Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 27.06.2014

LÖSUNG

Aufgabe 1: Lösungen zu Aufgabe 1

a) Darstellung als Differenzengleichungssystem 1. Ordnung

$$
\begin{aligned}
x_{1,k+1} &= x_{2,k} \\
x_{2,k+1} &= x_{3,k} \\
x_{3,k+1} &= -3x_{3,k}^2 + 2x_{2,k}^2 - \frac{5}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x_{2,k}\right) + x_{1,k}^2 + x_{1,k} + 2u_k
\end{aligned}
$$

Ausgangsgleichung

$$
y_k = -\frac{1}{2}x_{3,k} + \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x_{1,k}\right)\right)^2 + \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{2\pi}{5}u_k\right)
$$

b) Die Ruhelage eines zeitdiskreten Systems ist definiert durch $\mathbf{x}_R = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R)$. Für das betrachtete Beispiel gilt $u_R = 0$ und $x_{1,R} = x_{2,R} = x_{3,R} = x_R = \pm 1$.

c) System um allgemeine RL:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 + 2x_R & 4x_R + \frac{5}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x_R\right) & -6x_R \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\Gamma} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{c}^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} \pi\sin\left(\frac{\pi}{2}x_R\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x_R\right) & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
d &= -\frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{5}u_R\right)^2}}
\end{aligned}
$$

Ruhelage eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 + \frac{5}{2} & -6 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\Gamma} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{c}^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
d &= -\frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

d) Zu prüfende Bedingungen

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{6}k^2 > 0$$
$$-\frac{1}{2}\frac{2k^2 - 3k - 9}{k+3} > 0$$

Dies ergibt den zulässigen Bereich von k in der Form $-\frac{3}{2} < k < 3$.

Aufgabe 2: Lösungen zu Aufgabe 2

a) Aus der eingeschwungenen Lösung ergibt sich $\omega_0 = 5$ und φ_0 beliebig.

b) Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_{2,3} = \pm \mathrm{I}5$$

Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{I} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_{2,3} = 0$ gilt, ist das System nicht vollständig beobachtbar.

c) Startet man auf einem Eigenvektor, so verbleibt die Lösung $\mathbf{x}(t)$ immer auf diesem. Da $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_{2,3} = 0$ gilt, ist jede **reelle** Linearkombination von $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ ein zulässiger Startwert, z.B.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3: Lösungen zu Aufgabe 3

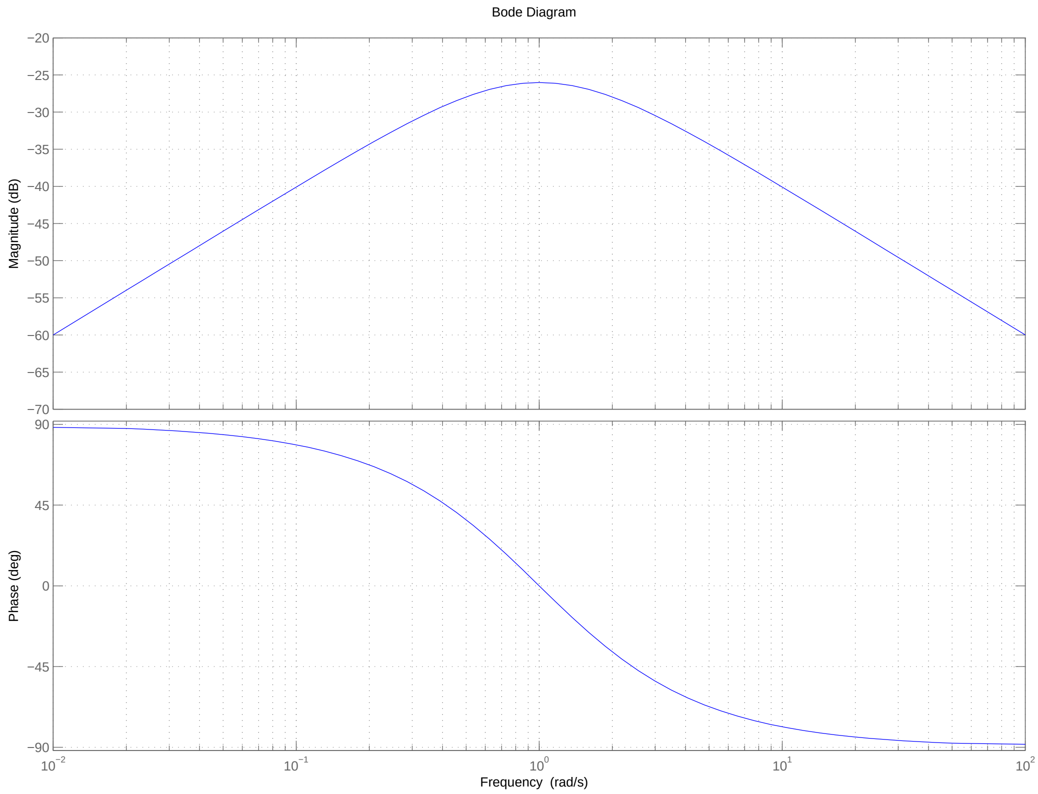
a) Führungsübertragungsfunktion

$$T_{r,y} = \frac{(R(s) + F(s))\,G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{3s^2 + 3s + 1}{(s+1)^3}$$

b) Störübertragungsfunktion

$$T_{d,y} = \frac{G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{s}{10\,(s+1)^2}$$

c) Bode Diagramm $T_{d,y}$



d) Störung

$$d(t) = \sigma(t)$$

Aufgabe 4: Lösungen zu Aufgabe 4

a) Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{(z-1)\, e^{3T_a} \sin(2T_a)}{z^2 - 2ze^{3T_a} \cos(2T_a) + e^{6T_a}}$$

Pole von G(z)

$$z_{1,2} = e^{3T_a} \left(\cos(2T_a) \pm I \sin(2T_a)\right)$$

b) 1. Standardform

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -13 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

c) Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$$

d) Dynamikdmatrix des geschlossenen Regelkreises

$$\mathbf{\Phi}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}_x^T - \mathbf{\Gamma}\mathbf{c}^T k_p & \mathbf{\Gamma} k_I \\ -\mathbf{c}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 + k_{x,1} - k_p & 2 + k_{x,2} & k_I \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$