Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 09.05.2014

LÖSUNG

Aufgabe 1: Lösungen zu Aufgabe 1

a) Mathematisches Modell in Zustandsraumdarstellung (als Zustände werden die Ausgänge der drei Integratoren gewählt)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_3+2\cos(x_1)-x_2^2\\ \sin(x_2)\,e^{x_3}\\ -2x_1x_2^2+4x_3u\end{bmatrix}$$
$$y=x_1$$

b) $\mathbf{x}_R$ ist Ruhelage, falls gilt $\mathbf{x}_R\in\mathcal{X}_R$ mit

$$\mathcal{X}_R=\{\begin{bmatrix}\mu\\0\\-2\cos(\mu)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid\mu\in\mathbb{R}\}\cup\{\begin{bmatrix}0\\k\pi\\(k\pi)^2-2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

c) Das um die Ruhelage $\mathbf{x}_R=[-\pi,0,2]^{\mathrm{T}}$ linearisierte System lautet

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&e^2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Delta\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\8\end{bmatrix}\Delta u$$
$$y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x}.$$

d) Das System ist nicht vollständig erreichbar.

Aufgabe 2: Lösungen zu Aufgabe 2

a) i Die Polstellen des zeitkontinuierlichen Systems berechnen sich zu $s_{1,2}=\pm\mathrm{I}\frac{\pi}{2T_a}$, $s_3=\frac{\ln 0.5}{T_a}$. Daraus folgt die reelle jordansche Normalform der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ zu

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}0&\frac{\pi}{2T_a}&0\\-\frac{\pi}{2T_a}&0&0\\0&0&\frac{\ln(0.5)}{T_a}\end{bmatrix}.$$

ii Die Polstellen berechnen sich zu $e^{\pm\mathrm{I}\frac{\pi}{4}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$, siehe Abbildung 1.

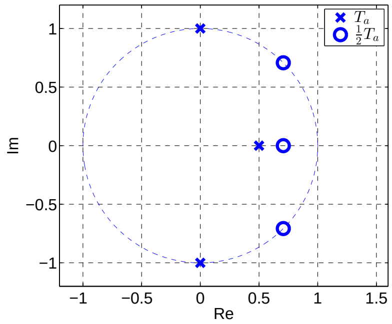

Abbildung 1: Polstellen des Abtastsystems.

b) i Die Dynamikmatrix des Abtastsystems berechnet sich zu

$$\mathbf{\Phi} = (\mathbf{E} - T_a\mathbf{A})^{-1}.$$

ii Die Eigenwerte $\tilde{\lambda}$ des Abtastsystems in Abhängigkeit der Eigenwerte λ von $\mathbf{A}$ berechnen sich zu

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{1 - T_a\lambda}.$$

iii Das zeitdiskrete Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & -T_a \\ 2T_a & 1+3T_a \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x}_k$$

mit den Eigenwerten

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{1+T_a} \quad \text{und} \quad \tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{1+2T_a}$$

ist für beliebige $T_a > 0$ global asymtotisch stabil.

Aufgabe 3: Lösungen zu Aufgabe 3

a) Der Ausgangsvektor ergibt sich zu $\mathbf{c^T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$.

b) Die Dynamikmatrix des Systems lautet

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4: Lösungen zu Aufgabe 4

a) LTI-System der Dimension $n = 3$. Beachten Sie, dass das System in Steuerbarkeitsnormalform gegeben ist.

i Die Eigenwerte ergeben sich zu $\lambda = \{-1, 0, 3\}$. Das System ist daher nicht stabil.

ii Das System ist vollständig erreichbar.

iii Der Rückführvektor kann leicht über einen Koeffizientenvergleich ermittelt werden und ergibt sich so zu $\mathbf{k^T} = \begin{bmatrix} -24 & -29 & -11 \end{bmatrix}$.

iv Die Vorsteuerung mit $u(t) = \mathbf{k^T}\mathbf{x} + r(t)$ folgt zu $r(t) = exp(-t)\,(-18\sin(2t) + 14\cos(2t))$.

b) Bei linearen autonomen Systemen kann es entweder eine Ruhelage geben (wenn die Dynamikmatrix Regulär ist) oder unendlich viele(wenn die Dynamikmatrix singulär ist). Siehe Skript Abschnitt 2.5.1.

c) Ja, wenn $det(\mathbf{A}) = 0$ und $\text{rang}[\mathbf{A}, \mathbf{b}u_\text{R}] \neq \text{rang}[\mathbf{A}]$. Eine mögliche Kombination ist beispielsweise

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$