Modellierung des Umschlingungswinkels eines auf Rollen geführten Metallbandes

authored by **G. Stadler, A. Steinboeck, M. Baumgart, and A. Kugi**

and published in *at – Automatisierungstechnik*.


```
@ARTICLE{stadler15,
  author = {Stadler, G. and Steinboeck, A. and Baumgart, M. and Kugi, A.},
  title = {Modellierung des {U}mschlingungswinkels eines auf {R}ollen gef\"uhrten
        {M}etallbandes},
  journal = {{}at -- Automatisierungstechnik},
  year = {2015},
  volume = {63},
  pages = {646--655},
  number = {8},
  doi = {10.1515/auto-2015-0043},
  owner = {sg},
  timestamp = {2016.08.10},
  url = {http://www.degruyter.com/view/j/auto.2015.63.issue-8/auto-2015-0043/auto-2015-0043.xml}
}
```


Contact:

Automation and Control Institute (ACIN)
Vienna University of Technology
Gusshausstrasse 27-29/E376
1040 Vienna, Austria

Internet: www.acin.tuwien.ac.at
E-mail: office@acin.tuwien.ac.at
Phone: +43 1 58801 37601
Fax: +43 1 58801 37699

at – Automatisierungstechnik 2015; 63(8): 646–655 **DE GRUYTER** OLDENBOURG

Anwendungen

Georg Stadler*, Andreas Steinboeck, Michael Baumgart und Andreas Kugi

Modellierung des Umschlingungswinkels eines auf Rollen geführten Metallbandes

Modelling of the contact angle of a metal strip supported by rolls

DOI 10.1515/auto-2015-0043
Eingang 31. März 2015; angenommen 8. Juli 2015

Zusammenfassung: Dieser Beitrag beschäftigt sich mit der mathematischen Modellierung des Umschlingungswinkels eines auf periodisch angeordneten Rollen geführten Stahlbandes einer Bandverarbeitungsanlage. Die Herleitung der zugrunde liegenden Differentialgleichung erfolgt auf Basis der Variationsrechnung mit variablen Rändern. Anschließend wird ein ideal-elastisch-ideal-plastisches Materialmodell für einen periodischen Biegezyklus vorgestellt. Anhand von Simulationsstudien wird die Abhängigkeit des Umschlingungswinkels von maßgeblichen Parametern untersucht.

Schlüsselwörter: Mathematische Modellierung, Variationsrechnung, variable Ränder, Plastizität, periodische Verformung.

Abstract: This paper deals with the mathematical modelling of the contact angle of a metal strip supported by periodically assembled rolls, as it is often the case in strip processing plants. The derivation of the governing differential equation is carried out by means of the calculus of variations for moving boundaries. An ideal-elastic-ideal-plastic material law of a periodic bending cycle is introduced. Simulation studies are used to evaluate the influence of essential parameters on the contact angle.

Keywords: Mathematical modelling, calculus of variations, moving boundary, plasticity, periodic deformation.

***Korrespondenzautor: Georg Stadler,** Christian Doppler Labor für modellbasierte Prozessregelung in der Stahlindustrie, Technische Universität Wien, Wien, E-Mail: stadler@acin.tuwien.ac.at
Michael Baumgart, Andreas Kugi: Christian Doppler Labor für modellbasierte Prozessregelung in der Stahlindustrie, Technische Universität Wien, Wien
Andreas Steinboeck: Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Technische Universität Wien, Wien

1 Einleitung

In Abbildung 1 ist eine (nicht maßstäbliche) Prinzipskizze der Rollen-Band-Konfiguration eines Ofens und das zugehörige Koordinatensystem dargestellt. Die Rollen haben alle den Radius R und sind örtlich periodisch im Abstand L angeordnet. Während das Band horizontal durch den Ofen bewegt wird, biegt es sich (elastisch/plastisch) durch das Eigengewicht um die synchron angetriebenen Rollen. Im Allgemeinen umschlingt dabei das Band die Rollen mit einem Umschlingungswinkel α. Aus metallurgischer Sicht ist es wichtig, den Umschlingungswinkel möglichst genau mithilfe eines mathematischen Modells berechnen zu können. Die Kenntnis dieses Umschlingungswinkels soll zur Untersuchung von Kontaktphänomenen, welche an den Oberflächen zwischen Band und Rollen auftreten, und zum Entwurf einer modellbasierten Regelung des Umschlingungswinkels herangezogen werden.

In diesem Beitrag wird ein mathematisches Modell für die Biegelinie des Bandes und den Umschlingungswinkel vorgestellt. Abhängigkeiten in y-Richtung (Breitenrichtung) werden nicht berücksichtigt. Das Band wird mit geringer Geschwindigkeit horizontal über die Rollen bewegt, sodass Beschleunigungskräfte vernachlässigt werden können und als Last nur die Gewichtskraft auftritt. Es ist daher ausreichend, die quasi-stationäre Bandauslenkung $w(x)$ zwischen zwei Rollen zu bestimmen und diese aufgrund der periodischen Rollenanordnung periodisch fortzusetzen. Das Band umschlingt die Rollen in den Bereichen $x \in [x_2 - L, x_1] + jL$, wobei $j \in \mathbb{Z}$ und x_1 und x_2 die unbekannten Kontaktpunkte beschreiben.

Korrosionseffekte an den Oberflächen von Rollen wurden in [1] näher untersucht. In [2] wird der Umschlingungswinkel zwischen Kühlrollen und einem Stahlband zur variablen Kühlung eingestellt. Die Zinkbeschichtung von Stahlbändern mithilfe eines einstellbaren Umschlingungswinkels wird in [3] behandelt. In den Arbeiten [4, 5] wird eine ähnliche Problemstellung wie in diesem Beitrag untersucht, jedoch ist die vorgeschlagene Lösung nur auf

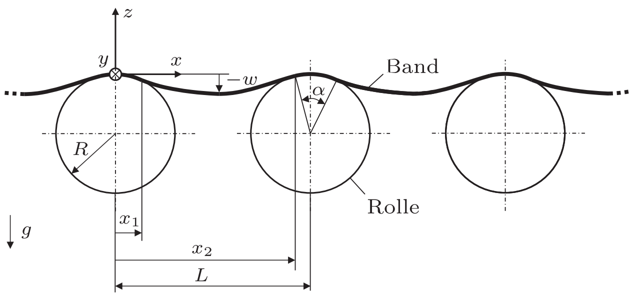


Abbildung 1: Konfiguration von Band und Rollen im Ofen.

die speziell dort betrachtete Aufgabenstellung anwendbar. Aus diesem Grund wird im Zuge dieses Artikels eine verallgemeinerte Methode zur Herleitung der Differentialgleichung der Biegelinie auf Basis der Variationsrechnung vorgestellt, wobei die a priori unbekannten Ränder systematisch berücksichtigt werden. Darüber hinaus wird das Materialmodell um plastisches Verhalten erweitert.

In Abschnitt 2.1 erfolgt die Herleitung der Differentialgleichung der Biegelinie bei örtlich variablen Rändern für ideal-elastisches Materialverhalten. Daran anschließend wird in Abschnitt 2.2 das plastische Materialmodell eines unverformten Querschnittes vorgestellt. Dieses Modell wird in Abschnitt 2.3 um einen periodischen elastisch/plastischen Biegezyklus erweitert. Abschließend werden in Kapitel 3 Ergebnisse von Simulationsstudien gezeigt.

2 Mathematische Modellierung

2.1 Variationsrechnung bei örtlich variablen Rändern

Eine systematische Möglichkeit zur Herleitung der Differentialgleichung der Biegelinie stellt die Variationsrechnung dar [6–8]. Aufgrund der periodischen Rollenanordnung wird das Rechengebiet im Folgenden auf $x \in [0, L]$ eingeschränkt. Es wird daher ein Variationsproblem formuliert, dessen Ziel es ist, das Wirkungsfunktional

$$J(w) = \int_0^L \mathcal{L}(\underbrace{x, w, w', w''}_{\xi})\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

zu minimieren, wobei $\mathcal{L}$ die Lagrangesche Dichte beschreibt. Mit der Schreibweise $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x$ wird die partielle Ableitung nach der Ortskoordinate x bezeichnet. Unter Berücksichtigung des Auflagebereiches des Bandes kann das Integral im Funktional (1) auch in die Form

$$J(w) = \int_0^{x_1} \mathcal{L}_c(\xi)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}_u(\xi)\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{L} \mathcal{L}_c(\xi)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

mit den unbekannten Kontaktpunkten x_1 und x_2 aufgespalten werden. Dabei wurde vorausgesetzt, dass im gesamten System keine externen Momente eingeprägt werden. Die Lagrangesche Dichte $\mathcal{L}_c(\xi)$ beschreibt die Energiedichte des Teilgebietes, auf dem Umschlingung herrscht, und $\mathcal{L}_u(\xi)$ die Energiedichte im Bereich des frei durchhängenden Bandes. Wie später noch gezeigt wird, ist die formale Unterscheidung von $\mathcal{L}_c(\xi)$ und $\mathcal{L}_u(\xi)$ auf den entsprechenden Teilgebieten notwendig, obwohl diese Energiedichten gleich sind. Im Folgenden wird zugunsten einer kompakten Schreibweise auf eine Angabe der Argumente der Lagrangeschen Dichten verzichtet.

In den Bereichen $0 \leq x \leq x_1$ und $x_2 \leq x \leq L$ umschlingt das Band die Rolle, d. h. die Biegelinie $w(x)$ ist bereits durch die Rollen determiniert und folglich muss für die Variation von $\mathcal{L}_c$ in diesen Bereichen $\delta\mathcal{L}_c = 0$ gelten. Durch Anwendung der Leibnizregel erhält man die erste Variation von (2) in der Form

$$\begin{aligned} \delta J(w) &= \int_0^{x_1^-} \underbrace{\delta\mathcal{L}_c}_{=0}\,\mathrm{d}x + \int_{x_1^+}^{x_2^-} \delta\mathcal{L}_u\,\mathrm{d}x + \int_{x_2^+}^{L} \underbrace{\delta\mathcal{L}_c}_{=0}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \delta x_1\left[\mathcal{L}_c\left(x_1^-\right) - \mathcal{L}_u\left(x_1^+\right)\right] + \delta x_2\left[\mathcal{L}_u\left(x_2^-\right) - \mathcal{L}_c\left(x_2^+\right)\right] \\ &= \int_{x_1^+}^{x_2^-} \left(\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w}\delta w + \frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w'}\delta w' + \frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w''}\delta w''\right)\mathrm{d}x \\ &\quad + \delta x_1\left[\mathcal{L}_c\left(x_1^-\right) - \mathcal{L}_u\left(x_1^+\right)\right] + \delta x_2\left[\mathcal{L}_u\left(x_2^-\right) - \mathcal{L}_c\left(x_2^+\right)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Partielle Integration führt schließlich auf

$$\begin{aligned} \delta J(w) &= \int_{x_1^+}^{x_2^-} \left(\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w''}\right)\delta w\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w''}\right)\delta w + \frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w''}\delta w'\right]_{x_1^+}^{x_2^-} \\ &\quad + \delta x_1\left[\mathcal{L}_c\left(x_1^-\right) - \mathcal{L}_u\left(x_1^+\right)\right] + \delta x_2\left[\mathcal{L}_u\left(x_2^-\right) - \mathcal{L}_c\left(x_2^+\right)\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Dabei wird mit x_i^- der linksseitige und mit x_i^+ der rechtsseitige Grenzwert des entsprechenden Kontaktpunktes x_i, $i = 1, 2$, bezeichnet.

Post-print version of the article: G. Stadler, A. Steinboeck, M. Baumgart, and A. Kugi, "Modellierung des Umschlingungswinkels eines auf Rollen geführten Metallbandes", *at – Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 8, pp. 646–655, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0043

Entlang der Auflagebereiche müssen geometrische Zwangsrandbedingungen der Form

$$w(x) = \varphi_1(x), \quad w'(x) = \varphi_1'(x), \quad x \in [0, x_1] \tag{5a}$$
$$w(x) = \varphi_2(x), \quad w'(x) = \varphi_2'(x), \quad x \in [x_2, L] \tag{5b}$$

erfüllt sein. Dabei ist $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$, im Allgemeinen eine frei wählbare, hinreichend oft stetig differenzierbare Kurve. Da die Variationen an den Kontaktpunkten nicht frei, sondern nur entlang der Kurven $\varphi_i(x)$ erfolgen dürfen und $w(x)$ sowie $w'(x)$ an den Kontaktpunkten stetig verlaufen, erhält man mit (5) die Bedingungen

$$\begin{aligned}\delta(w(x_1)) = \delta(\varphi_1(x_1)) &= \varphi_1'(x_1)\,\delta x_1\\ &= \delta w(x_1) + w'(x_1)\,\delta x_1\end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned}\delta\left(w'(x_1)\right) = \delta(\varphi_1'(x_1)) &= \varphi_1''(x_1)\,\delta x_1\\ &= \delta w'(x_1) + w''(x_1^-)\,\delta x_1\end{aligned} \tag{6b}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\delta(w(x_2)) = \delta(\varphi_2(x_2)) &= \varphi_2'(x_2)\,\delta x_2\\ &= \delta w(x_2) + w'(x_2)\,\delta x_2\end{aligned} \tag{6c}$$

$$\begin{aligned}\delta(w'(x_2)) = \delta(\varphi_2'(x_2)) &= \varphi_2''(x_2)\,\delta x_2\\ &= \delta w'(x_2) + w''(x_2^+)\,\delta x_2\,.\end{aligned} \tag{6d}$$

Der links- und rechtsseitige Grenzwert x_1^- und x_2^+ in (6b) und (6d) stellt sicher, dass die Variation die geometrischen Zwangsrandbedingungen (5) erfüllt. Setzt man die Zusammenhänge aus (6) in (4) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\delta J(w) = &\int_{x_1^+}^{x_2^-}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w''}\right)\delta w\,\mathrm{d}x\\
&+ \Bigg\{\mathcal{L}_c(x_1^-) - \mathcal{L}_u(x_1^+) - \left[\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w''}\bigg|_{x_1^+}\left(\varphi_1''(x_1) - w''(x_1^-)\right)\right.\\
&+ \left.\left(\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w''}\right)\bigg|_{x_1^+}\left(\varphi_1'(x_1) - w'(x_1)\right)\right]\Bigg\}\delta x_1\\
&- \Bigg\{\mathcal{L}_c(x_2^+) - \mathcal{L}_u(x_2^-) - \left[\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w''}\bigg|_{x_2^-}\left(\varphi_2''(x_2) - w''(x_2^+)\right)\right.\\
&+ \left.\left(\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w''}\right)\bigg|_{x_2^-}\left(\varphi_2'(x_2) - w'(x_2)\right)\right]\Bigg\}\delta x_2\,.\end{aligned} \tag{7}$$

An einem stationären Punkt muss die Variation verschwinden, d. h. es gilt $\delta J(w) = 0$. Um dies zu gewährleisten, müssen das Integral und die verbleibenden Terme in (7) getrennt voneinander verschwinden. Aufgrund des Fundamentallemmas der Variationsrechnung folgt unmittelbar die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\partial\mathcal{L}_u}{\partial w''} = 0 \tag{8}$$

im Bereich $x_1 \le x \le x_2$. Da die Variationen der Kontaktpunkte δx_1 und δx_2 beliebig entlang der Rollen auftreten können, müssen die Ausdrücke in den geschwungenen Klammern in (7) jeweils Null sein.

Im speziellen Fall beschreibt $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$, die kreisrunde Geometrie einer Rolle, d. h. es gilt

$$\varphi_1''(x) = w''(x), \quad x \in (0, x_1) \tag{9a}$$
$$\varphi_2''(x) = w''(x), \quad x \in (x_2, L)\,. \tag{9b}$$

Benützt man (5) und (9), so vereinfachen sich die Ausdrücke in den geschwungenen Klammern von (7) zu

$$\mathcal{L}_c(x_1^-) - \mathcal{L}_u(x_1^+) = 0 \tag{10a}$$
$$\mathcal{L}_c(x_2^+) - \mathcal{L}_u(x_2^-) = 0\,. \tag{10b}$$

Die Lagrangesche Dichte im Bereich $x_1 \le x \le x_2$ errechnet sich unter der Annahme von linear-elastischem Materialverhalten, kleinen Bandauslenkungen $w(x)$, konstantem Bandzug n in Längsrichtung (normiert auf die Breite b) sowie der Biegesteifigkeit k_b (normiert auf die Breite b) in der Form

$$\mathcal{L}_u = -g\rho h w(x) - \frac{1}{2}k_b w''^2(x) - \frac{1}{2}n w'^2(x)\,. \tag{11}$$

Darin beschreibt der erste Term die Energie zufolge des Schwerefeldes mit der Erdbeschleunigung g, der Massendichte ρ des Bandes und dessen Dicke h. Der zweite Term beschreibt die Biegeenergie und der letzte Term den Einfluss zufolge der Rückstellwirkung des Bandzuges (virtuelle Arbeit der äußeren Kraft n), siehe [9]. Die Lagrangesche Dichte $\mathcal{L}_c$ wird ebenfalls durch den Ausdruck (11) beschrieben, wobei $w(x) = \varphi_1(x)$ bzw. $w(x) = \varphi_2(x)$ gilt. Einsetzen von (11) in (8) ergibt die Differentialgleichung

$$g\rho h - n w''(x) + k_b w''''(x) = 0\,, \quad x_1 \le x \le x_2 \tag{12}$$

für die Biegelinie $w(x)$ zwischen den Kontaktpunkten. Da $w(x)$ und $w'(x)$ an den Kontaktpunkten stetig verlaufen, vereinfacht sich (10) mit (11) unmittelbar zu

$$w''(x_i^-) = w''(x_i^+)\,, \quad i = 1, 2\,. \tag{13}$$

Die Stetigkeit von w'' an den Kontaktpunkten ist in Einklang mit der Forderung, dass das normierte Biegemoment

Post-print version of the article: G. Stadler, A. Steinboeck, M. Baumgart, and A. Kugi, “Modellierung des Umschlingungswinkels eines auf Rollen geführten Metallbandes”, *at – Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 8, pp. 646–655, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0043
The content of this post-print version is identical to the published paper but may differ from the publisher’s final version in terms of layout or copy editing.

$-k_b w''$ an den Kontaktpunkten stetig sein muss, da keine externen Momente eingeprägt werden. Zusammenfassend ergeben sich somit für die Differentialgleichung 4. Ordnung (12) sechs Randbedingungen in der Form

$$w(x_1) = \varphi_1(x_1), \qquad w(x_2) = \varphi_2(x_2) \tag{14a}$$

$$w'(x_1) = \varphi_1'(x_1), \qquad w'(x_2) = \varphi_2'(x_2) \tag{14b}$$

$$w''(x_1) = \varphi_1''(x_1), \qquad w''(x_2) = \varphi_2''(x_2)\,. \tag{14c}$$

Da die Kontaktpunkte x_1 und x_2 unbekannt sind, werden hier sechs statt vier Randbedingungen benötigt. Nach Lösung von (12) und (14) ergibt sich der Umschlingungswinkel α für $x_1 > x_2 - L$ aus der Beziehung

$$\alpha = \operatorname{asin}\left(\frac{x_1}{R}\right) - \operatorname{asin}\left(\frac{x_2 - L}{R}\right). \tag{15}$$

In diesem Abschnitt wurde die Herleitung des Problems für ideal-elastisches Materialverhalten vorgestellt. Die folgenden Abschnitte behandeln den allgemeineren, ideal-elastisch-ideal-plastischen Fall.

2.2 Materialmodell

Es wird nun der konstitutive Zusammenhang zwischen der Krümmung und dem Biegemoment mathematisch beschrieben. Dabei wird von einem anfänglich spannungsfreien und ebenen Band ausgegangen. Unter der plausiblen Annahme eines ebenen Spannungszustandes gilt für die Spannungskomponenten in z-Richtung $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$. Bei einem Rechteckquerschnitt der Höhe h und der Breite b geht die neutrale Faser bei reiner Biegebelastung (auch bei plastischer Verformung) durch den Flächenschwerpunkt, und die Spannungsverteilung ist punktsymmetrisch [10]. Da die mittlere Zugspannung n/h zufolge des Bandzuges n sehr klein gegenüber der Fließgrenze σ_F und damit auch gegenüber den auftretenden Biegespannungen ist (typische Zugspannung $n/h < 1$ MPa, typische Fließgrenze $\sigma_F > 15$ MPa), bleibt die Punktsymmetrie der Spannungsverteilung in guter Näherung erhalten. Die Verzerrung ε_{xx} in x-Richtung ergibt sich dann allgemein aus der Krümmung κ in der Form

$$\varepsilon_{xx} = -\kappa z\,, \tag{16}$$

wobei $z = 0$ die Bandmittelebene beschreibt. Für die Krümmung gilt die für $w' \ll 1$ bekannte Näherung [11]

$$\kappa = \frac{w''}{\left(1 + w'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \approx w''\,. \tag{17}$$

Weiterhin gilt im linear-elastischen Fall für $\sigma_{zz} = 0$ das Hookesche Gesetz

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\end{bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu\\ -\nu & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\end{bmatrix}. \tag{18}$$

Darin bezeichnet E den Elastizitätsmodul und ν die Querkontraktionszahl. Es wird angenommen, dass die Rollen eine Krümmung des Bandes in Breitenrichtung y verhindern und $b \gg h$ gilt, woraus $\varepsilon_{yy} = 0$ und

$$\sigma_{yy} = \nu\sigma_{xx} \tag{19}$$

folgt. Die Spannung in x-Richtung kann dann mithilfe von $\tilde{E} = E/(1-\nu^2)$ auch als

$$\sigma_{xx} = \tilde{E}\varepsilon_{xx} = -\tilde{E}z\kappa \tag{20}$$

geschrieben werden.

Zur Beschreibung des plastischen Verhaltens von Stahl ist das Fließgesetz nach von Mises geeignet [12]. Die von Mises-Vergleichsspannung σ_V ergibt sich bei ebenem Spannungszustand ohne Schubspannungen in der Form

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2} \tag{21}$$

und die Fließbedingung lautet daher

$$\sigma_V = \sigma_F\,. \tag{22}$$

Kombiniert man (19), (21) und (22), so erhält man jene extremale Spannung σ_{xx} in x-Richtung, bei der das Material zu fließen beginnt, zu

$$\pm\frac{\sigma_F}{\sqrt{\nu^2 - \nu + 1}} = \pm\tilde{\sigma}_F\,. \tag{23}$$

Während des Fließens gilt (19) nicht mehr, d. h. entsprechend der Fließregel finden sich differentielle Zusammenhänge zwischen den Verzerrungs- und Spannungskomponenten [12]. Es kann jedoch gezeigt werden, dass für die betrachteten Materialien und die Fließregel nach von Mises die Beziehung

$$|\sigma_{xx}| = \tilde{\sigma}_F \tag{24}$$

eine sehr gute Näherung für die Spannung σ_{xx} im plastischen Bereich darstellt.

Im Falle einer plastischen Biegebeanspruchung werden daher nach (20) und (24) die Bereiche

$$\frac{h}{2} \geq |z| > z_F = z_F(\kappa) = \frac{\tilde{\sigma}_F}{\tilde{E}|\kappa|} \tag{25}$$

Post-print version of the article: G. Stadler, A. Steinboeck, M. Baumgart, and A. Kugi, “Modellierung des Umschlingungswinkels eines auf Rollen geführten Metallbandes”, *at – Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 8, pp. 646–655, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0043

plastisch verformt. Die Spannungsverteilung lässt sich in weiterer Folge für ideal-elastisch-ideal-plastisches Materialverhalten für $z_F \leq h/2$ durch

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} -\tilde{E}z\kappa & \text{für } z_F \geq z \geq -z_F \\ -\tilde{\sigma}_F \operatorname{sgn}(\kappa) & \text{für } z_F < z \leq h/2 \\ \tilde{\sigma}_F \operatorname{sgn}(\kappa) & \text{für } -h/2 \leq z < -z_F \end{cases} \tag{26}$$

beschreiben. Im rein elastischen Fall ($z_F \geq h/2$) berechnet sich das auf die Breite b normierte Biegemoment $m_{b,el}$ zu

$$m_{b,el} = -2\int_0^{h/2} z^2 \tilde{E}\kappa \, \mathrm{d}z = -\frac{\tilde{E}h^3\kappa}{12} \,. \tag{27}$$

Die extremale elastische Krümmung κ_{el}, d. h. die Krümmung, bei welcher die Randfaser erstmals zu plastifizieren beginnt, ergibt sich aus (25) mit $z_F = h/2$ in der Form

$$\kappa_{el} = \pm\frac{2\tilde{\sigma}_F}{\tilde{E}h} \,. \tag{28}$$

Das extremale elastische Biegemoment m_{el} errechnet sich mit $\kappa = \kappa_{el}$ gemäß (27) zu

$$m_{el} = -\operatorname{sgn}(\kappa_{el})\frac{\tilde{\sigma}_F h^2}{6} \,. \tag{29}$$

Für den ideal-elastisch-ideal-plastischen Fall und $z_F \leq h/2$ kann das Biegemoment $m_{b,pl}$ über die Beziehung

$$\begin{aligned} m_{b,pl} &= -2\operatorname{sgn}(\kappa)\int_{z_F}^{h/2} z\tilde{\sigma}_F \, \mathrm{d}z - 2\int_0^{z_F} z^2\tilde{E}\kappa \, \mathrm{d}z \\ &= \operatorname{sgn}(\kappa)\left(\frac{\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\kappa^2} - \frac{\tilde{\sigma}_F h^2}{4}\right) \end{aligned} \tag{30}$$

bestimmt werden. Daraus resultiert für den ideal-elastisch-ideal-plastischen Fall die sogenannte Neukurve des Biegemomentes m_b in der Form

$$m_b = \begin{cases} m_{b,el} & \text{für } |\kappa| \leq |\kappa_{el}| \\ m_{b,pl} & \text{für } |\kappa| > |\kappa_{el}| \,. \end{cases} \tag{31}$$

Mit $\kappa = f(m_b)$ errechnet sich die Umkehrfunktion von (31) zu

$$\kappa = \begin{cases} -\frac{2\operatorname{sgn}(m_b)\sqrt{\tilde{\sigma}_F}\tilde{\sigma}_F}{\sqrt{3}\tilde{E}\sqrt{\tilde{\sigma}_F h^2 - 4|m_b|}} & \text{für } |m_b| > |m_{el}| \\ -\frac{12 m_b}{\tilde{E}h^3} & \text{für } |m_b| \leq |m_{el}| \,. \end{cases} \tag{32}$$

2.3 Periodischer Biegezyklus

Ein Bandquerschnitt erfährt beim Transport durch den Ofen periodische Krümmungsänderungen. Bei elastisch/plastischem Materialverhalten ist das Konstitutivgesetz sowohl von der Richtung der Krümmungsänderung

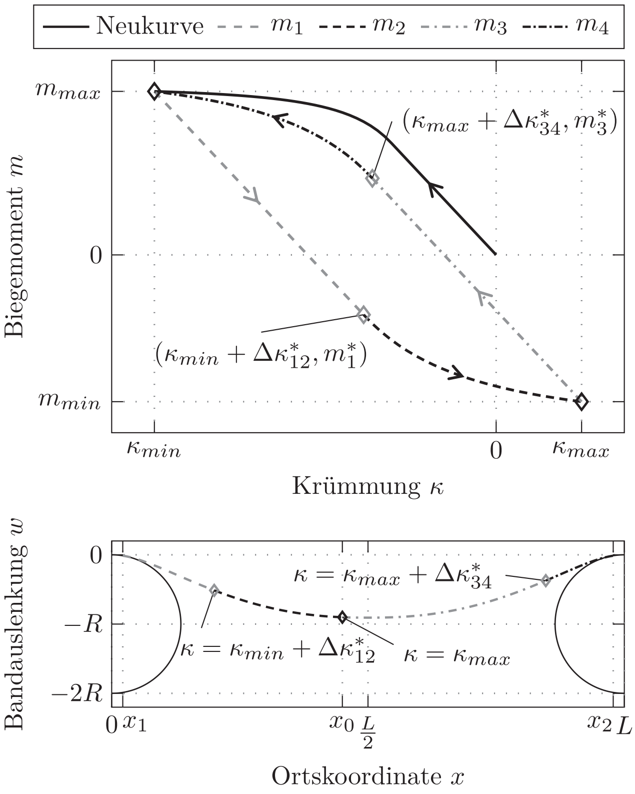


Abbildung 2: Biegemoment-Krümmungs-Kennlinie eines periodischen Biegezyklus mit eingezeichneter Durchlaufrichtung (oben) und zugehörige Biegelinie (unten).

als auch von den vergangenen Verformungszuständen, kurz der Biegehistorie, abhängig. D. h. der Zusammenhang zwischen Biegemoment und Krümmung ist, im Gegensatz zu Abschnitt 2.2, nun in Form einer Hysterese gegeben, wobei im Allgemeinen keine Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs besteht. Im Folgenden wird daher das Konstitutivgesetz für eine periodische plastische Biegeverformung erweitert. Da von einer quasistatischen Biegelinie ausgegangen wird, durchläuft jeder Querschnitt dieselbe Biegelinie und erfährt dieselben Krümmungsänderungen.

Bevor die konkrete Herleitung des Konstitutivgesetzes erfolgt, soll dessen Form anhand der in Abbildung 2 dargestellten Biegemoment-Krümmungs-Kennlinie und einer typischen Biegelinie veranschaulicht werden. Die Erklärung der dort gezeigten Variablen erfolgt im Verlauf dieses Abschnittes. Ausgehend vom Punkt $(0, 0)$, d. h. vom spannungslosen Zustand, wird die Neukurve gemäß (31) bzw. (32) bis zum Punkt (κ_{min}, m_{max}) durchlaufen. Dabei ist die minimale Krümmung $\kappa_{min} = -1/R$ aufgrund der Umschlingung an der Rolle stets durch die Krümmung der Rolle vorgegeben. Fälle mit reiner Punktberührung, d. h. $\kappa_{min} > -1/R$, werden hier nicht betrachtet. Der an-

Post-print version of the article: G. Stadler, A. Steinboeck, M. Baumgart, and A. Kugi, “Modellierung des Umschlingungswinkels eines auf Rollen geführten Metallbandes”, *at – Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 8, pp. 646–655, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0043

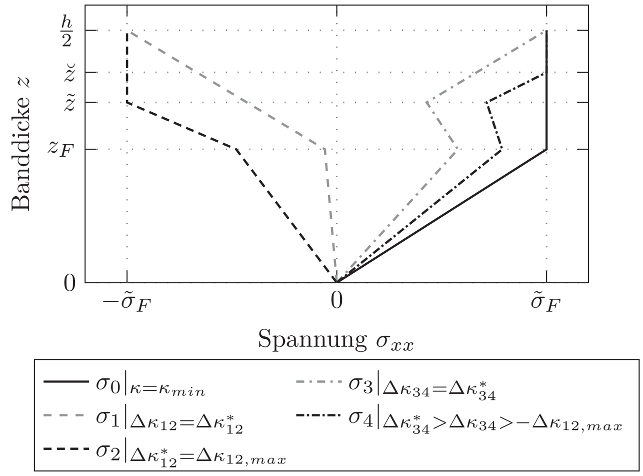


Abbildung 3: Spannungsverteilungen in einem periodischen Biegezyklus.

schließende Verlauf der Hysterese wird in vier Abschnitte unterteilt, die mit $i = 1, \ldots, 4$ gekennzeichnet werden. Die Größen an den Übergängen von den elastischen in die plastischen Bereiche werden mit dem Symbol $*$ versehen. Im ersten Abschnitt (m_1) erfolgt eine linear elastische Belastungsänderung bis zur Plastifizierung in Gegenrichtung beim Punkt $(\kappa_{min} + \Delta\kappa_{12}^*, m_1^*)$. Die weitere plastische Belastungsänderung im Abschnitt (m_2) findet bis zum Punkt (κ_{max}, m_{min}) statt. Danach gibt es wiederum einen linear elastischen Abschnitt (m_3) bis zum Punkt $(\kappa_{max} + \Delta\kappa_{34}^*, m_3^*)$. Nach der abschließenden plastischen Belastungsänderung im Abschnitt (m_4) wird wieder der Ausgangspunkt (κ_{min}, m_{max}) erreicht.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden im Folgenden Spannungsverläufe nur im Bereich $z \geq 0$ betrachtet und dargestellt, was aufgrund der Punktsymmetrie der Spannungsverteilung keine Einschränkung darstellt. Am Ende der Neukurve (κ_{min}, m_{max}) ergibt sich für $z_F \leq h/2$ die Spannungsverteilung $\sigma_0 = \sigma_{xx}|_{\kappa=\kappa_{min}}$, vgl. (26), welche u. a. in Abbildung 3 dargestellt ist. Diese Abb. zeigt ausgewählte Spannungsverteilungen während eines periodischen Biegezyklus. Nach Durchlaufen der Neukurve erfolgt zunächst eine linear elastische Belastungsänderung (Krümmungssteigerung). Bis zur Plastifizierung der Randfaser in Gegenrichtung am Punkt $(\kappa_{min} + \Delta\kappa_{12}^*, m_1^*)$ gilt

$$\sigma_1 = \begin{cases} -\tilde{E}z(\kappa_{min} + \Delta\kappa_{12}) & \text{für } 0 \leq z \leq z_F \\ \tilde{\sigma}_F - \tilde{E}z\Delta\kappa_{12} & \text{für } z_F < z \leq h/2\,, \end{cases} \tag{33}$$

wobei $\Delta\kappa_{12} > 0$ die Krümmungsänderung bezüglich κ_{min} beschreibt, d. h. $\kappa = \kappa_{min} + \Delta\kappa_{12}$. Aus der Bedingung $\tilde{\sigma}_F - \tilde{E}\Delta\kappa_{12}^* h/2 = -\tilde{\sigma}_F$ erhält man die maximale elastische Krümmungsänderung $\Delta\kappa_{12}^*$, bis zu welcher (33) gültig ist, zu

$$\Delta\kappa_{12}^* = \frac{4\tilde{\sigma}_F}{\tilde{E}h}\,. \tag{34}$$

Bei weiterer Krümmungsänderung erfolgt anschließend eine plastische Verformung. In diesem Abschnitt sei nun $h/2 \geq |z| > \tilde{z}$ mit

$$\tilde{z} = \tilde{z}(\Delta\kappa_{12}) = \frac{2\tilde{\sigma}_F}{\tilde{E}\Delta\kappa_{12}} \tag{35}$$

der neuerlich plastifizierte Dickenabschnitt/Bereich. Für die zugehörige Spannungsverteilung gilt demnach

$$\sigma_2 = \begin{cases} -\tilde{E}z(\kappa_{min} + \Delta\kappa_{12}) & \text{für } 0 \leq z \leq z_F \\ \tilde{\sigma}_F - \tilde{E}z\Delta\kappa_{12} & \text{für } z_F < z \leq \tilde{z} \\ -\tilde{\sigma}_F & \text{für } \tilde{z} < z \leq h/2\,. \end{cases} \tag{36}$$

Man beachte den zusätzlichen Knick der Spannungsverteilung bei $\tilde{z}$. Die Gültigkeit von (36) ist für $\tilde{z} \geq z_F$ gegeben, was äquivalent zu $\Delta\kappa_{12} \leq 2\,|\kappa_{min}|$ ist. Die plastische Belastung in (36) wird bei der Krümmung

$$\kappa_{max} = \kappa_{min} + \Delta\kappa_{12,max} \tag{37}$$

beendet, wobei wegen $\Delta\kappa_{12} \leq 2\,|\kappa_{min}|$ die Bedingung $|\kappa_{max}| \leq |\kappa_{min}|$ erfüllt sein muss. In (37) bezeichnet $\Delta\kappa_{12,max}$ die maximale Krümmungsänderung ausgehend von κ_{min}, ehe erneut eine Belastungsumkehr eintritt. In weiterer Folge tritt eine linear elastische Belastungsänderung auf, womit sich die Spannungsverteilung wie folgt darstellen lässt

$$\sigma_3 = \begin{cases} -\tilde{E}z(\kappa_{max} + \Delta\kappa_{34}) & \text{für } 0 \leq z \leq z_F \\ \tilde{\sigma}_F - \tilde{E}z(\Delta\kappa_{12,max} + \Delta\kappa_{34}) & \text{für } z_F < z \leq \tilde{z} \\ -\tilde{\sigma}_F - \tilde{E}z\Delta\kappa_{34} & \text{für } \tilde{z} < z \leq h/2\,. \end{cases} \tag{38}$$

Hier bezeichnet $\Delta\kappa_{34} < 0$ die Krümmungsänderung bezüglich κ_{max}, d. h. $\kappa = \kappa_{max} + \Delta\kappa_{34}$. Die Krümmungsänderung $\Delta\kappa_{34}^*$, bis zu welcher linear elastisches Materialverhalten vorliegt, errechnet sich aus der Bedingung $-\tilde{\sigma}_F - \tilde{E}\Delta\kappa_{34}^* h/2 = \tilde{\sigma}_F$ in der Form

$$\Delta\kappa_{34}^* = -\frac{4\tilde{\sigma}_F}{\tilde{E}h}\,. \tag{39}$$

Wird anschließend die Krümmungsänderung in diese Richtung fortgesetzt, so werden die Dickenbereiche $h/2 \geq |z| \geq \breve{z}$ mit

$$\breve{z} = \breve{z}(\Delta\kappa_{34}) = -\frac{2\tilde{\sigma}_F}{\tilde{E}\Delta\kappa_{34}} \tag{40}$$

Post-print version of the article: G. Stadler, A. Steinboeck, M. Baumgart, and A. Kugi, "Modellierung des Umschlingungswinkels eines auf Rollen geführten Metallbandes", *at – Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 8, pp. 646–655, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0043

erneut plastisch verformt. Die zugehörige Spannungsverteilung lautet

$$\sigma_4 = \begin{cases} -\tilde{E}z(\kappa_{max} + \Delta\kappa_{34}) & \text{für } 0 \le z \le z_F \\ \tilde{\sigma}_F - \tilde{E}z(\Delta\kappa_{12,max} + \Delta\kappa_{34}) & \text{für } z_F < z \le \tilde{z} \\ -\tilde{\sigma}_F - \tilde{E}z\Delta\kappa_{34} & \text{für } \tilde{z} < z \le \breve{z} \\ \tilde{\sigma}_F & \text{für } \breve{z} < z \le h/2\,. \end{cases} \tag{41}$$

Die Spannungsverteilung (41) entspricht bei der Krümmungsänderung $\Delta\kappa_{34} = -\Delta\kappa_{12,max}$, d. h. $\kappa = \kappa_{min}$, der Spannungsverteilung σ_0 am Ende der Neukurve.

Um die Momentenverläufe der Spannungsverteilungen $\sigma_i, i = 1, \ldots, 4$, zu bestimmen, muss einfach

$$m_i = 2\int_0^{h/2} z\sigma_i \,\mathrm{d}z\,, \qquad i = 1, \ldots, 4 \tag{42}$$

ausgewertet werden. Mit (33), (36), (38) und (41) liefert dies

$$m_1 = \frac{\tilde{\sigma}_F h^2}{4} - \frac{\tilde{E}h^3\Delta\kappa_{12}}{12} - \frac{\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\kappa_{min}^2} \tag{43a}$$

$$m_2 = \frac{8\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\Delta\kappa_{12}^2} - \frac{\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\kappa_{min}^2} - \frac{\tilde{\sigma}_F h^2}{4} \tag{43b}$$

$$m_3 = \frac{8\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\Delta\kappa_{12,max}^2} - \frac{\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\kappa_{min}^2} - \frac{\tilde{\sigma}_F h^2}{4} - \frac{\tilde{E}h^3\Delta\kappa_{34}}{12} \tag{43c}$$

$$m_4 = \frac{\tilde{\sigma}_F h^2}{4} + \frac{8\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\Delta\kappa_{12,max}^2} - \frac{8\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\Delta\kappa_{34}^2} - \frac{\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\kappa_{min}^2}\,. \tag{43d}$$

Die extremalen Momente errechnen sich zu

$$m_{max} = \frac{\tilde{\sigma}_F h^2}{4} - \frac{\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\kappa_{min}^2} \tag{44a}$$

$$m_{min} = \frac{8\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\Delta\kappa_{12,max}^2} - \frac{\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\kappa_{min}^2} - \frac{\tilde{\sigma}_F h^2}{4}\,. \tag{44b}$$

Zusammenfassend lässt sich das Biegemoment im periodischen Fall für ein in positiver x-Richtung bewegtes Band durch

$$m_b = \begin{cases} m_1 & \text{für } \kappa_{min} \le \kappa \le \kappa_{min} + \Delta\kappa_{12}^*,\ \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}x} \ge 0 \\ m_2 & \text{für } \kappa_{min} + \Delta\kappa_{12}^* < \kappa \le \kappa_{max},\ \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}x} \ge 0 \\ m_3 & \text{für } \kappa_{max} + \Delta\kappa_{34}^* \le \kappa \le \kappa_{max},\ \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}x} < 0 \\ m_4 & \text{für } \kappa_{min} \le \kappa < \kappa_{max} + \Delta\kappa_{34}^*,\ \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}x} < 0 \end{cases} \tag{45}$$

darstellen. Die Krümmungen κ_i in den Abschnitten $i = 1, \ldots, 4$ berechnen sich mithilfe der Abkürzungen

$$\chi_1 = 3h^2\tilde{\sigma}_F + 12m_b \tag{46a}$$

$$\chi_2 = \Delta\kappa_{12,max}^2\left(3h^2\tilde{\sigma}_F - 12m_b\right)\tilde{E}^2 + 32\tilde{\sigma}_F^3 \tag{46b}$$

zu

$$\kappa_1 = \frac{\kappa_{min}^2\left(3h^2\tilde{\sigma}_F - 12m_b\right)\tilde{E}^2 - 4\tilde{\sigma}_F^3}{\kappa_{min}^2 h^3\tilde{E}^3} + \kappa_{min} \tag{47a}$$

$$\kappa_2 = -\frac{4\sqrt{2\tilde{\sigma}_F}\kappa_{min}\tilde{\sigma}_F}{\sqrt{\kappa_{min}^2\chi_1\tilde{E}^2 + 4\tilde{\sigma}_F^3}} + \kappa_{min} \tag{47b}$$

$$\kappa_3 = -\frac{\chi_1}{h^3\tilde{E}} - \frac{\tilde{\sigma}_F^3(4\Delta\kappa_{12,max}^2 - 32\kappa_{min}^2)}{\kappa_{min}^2\Delta\kappa_{12,max}^2 h^3\tilde{E}^3} + \kappa_{max} \tag{47c}$$

$$\kappa_4 = \frac{4\tilde{\sigma}_F\sqrt{2\tilde{\sigma}_F}\kappa_{min}\Delta\kappa_{12,max}}{\sqrt{\kappa_{min}^2\chi_2 - 4\Delta\kappa_{12,max}^2\tilde{\sigma}_F^3}} + \kappa_{max}\,. \tag{47d}$$

Der Krümmungsverlauf kann folglich als Umkehrfunktion des Biegemomentes m_b in der Form

$$\kappa = f(m_b) = \begin{cases} \kappa_1 & \text{für } m_1^* \le m_b \le m_{max},\ \frac{\mathrm{d}m_b}{\mathrm{d}x} \le 0 \\ \kappa_2 & \text{für } m_{min} \le m_b < m_1^*,\ \frac{\mathrm{d}m_b}{\mathrm{d}x} \le 0 \\ \kappa_3 & \text{für } m_{min} \le m_b \le m_3^*,\ \frac{\mathrm{d}m_b}{\mathrm{d}x} > 0 \\ \kappa_4 & \text{für } m_3^* < m_b \le m_{max},\ \frac{\mathrm{d}m_b}{\mathrm{d}x} > 0 \end{cases} \tag{48}$$

mit

$$m_1^* = -\frac{\tilde{\sigma}_F h^2}{12} - \frac{\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\kappa_{min}^2} \tag{49a}$$

$$m_3^* = \frac{8\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\Delta\kappa_{12,max}^2} - \frac{\tilde{\sigma}_F^3}{3\tilde{E}^2\kappa_{min}^2} + \frac{\tilde{\sigma}_F h^2}{12} \tag{49b}$$

angegeben werden.

Die Differentialgleichung (12) gilt für linear elastisches Materialverhalten. Im ideal-elastisch-ideal-plastischen Fall behält diese ihre Form bei. Es muss lediglich das Konstitutivgesetz $m_b(w'')$ mit m_b gemäß (45) statt dem rein elastischen Biegemoment $-k_b w''$ in (12) eingesetzt werden. Man erhält

$$g\rho h - nw'' - \left(m_b(w'')\right)'' = 0\,. \tag{50}$$

Um einen gewöhnlichen Randwertlöser verwenden zu können, wird die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\kappa_{max} = 0 \tag{51}$$

für die konstante, aber unbekannte Krümmung κ_{max} angesetzt. Führt man den Zustandsvektor $\vec{x}$ mit der auf die Breite b normierten Querkraft q in der Form

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} w & w' & q & m_b & \kappa_{max} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{52}$$

Post-print version of the article: G. Stadler, A. Steinboeck, M. Baumgart, and A. Kugi, "Modellierung des Umschlingungswinkels eines auf Rollen geführten Metallbandes", *at – Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 8, pp. 646–655, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0043
The content of this post-print version is identical to the published paper but may differ from the publisher's final version in terms of layout or copy editing.

ein und benützt $m_b' = q$, so lässt sich (50) auch als Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} w \\ w' \\ m_b \\ q \\ \kappa_{max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w' \\ f(m_b) \\ q \\ g\rho h - n f(m_b) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{53}$$

darstellen. Die minimale Krümmung $\kappa_{min} = -1/R$ tritt in den Auflagebereichen $[0, x_1]$ und $[x_2, L]$ auf. Daraus folgt, dass auch das Biegemoment m_b in diesen Auflagebereichen extremal ist und sich gemäß (44a) berechnet. A priori ist nicht bekannt, an welchem Ort $x_0 \in [x_1, x_2]$ die maximale Krümmung κ_{max} auftritt. Zur Bestimmung des Ortes x_0 macht man sich zunutze, dass bei x_0 mit κ_{max} auch m_b extremal sein muss, d. h. es gilt $m_b'(x_0) = q(x_0) = 0$. Somit lauten die Randbedingungen des Mehrpunktrandwertproblems der periodisch fortgesetzten Biegelinie mit den unbekannten Orten x_0, x_1 und x_2

$$w(x_1) = \varphi_1(x_1), \qquad w(x_2) = \varphi_2(x_2) \tag{54a}$$
$$w'(x_1) = \varphi_1'(x_1), \qquad w'(x_2) = \varphi_2'(x_2) \tag{54b}$$
$$m_b(x_1) = m_{max}, \qquad m_b(x_2) = m_{max} \tag{54c}$$
$$w\left(x_0^-\right) = w\left(x_0^+\right), \qquad w'\left(x_0^-\right) = w'\left(x_0^+\right) \tag{54d}$$
$$q\left(x_0^-\right) = q\left(x_0^+\right), \qquad m_b\left(x_0^-\right) = m_b\left(x_0^+\right) \tag{54e}$$
$$\kappa_{max} = f(m_b)\big|_{x=x_0}, \qquad \kappa_{max}\left(x_0^-\right) = \kappa_{max}\left(x_0^+\right) \tag{54f}$$
$$m_b'(x_0) = q(x_0) = 0\,. \tag{54g}$$

Für die Rollenoberflächen gelten die geometrischen Zusammenhänge

$$\varphi_1(x) = -R + \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \le x \le R \tag{55a}$$
$$\varphi_2(x) = -R + \sqrt{R^2 - (x-L)^2}, \quad -R \le x - L \le R\,. \tag{55b}$$

Bei der Lösung des durch (53) und (54) gegebenen Randwertproblems müssen die Orte x_0, x_1 und x_2 bestimmt werden. Eine Möglichkeit besteht darin, x_1 und x_2 direkt aus (54b) sowie x_0 über eine Iteration der Form

$$x_0 \longleftarrow q^{-1}(0) \tag{56a}$$
$$x_1 \longleftarrow -\frac{Rw'(x_1)}{\sqrt{1 + w'^2(x_1)}} \tag{56b}$$
$$x_2 \longleftarrow -\frac{Rw'(x_2)}{\sqrt{1 + w'^2(x_2)}} + L \tag{56c}$$

zu berechnen. Darin bezeichnet q^{-1} die inverse Abbildung von q. Das Randwertproblem wird nun solange mit den aktuellen Werten für x_0, x_1 und x_2 gelöst, bis die betragliche Änderung dieser Orte kleiner einer vorgegebenen Genauigkeitstoleranz ist.

3 Numerische Ergebnisse

Es folgen nun numerische Simulationen mit den Parametern aus Tabelle 1. Diese stammen von einem industriellen Ofen, welcher bei erhöhten Temperaturen betrieben wird. In Abbildung 4 und Abbildung 5 ist der Umschlingungswinkel α in Abhängigkeit der Banddicke h und des spezifischen Bandzuges n für zwei verschiedene Fließgren-

Tabelle 1: Parameter für die Simulationen.

Beschreibung	Parameter	Wert	Einheit
Dichte	ρ	7850	kg m^{-3}
Elastizitätsmodul	E	70	kN mm^{-2}
Erdbeschleunigung	g	9.81	m s^{-2}
Rollenabstand	L	2	m
Rollenradius	R	250	mm
Querkontraktionszahl	ν	0.3	–

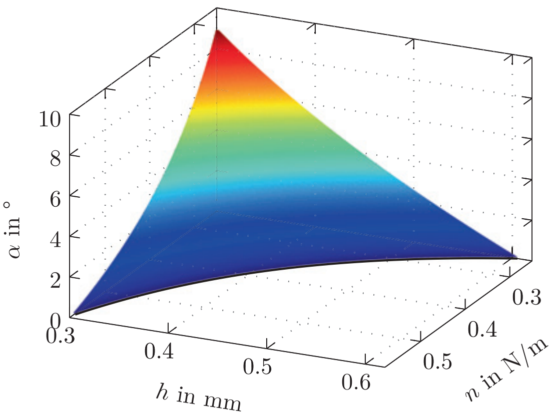


Abbildung 4: Umschlingungswinkel α für $\sigma_F = 15$ MPa.

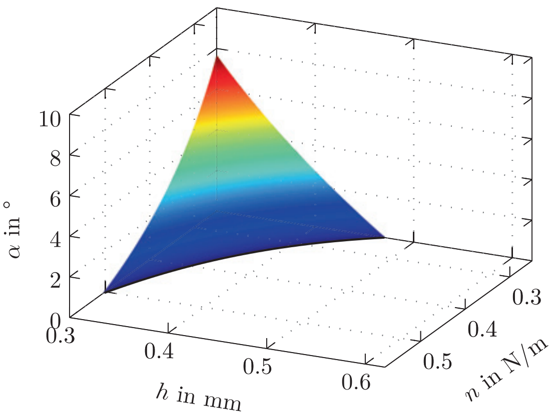


Abbildung 5: Umschlingungswinkel α für $\sigma_F = 20$ MPa.

Post-print version of the article: G. Stadler, A. Steinboeck, M. Baumgart, and A. Kugi, "Modellierung des Umschlingungswinkels eines auf Rollen geführten Metallbandes", *at – Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 8, pp. 646–655, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0043
The content of this post-print version is identical to the published paper but may differ from the publisher's final version in terms of layout or copy editing.

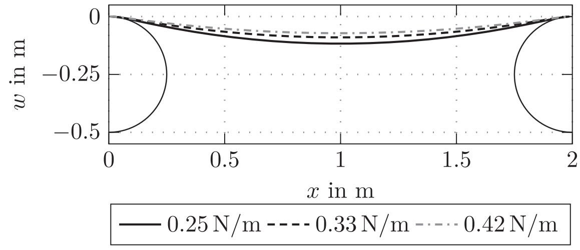


Abbildung 6: Bandauslenkung in Abhängigkeit des spezifischen Bandzuges n. Verwendete Parameter: $h = 0.3$ mm, $\sigma_F = 15$ MPa.

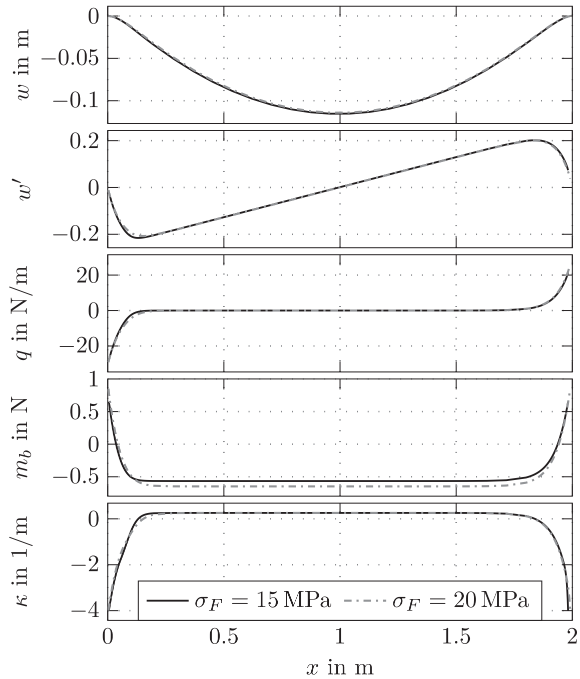


Abbildung 7: Zustandsgrößen während eines periodischen Biegezyklus. Verwendete Parameter: $h = 0.4$ mm, $n = 0.25\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.

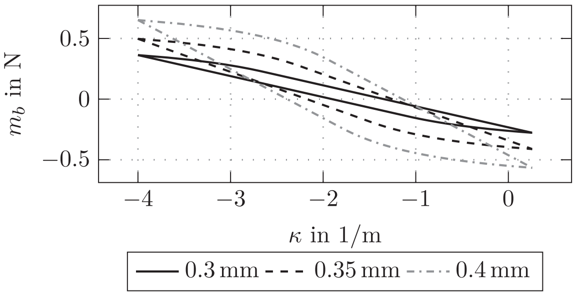


Abbildung 8: Biegemoment-Krümmungs-Kennlinie in Abhängigkeit der Banddicke h. Verwendete Parameter: $n = 0.25\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, $\sigma_F = 15$ MPa.

zen σ_F dargestellt. Es zeigt sich, dass α mit steigendem σ_F sinkt. Generell gilt, dass α mit sinkender Banddicke bzw. sinkendem spezifischen Bandzug zunimmt. Abbildung 6 zeigt die Biegelinie für verschiedene Bandzüge. Die größte Bandauslenkung tritt dabei für geringe Bandzüge auf. Der örtliche Verlauf aller Zustandsgrößen im Bereich $x_1 < x < x_2$ ist für zwei verschiedene Fließgrenzen in Abbildung 7 dargestellt. In der Nähe der Ränder können aufgrund des plastischen Materialverhaltens im Gegensatz zur rein elastischen Lösung Asymmetrien bezüglich der zwei Rollen beobachtet werden. Dies trifft insbesondere auf den Momenten- und damit auch den Krümmungsverlauf zu. Die Änderungen der Fließgrenze machen sich nahezu ausschließlich beim Moment bzw. der Krümmung bemerkbar. Eine Schätzung der Fließgrenze aus der Bandauslenkung ist damit nur schwer möglich. Abbildung 8 veranschaulicht die Biegemoment-Krümmungs-Kennlinie für verschiedene Banddicken. Die extremalen Krümmungen ändern sich nur unwesentlich, jedoch stellen sich mit steigender Banddicke zunehmend höhere Biegemomente ein.

4 Erkenntnisse

Die wesentlichen Erkenntnisse dieser Arbeit sind wie folgt:

- Die Umschlingung nimmt mit sinkender Banddicke, sinkendem Bandzug oder sinkender Fließgrenze jeweils zu.
- Kleinere Bandzüge führen zu größerer Bandauslenkung.
- Die Höhe der Hysteresekurve der Biegemoment-Krümmungs-Kennlinie steigt mit zunehmender Banddicke.
- Eine Schätzung der Fließgrenze aus der Bandauslenkung ist kaum möglich.

Danksagung: Wir danken für die finanzielle Unterstützung seitens des Bundesministeriums für Wissenschaft, Forschung und Wirtschaft, der Nationalstiftung für Forschung, Technologie und Entwicklung. Der zweite Autor dankt der Österreichischen Akademie der Wissenschaften für die finanzielle Unterstützung in Form eines APART-Stipendiums am Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien.

Literatur

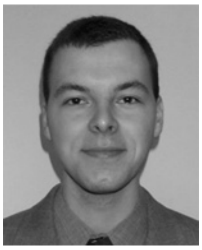
1. W. A. Egli, P. Sere, S. Bruno, und H. A. Lazzarino. Corrosion of conductor rolls in an electrogalvanizing line. *Procedia Materials Science*, 1:235–242, 2012. 11th International Congress on Metallurgy & Materials SAM/CONAMET 2011.

2. T. Fujiwara, T. Kanamaru, und M. Nakayama. Mechanism of roll coating molten zinc onto steel strip. *Journal of the Surface Finishing Society of Japan*, 46(11):1060–1065, 1995.
3. H. Kuroda, Y. Fukuoka, H. Naemura, und T. Shihomura. Apparatus for cooling steel strips to effect continuous annealing, 1983. URL http://www.google.com.tr/patents/US4422623. US Patent 4,422,623.
4. R.-F. Fung und C.-C. Chen. Free and forced vibration of a cantilver beam contacting with a rigid cylindrical foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 202:161–185, 1997.
5. R.-F. Fung und W.-H. Cheng. Dynamic analysis of a non-conservative band-wheel system with a moving boundary part 1: Mathematical modelling. *Applied Mathematical Modelling*, 33:2663–2673, 2008/2009.
6. I. M. Gelfand und S. V. Fomin. *Calculus of Variations*. Dover Publications, 2000.
7. D. G. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley & Sons, 1998.
8. H. Sagan. *Introduction to the Calculus of Variations*. Dover Publications, 1992.
9. A. Steinboeck, M. Baumgart, G. Stadler, M. Saxinger, und A. Kugi. Dynamical models of axially moving rods with tensile and bending stiffness. In *Proceedings of the 8th Vienna Conference on Mathematical Modelling, Vienna, Austria*, pages 614–619, February 2015.
10. D. Gross, W. Hauger, und P. Wriggers. *Technische Mechanik 4*. Springer, 2007.
11. S. Krenk. *Mechanics and Analysis of Beams, Columns and Cables*. Springer, 2001.
12. R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, 1950.

Autoreninformationen

Dipl.-Ing. Georg Stadler
Christian Doppler Labor für modellbasierte Prozessregelung in der Stahlindustrie, Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Gußhausstr. 27–29, 1040 Wien, Tel: +43(0)158801-37601
stadler@acin.tuwien.ac.at

Georg Stadler beschäftigt sich mit dem modellbasierten Reglerentwurf für spezielle Prozesse in der Stahlindustrie.



Dipl.-Ing. Dr.techn. Andreas Steinboeck
Technische Universiät Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Gußhausstr. 27–29, 1040 Wien, Tel: +43(0)158801-37601
andreas.steinboeck@tuwien.ac.at

Andreas Steinboeck ist APART Stipendiat der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. Hauptarbeitsgebiete: Numerische Methoden, mechanische Strukturen, Stabilitätsanalyse, Modellierung, Identifikation, Optimierung und Regelung von nichtlinearen dynamischen Systemen sowie Anwendungen bei kontinuierlichen Produktionsprozessen und in der Walzwerks- und Stahlindustrie.

Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Baumgart
Christian Doppler Labor für modellbasierte Prozessregelung in der Stahlindustrie, Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Gußhausstr. 27–29, 1040 Wien, Tel: +43(0)158801-37601
baumgart@acin.tuwien.ac.at

Michael Baumgart beschäftigt sich mit dem modellbasierten Reglerentwurf für spezielle Prozesse in der Stahlindustrie.

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Andreas Kugi
Christian Doppler Labor für modellbasierte Prozessregelung in der Stahlindustrie, Technische Universität Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Gußhausstr. 27–29, 1040 Wien, Tel: +43(0)158801-37601
kugi@acin.tuwien.ac.at

Andreas Kugi ist Vorstand des Instituts für Automatisierungs- und Regelungstechnik an der TU Wien. Seine Forschungsgebiete umfassen die physikalisch basierte Modellierung und Regelung von (nichtlinearen) mechatronischen Systemen, differentialgeometrische und optimierungsbasierte Methoden der nichtlinearen Regelungstechnik sowie die Regelung von Systemen mit verteilten Parametern. Er ist an einer Vielzahl von Industrieprojekten beteiligt, im Speziellen im Bereich der Automatisierung im Stahlbereich. Prof. Kugi ist Editor-in Chief des IFAC Journals Control Engineering Practice und wirkliches Mitglied der österreichischen Akademie der Wissenschaften.

Post-print version of the article: G. Stadler, A. Steinboeck, M. Baumgart, and A. Kugi, "Modellierung des Umschlingungswinkels eines auf Rollen geführten Metallbandes", *at – Automatisierungstechnik*, vol. 63, no. 8, pp. 646–655, 2015. DOI: 10.1515/auto-2015-0043
The content of this post-print version is identical to the published paper but may differ from the publisher's final version in terms of layout or copy editing.