma_i}, x_{\gamma_i}, y_{\gamma_i}, z_{\gamma_i})$  definiert ist, durch

$$(\mathbf{u}_0^{\alpha\gamma_i})_{\gamma_i} = \mathbf{R}_{\gamma_i}^0 \mathbf{u}_0^{\alpha\gamma_i}$$

angegeben werden, wobei  $\mathbf{R}_{\gamma_i}^0$  jene Rotationsmatrix bezeichnet, die die Anfangsorientierung der statischen Elektrode bezüglich des Referenzkoordinatensystems  $(o_0, x_0, y_0, z_0)$  beschreibt. Im Folgenden wird angenommen, dass das elektrische Feld ideal in dem Sinne ist, dass Streufelder vernachlässigbar sind und damit nur eine wirksame Komponente normal zur Elektrodenoberfläche

vorliegt. Somit kann die Kapazität eines  $C_{\gamma_i}$  Elements in unverformter Konfiguration in der Form

$$C_{\gamma_i} = \epsilon_r \iint_{A_{\alpha\gamma_i}} \frac{1}{g_{\gamma_i}} dx_{\gamma_i} dy_{\gamma_i} \quad (13)$$

mit der Permittivität  $\epsilon_r$ , der Überlappfläche  $A_{\alpha\gamma_i}$  und dem Spaltabstand

$$g_{\gamma_i} = g_0 - (\mathbf{u}_0^{\alpha\gamma_i})_{\gamma_i} \cdot \mathbf{e}_z,$$

mit dem Einheitsvektor in  $z_{\gamma_i}$ -Richtung  $\mathbf{e}_z$  berechnet werden. Die Überlappfläche in verformter Konfiguration  $A_{\alpha\gamma_i}$  ist durch die normale Projektion der Seitenkanten der statischen Elektrode auf die Oberfläche der beweglichen Elektrode von  $\mathcal{R}_\alpha$  gegeben, weshalb sie von deren Verschiebung und Rotation abhängig ist. Für die betrachtete Klasse an Sensoren kann jedoch die Annahme getroffen werden, dass die rotatorische Verschiebung eines Starrkörpers  $\mathcal{R}_\alpha$  klein ist. Im Weiteren ist die Überlappfläche  $A_{\alpha\gamma_i}$  eines einzelnen  $C_{\gamma_i}$  Elements für gewöhnlich klein im Vergleich zur Überlappfläche des gesamten Kondensators  $C_\gamma$ , weshalb die Approximation der projizierten Fläche durch ein Rechteck, das nur von den translatorischen Verschiebungen  $(\mathbf{u}_0^{\alpha\gamma_i})_{\gamma_i}$  abhängt, gerechtfertigt ist.

Daraus resultiert, dass (13) durch

$$\begin{aligned} C_{\gamma_i} &\cong C_{\gamma_i} \left( (\mathbf{u}_0^{\alpha\gamma_i})_{\gamma_i} \right) = \\ &= \epsilon_r \frac{\left( l_{\gamma_i}^{x0} \pm (\mathbf{u}_0^{\alpha\gamma_i})_{\gamma_i} \cdot \mathbf{e}_x \right) \left( l_{\gamma_i}^{y0} \pm (\mathbf{u}_0^{\alpha\gamma_i})_{\gamma_i} \cdot \mathbf{e}_y \right)}{g_{\gamma_i}} \end{aligned} \quad (14)$$

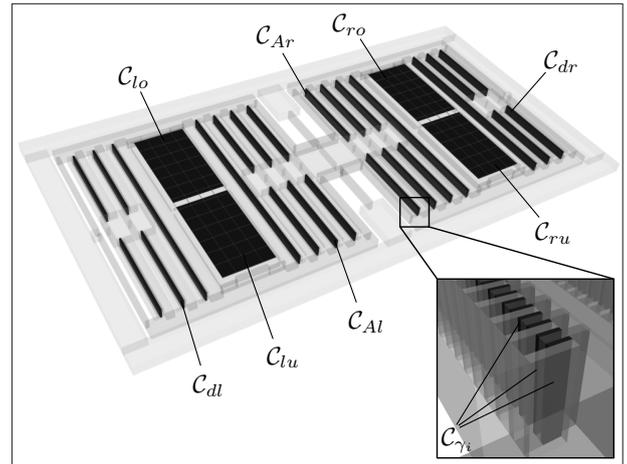
approximiert werden kann, mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{e}_y$  in  $x_{\gamma_i}$ - und  $y_{\gamma_i}$ -Richtung. Gleichung (14) entspricht einem Parallelplattenkondensator mit variablen Seitenlängen und variabler Spalthöhe. Die Kapazität des gesamten Kondensators  $C_\gamma$  kann schlussendlich durch

$$C_\gamma \cong \sum_i C_{\gamma_i} \left( (\mathbf{u}_0^{\alpha\gamma_i})_{\gamma_i} \right) \quad (15)$$

berechnet werden. Mit den vorangegangenen Überlegungen können nun Parallelplatten- und Kammkondensatoren durch Bestimmung der Überlappflächen aller Starrkörper  $\mathcal{R}_\alpha$  und aller Elektroden  $E_\gamma$  gewonnen werden. Dies führt bei dem Beispielsensor aus Abschnitt 2 zu 8 Kondensatorelementen (4 Kondensatoren ( $C_{lo}$ ,  $C_{lu}$ ,  $C_{ro}$ ,  $C_{ru}$ ) zwischen den Ausleseelektroden und den Paddeln, 2 Kondensatoren ( $C_{Al}$ ,  $C_{Ar}$ ) zwischen der Antriebs Elektrode und den beweglichen Rahmen, sowie 2 Kondensatoren ( $C_{dl}$ ,  $C_{dr}$ ) zwischen den Antriebsausleseelektroden und den beweglichen Rahmen), welche sich aus insgesamt 2240 Parallelplattenkondensatoren  $C_{\gamma_i}$  zusammensetzen, siehe Abbildung 10.

## 4.2 MathMEMS

Der zweite Teil des Programmpakets, *MathMEMS*, wurde als Bibliothek für das kommerzielle Computeralgebraprogramm *Maple* [4] ausgeführt. Der Vorteil



**Bild 10:** Resultat Kondensatorsynthese.

dieser Vorgehensweise besteht darin, dass kommerzielle Computeralgebraprogramme wie *Maple* eine interaktive Arbeitsumgebung bieten, die einen einfachen Zugriff auf umfassende mathematische Werkzeuge ermöglicht.

Die Sensoranalyse in *MathMEMS* erfolgt ebenfalls in mehreren Schritten. Zuerst werden die Daten, welche von *ModelMEMS* übergeben werden, über ein Dateiformat, welches auf der *eXtensible Mark-up Language* (XML [7]) basiert, eingelesen. In einem nächsten Schritt wird für jedes funktionale Objekt ein mathematisches Objekt erzeugt. Von da an kann mit diesen mathematischen Objekten im vollen Funktionsumfang von *Maple* gearbeitet werden. Dies inkludiert die Änderung von numerischen Werten, Zuweisung neuer Symbole oder das Hinzufügen neuer mathematischer Objekte, welche im Datenfile nicht enthalten waren. Grundsätzlich ist es also auch in *MathMEMS* möglich, einen Sensor zu entwerfen und nachträglich nach einer geeigneten Bauform zu suchen. Während einer typischen Analyse wird jedoch mit der Berechnung der kinetischen Energie (1) und der potentiellen Energien (2) und (3) des Sensors fortgefahren und schlussendlich werden die Bewegungsdifferentialgleichungen (5) mittels des *Lagrange*-Formalismus (4) hergeleitet.

Die resultierenden Bewegungsgleichungen umfassen üblicherweise einen größeren dynamischen Bereich als jener, der für den Reglerentwurf interessant ist. Deshalb wird eine modale Analyse vorgenommen, die dem Benutzer erlaubt, nur die relevante Dynamik des Sensors in das mathematische Modell zu inkludieren. Um den Auswahlprozess zu vereinfachen, können alle Eigenmoden des homogenen, linearisierten mathematischen Modells im 3D Viewer von *ModelMEMS* animiert werden. Dieses reduzierte modale Modell kann nun für eine Vielzahl von Anwendungen herangezogen werden. Einerseits ermöglicht es, wichtige Kenngrößen des Systems direkt aus den Gleichungen abzulesen, und andererseits kann es zur Bildung eines sogenannten Hüllkurvenmodells, welches wiederum als Basis für den weiteren Regler-

entwurf dient, siehe [8], verwendet werden. Die dafür benötigte Verbindung zur Simulationsumgebung MATLAB/SIMULINK [6] ist durch den integrierten C-Code-Generator gegeben. Dieser kann die resultierenden Gleichungen in *C-Code MEX-Functions* beziehungsweise in *Level 2 C-Code S-Functions* übersetzen und ermöglicht somit die abschließende Simulation und Verifikation des geschlossenen Regelkreises in SIMULINK.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass aufgrund der Verwendung von *Maple* als Rechenkern alle Berechnungsschritte symbolisch oder, falls gewünscht, numerisch mit einstellbarer Rechengenauigkeit ausgeführt werden können. Dies ist wesentlich, um numerische Ungenauigkeiten zu vermeiden und um die strukturellen Symmetrien der mathematischen Modelle, welche in diesen Sensoren vorhanden ist, zu erhalten. Darüber hinaus führt das Arbeiten mit den symbolischen oder semi-symbolischen Gleichungen zu einem besseren Verständnis des gesamten Systemverhaltens und lässt die Möglichkeit offen, Parameter im Modell gezielt auszuwählen, die symbolisch oder für eine bessere Berechnungseffizienz numerisch gehandhabt werden sollen.

## 5 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde ein Programmpaket zur automatisierten Herleitung des mathematischen Modells von kapazitiven Drehratensensoren in symbolischer Form vorgestellt. Nach einer kurzen Zusammenfassung der Vor- und Nachteile derzeitiger Modellierungsstrategien wurde das Funktionsprinzip eines kapazitiven Drehratensensors, der eine extern anliegende Drehrate um eine sensitive Achse messen kann, vorgestellt. Anschließend wurde ein auf dem *Lagrange*-Formalismus basierendes, mathematisches Konzept vorgestellt, mit dessen Hilfe sich die Bewegungsgleichungen eines solchen Sensors systematisch bestimmen lassen. Dafür wurde der zu untersuchende Sensor in seine funktionalen Komponenten (Starrkörper, Balkenstruktur, Elektrode) unterteilt. In den letzten beiden Abschnitten wurde das eigentliche Programmpaket vorgestellt und die wichtigsten Schritte einer Sensoranalyse anhand eines spezifischen Sensors erläutert.

### Danksagung

Diese Arbeit wurde vom deutschen Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) im Rahmen des EURIPIDES Projekts RESTLES (Projektnummer 16SV3579) gefördert.

### Literatur

- [1] *Ansys: ANSYS, Inc.*, <http://www.ansys.com>, 2008.
- [2] *COMSOL MULTIPHYSICS: COMSOL, Inc.*, <http://www.comsol.com>, 2008.

- [3] *CoventorWare ARCHITECT: Coventor, Inc.*, [www.coventor.com](http://www.coventor.com), 2008.
- [4] *Maple: Maplesoft a division of Waterloo Maple, Inc. Release 13.0*, [www.maplesoft.com](http://www.maplesoft.com), 1981-2009.
- [5] *Python: Python Software Foundation. Release 2.5.2*, [www.python.org](http://www.python.org), 2001-2008.
- [6] *MATLAB/SIMULINK: The MathWorks, Inc. Release 2009a*, [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com), 1984-2009.
- [7] *XML: Extensible Markup Language: W3C, World Wide Web consortium., 1.0 (Fourth Edition)*, <http://www.w3.org>, 2006.
- [8] M. Egretzberger and A. Kugi. An envelope model to describe the sensor dynamics of vibratory gyroscopes. In *Proceedings of the SPIE, Smart Sensors, Actuators and MEMS IV*, volume 7362, Dresden, Germany, 2009.
- [9] M. Egretzberger, A. Kugi, S. Günthner, and B. Hartmann. Stress measurement in a cantilevered silicon beam undergoing coupled motion of torsion and bending. *Smart Materials and Structures*, 16:296–304, 2007.
- [10] S. Günthner. *Entwurf und Charakterisierung von mikro-mechanischen Drehratensensoren in Silizium*. Shaker Verlag, Aachen, 2006.
- [11] J. S. Han, E. B. Rudnyi, and J. G. Korvink. Efficient optimization of transient dynamic problems in MEMS devices using model order reduction. *Journal of Micro-mechanics and Microengineering*, 15:822–832, 2005.
- [12] B. Lohmann and B. Salimbahrami. Ordnungsreduktion mittels Krylov-Unterraummethoden. *at – Automatisierungstechnik*, 52:30–38, 2004.
- [13] W. D. Pilkey. *Analysis and Design of Elastic Beams*. John Wiley & Sons, 2002.
- [14] S. Reitz, J. Bastian, J. Haase, P. Schneider, and P. Schwarz. System level modeling of microsystems using order reduction methods. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 37:7–16, 2003.
- [15] E. B. Rudnyi and J. G. Korvink. Model order reduction of MEMS for efficient computer aided design and system simulation. In *Sixteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Belgium, July 5-9, 2004*.
- [16] M. W. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1989.

Manuskripteingang: 27. November 2009.



**Dipl.-Ing. Florian Mair** arbeitet als Projektassistent am Institut für Automatisierungs- & Regelungstechnik an der TU Wien. Hauptarbeitsgebiete: Modellierung und Regelung von mikromechanischen Systemen.

Adresse: Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungs- & Regelungstechnik, Gruppe für komplexe dynamische Systeme, Gußhausstr. 27-29, A-1040 Wien  
E-Mail: mair@acin.tuwien.ac.at



**Dipl.-Ing. Markus Egretzberger** arbeitet als Projektassistent am Institut für Automatisierungs- & Regelungstechnik an der TU Wien. Hauptarbeitsgebiete: Modellierung und Regelung von mikromechanischen Systemen.

Adresse: Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungs- & Regelungstechnik, Gruppe für komplexe dynamische Systeme, Gußhausstr. 27-29, A-1040 Wien  
E-Mail: egretzberger@acin.tuwien.ac.at



**Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Andreas Kugi** ist Institutsvorstand am Institut für Automatisierungs- & Regelungstechnik an der TU Wien. Hauptarbeitsgebiete: Modellierung, Simulation und Regelung nichtlinearer sowie infinit-dimensionaler komplexer dynamischer Systeme mit Anwendungen in der hydraulischen Aktorik, der Walzwerksautomatisierung, in der Automobilindustrie sowie für mikromechanische Systeme.

Adresse: Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungs- & Regelungstechnik, Gruppe für komplexe dynamische Systeme, Gußhausstr. 27-29, A-1040 Wien  
E-Mail: kugi@acin.tuwien.ac.at