Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierungstechnik
am 04.04.2008

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	11	10	11	8	40
erreichte Punkte					

Bearbeitungshinweise:

- Bitte Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt eintragen.
- Für jede Aufgabe eine neue Seite beginnen.
- Auf jedem Blatt den Namen, sowie die Matrikelnummer angeben.
- Begründen Sie Ihre Antworten ausführlich!

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

   a) Gegeben ist das folgende nichtlineare zeitkontinuierliche System:

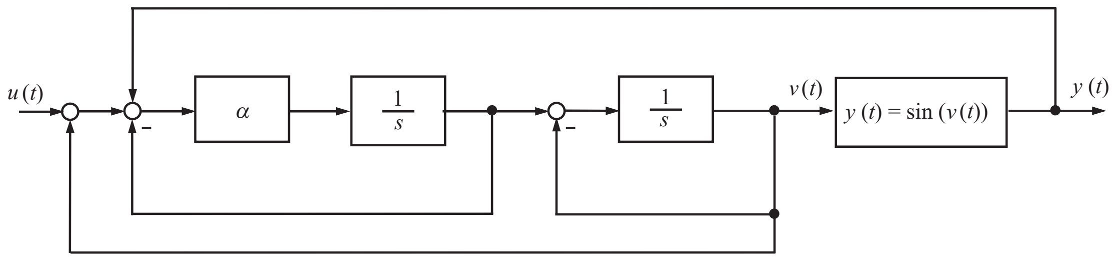

Abbildung 1: Nichtlineares System.

      i) Wählen Sie geeignete Zustandsgrößen $\mathbf{x}$ und erstellen Sie das nichtlineare Zustandsmodell im Zeitbereich in der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)\\ y &= g(\mathbf{x}, u)\end{aligned}$$

      ii) Bestimmen Sie alle Ruhelagen für $u = 0$.

      iii) Linearisieren Sie das Zustandsmodell um die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $u = 0$ und überprüfen Sie an Hand des linearen Modells die Stabilität der Ruhelage in Abhängigkeit des Parameters α.

   b) Gegeben ist das lineare zeitdiskrete System

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u_k \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

      i) Ist es möglich eine Stellfolge u_k so anzugeben, dass $\mathbf{x}_{k=2}^T = [x_{1,2}, x_{2,2}] = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$? Wenn ja, geben Sie eine an.

      ii) Ist es möglich eine Stellfolge u_k so anzugeben, dass $\mathbf{x}_{k=2}^T = [x_{1,2}, x_{2,2}] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$? Wenn ja, geben Sie eine an.

      iii) Nehmen Sie an, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Zeichnen Sie in die untenstehende Abbildung die Untermenge aller von diesem Anfangszustand aus erreichbaren Zustände ein.

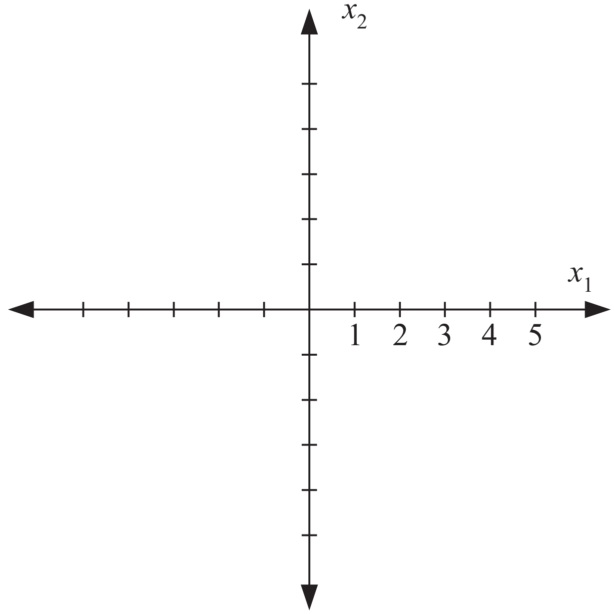

Abbildung 2: Untermenge aller erreichbaren Zustände.

2. Gegeben ist eine Strecke $G(s)$ mit dem im folgenden Bode-Diagramm dargestellten Übertragungsverhalten.

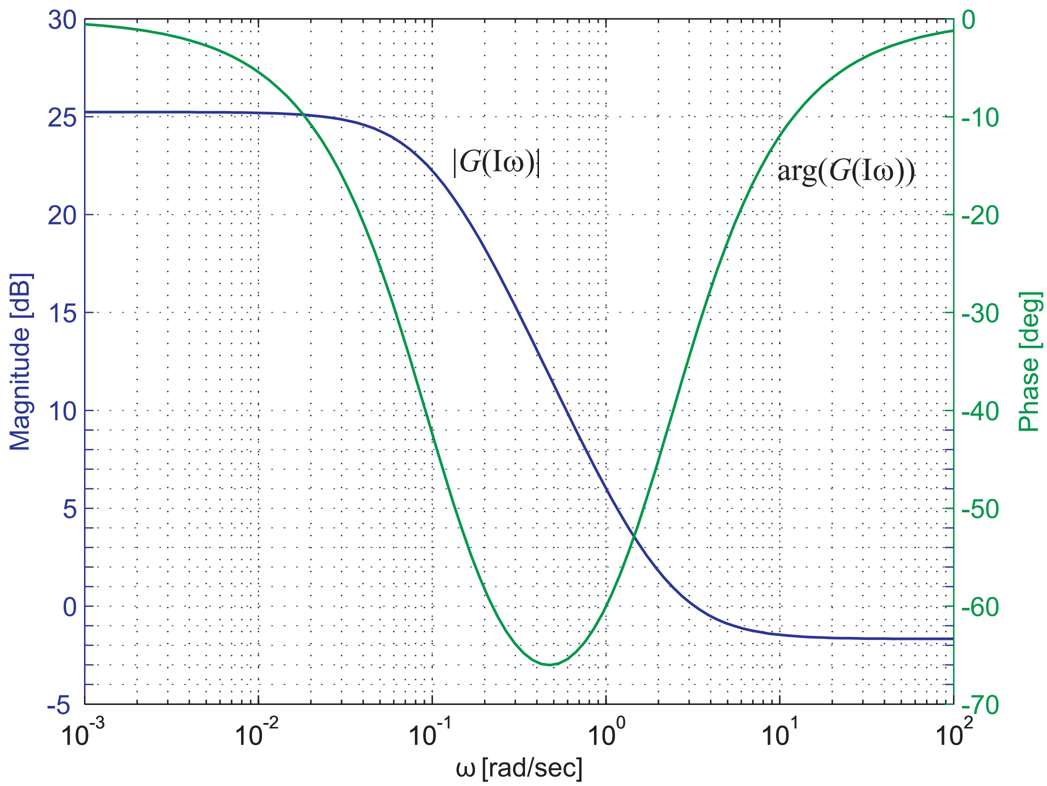

Abbildung 3: Bode-Diagramm von $G(s)$.

a) Entwerfen Sie für die Strecke $G(s)$ mit dem Frequenzkennlinienverfahren einen Regler $R(s)$ mit dem der geschlossene Regelkreis folgende Kenngrößen erfüllt:

- Anstiegszeit $t_r = 1.5\,\mathrm{s}$
- Prozentuelles Überschwingen ü= 10%
- Bleibende Regelabweichung $e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t)|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$

Wählen Sie dazu aus den folgenden Vorschlägen

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{V_I}{s}(1+sT_I) \\ R(s) &= V_P(1+sT_D) \end{aligned}$$

einen geeigneten Regler $R(s)$.

Betrachten Sie für die folgenden Teilaufgaben den offenen Regelkreis

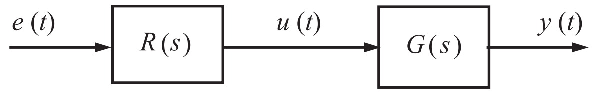

Abbildung 4: Offener Regelkreis.

mit der Strecke $G(s)$ aus Aufgabenteil a).

b) Gegeben sei ein Regler der Form

$$R(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1} \ .$$

   i) Bestimmen Sie für einen rampenförmigen Verlauf des Regelfehlers $e(t) = t\sigma(t)$ die stationäre Lösung

      - der Stellgröße $u_\infty = \lim\limits_{t \to \infty} u(t)$ und
      - der Ausgangsgröße $y_\infty = \lim\limits_{t \to \infty} y(t)$.

   ii) Berechnen Sie für einen harmonischen Verlauf des Regelfehlers $e(t) = 5\sin(t)$ die eingeschwungene Lösung von $u(t)$ und $y(t)$.

c) Für den offenen Regelkreis mit der Strecke $G(s)$ aus Aufgabenteil a) und einem allgemeinen Regler $R(s)$ sei nun folgendes Übertragungsverhalten gewünscht: An der Durchtrittsfrequenz $\omega = \omega_c$ sollen sowohl die Phase als auch der Betrag um einen bestimmten Wert angehoben werden ohne dabei die stationäre Verstärkung zu ändern. Geben Sie allgemein die Übertragungsfunktion eines regelungstechnischen Übertragungsgliedes $R(s)$ an, welches sich dazu eignet.

3. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

   a) Eine Übertragungsfunktion
   $$G(s) = \frac{a(s)}{b(s)}$$
   im $s-$Bereich ist realisierbar, wenn gilt
   $$\mathrm{grad}(a(s)) \leq \mathrm{grad}(b(s)) \ .$$
   Geben Sie die analogen Kriterien im $z-$Bereich und im $q-$(tustin)-Bereich an.

   b) Gegeben ist ein lineares zeitinvariantes System der Form
   $$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
   mit dem Zustand $\mathbf{x}$ und dem Eingang u.

      i) Ist das obige System global asymptotisch stabil? Begründen Sie die Antwort.
      ii) Zeigen Sie allgemein, dass die Eigenschaft der asymptotischen Stabilität des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ bei einer regulären Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$ auf die Form $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{z} + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{b}u$ unverändert bleibt.
      iii) Liegt das obige System in Jordanform vor (Begründung)?
      iv) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ des obigen Systems.
      v) Die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ eines linearen zeitinvarianten Systems erfüllt die Beziehung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)$. Beweisen Sie diese Eigenschaft allgemein.
      vi) Für das obige System ist der sprungförmige Verlauf der Eingangsgröße in der Form
      $$u(t) = \sigma(t-1) - \sigma(t-2)$$
      und der Zustand $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$ zum Zeitpunkt $t_1 = 3\,\mathrm{s}$ bekannt. Bestimmen Sie den zugehörigen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ des Systems.

4. Gegeben ist der folgende zeitdiskrete Regelkreis:

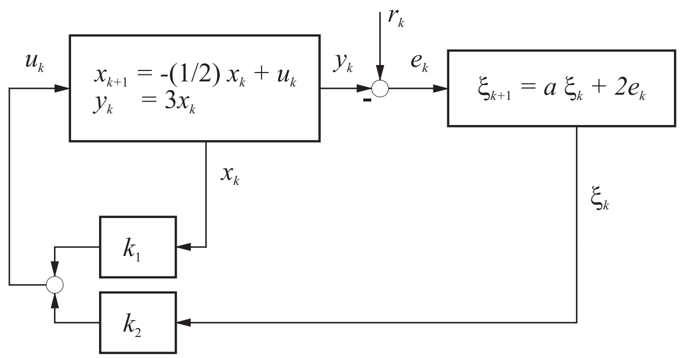

Abbildung 5: Zeitdiskreter Regelkreis.

a) Bestimmen Sie den Parameter a derart, dass der Regelkreis der Anforderung nach stationärer Genauigkeit für einen Führungssprung (mit der Sprunghöhe r_s) genügt (d.h., $\lim_{k\to\infty} y_k = r_s$). Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Falls Sie Punkt a) nicht lösen konnten, betrachten Sie für die folgenden Punkte den Parameter a als unbekannt.

b) Bestimmen Sie für eine konstante Führungsgröße $(r_k) = (r_s)$ den stationären Zustand (x_s, ξ_s) des Regelkreises in Abhängigkeit der Parameter $k_1 \neq 0$ und $k_2 \neq 0$. Sie können dazu voraussetzen, dass die Reglerparameter k_1 und k_2 so gewählt sind, dass der geschlossene Kreis stabil ist.

c) Berechnen Sie die Reglerparameter k_1 und k_2 derart, dass die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei 0 liegen.

d) Wieviele Abtastschritte benötigt der Regelkreis (mit den in Punkt c) geforderten Eigenschaften), um einen gegebenen Anfangszustand (x_0, ξ_0) unter der Annahme von $(r_k) = (0)$ in die Ruhelage $(0, 0)$ überzuführen ? Begründen Sie Ihre Aussage!

e) Was besagt das Separationstheorem? Zeigen Sie, dass für das Gesamtsystem bestehend aus dem Zustandsregler der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\,\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T\,\hat{\mathbf{x}}_k + g\,r_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k \end{aligned}$$

und dem vollständigen Beobachter der Form

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\,\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}u_k + \hat{\mathbf{k}}\,(\hat{y}_k - y_k) \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}_k \end{aligned}$$

für das charakteristische Polynom gilt

$$p_{ges}(z) = \det\left(z\mathbf{E} - \left(\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T\right)\right)\det\left(z\mathbf{E} - \left(\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\;\mathbf{c}^T\right)\right) = p_{g,soll}(z)\hat{p}_{g,soll}(z)\ .$$