Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 28.11.2014

LÖSUNG

Aufgabe 1: Lösungen zu Aufgabe 1

a) i

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ a\cos(x_1) - x_2\sqrt{x_1} - x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1) \end{bmatrix} u$$
$$y = x + gu^2$$

ii

$$\begin{bmatrix} x_{1,s} \\ x_{2,s} \\ x_{3,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} + n\pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{mit } n \in \mathbb{Z}$$

iii

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a & -\sqrt{\frac{\pi}{2}} & -1 \\ -u_s & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u$$
$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2gu_s \end{bmatrix} \Delta u$$

iv Für die Eigenwerte des linearisierten Systems gilt

$$\lambda_1 = 0 \tag{1}$$
$$\lambda_{2,3} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \pm \frac{\sqrt{2\pi - 16a}}{4}. \tag{2}$$

Da $a > 0$ angenommen wurde, gilt für zwei Eigenwerte des Systems $\Re(\lambda_{2,3}) < 0$, für den dritten $\Re(\lambda_1) = 0$. Damit ist das System nicht asymptotisch stabil.

b) i Aus $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{b} = 0$ folgt, dass $\mathbf{b}$ ein Eigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ ist.
Für Links- und Rechtseigenvektoren gilt bekanntlich $\mathbf{w}_i^T\mathbf{v}_j = \delta_{ij}$, womit die Existenz eines Vektors $\mathbf{w}_i^T \neq \mathbf{0}^T$ mit

$$\mathbf{w}_i^T\mathbf{A} = \lambda_i\mathbf{w}_i^T \qquad \textit{und} \qquad \mathbf{w}_i^T\mathbf{b} = 0$$

garantiert ist, und das System laut PBH-Eigenvektortest **nicht vollständig erreichbar** ist.

ii Da $\mathbf{A}$ in Jordanscher Normalform vorliegt, lässt sich die Transitionsmatrix

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$$

direkt angeben.
Die Lösung lautet somit

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{-3t} + 2te^{-3t} \\ 2e^{-3t} \\ -e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

c)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -6 & 10 & -5 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2: Lösungen zu Aufgabe 2

a) Die globale Existenz und Eindeutigkeit kann z.B. mit $L = 1$ gezeigt werden.

b) Der Regler minimaler Ordnung lautet $R(s) = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{1+s/10}{1+sT_R}$ mit $T_R << 1$.

Aufgabe 3: Lösungen zu Aufgabe 3

a) i Für $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ und beliebige Werte für γ hat ist das System vollständig beobachtbar.

ii Für $\alpha = 0$ hat die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}$ den Rang 1, womit der nicht beobachtbare Unterraum die Dimension 2 hat, und mit $|\gamma| < 1$ besitzt dieser eine stabile Dynamik. Der Parameter β kann beliebig gewählt werden.

b) i Das charakteristische Polynom von $\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ lautet

$$(\lambda + \frac{1}{2})(\lambda^2 - \lambda(3 + \hat{k}_3) + 2\hat{k}_3 + 2 - \hat{k}_2).$$

Dadurch ist aber schon ersichtlich, dass der Eigenwert $\lambda = -\frac{1}{2}$ durch $\hat{\mathbf{k}}$ nicht beeinflussbar ist und $\hat{k}_1$ keinen Einfluss auf die Schätzfehlerdynamik hat.

ii Der Wert für $\hat{k}_1$ kann beliebig gewählt werden. Somit lautet ein möglicher Rückführungsvektor für das Gesamtsystem

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{25}{4} \\ -4 \end{bmatrix}.$$

iii

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}})\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{25}{4} \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_k$$

Der Eingang u_k wirkt sich nicht auf die Schätzfehlerdynamik aus, und kann diese somit nicht destabilisieren.

c) Das System liegt in Beobachtbarkeitsnormalform vor und die Eigenwerte liegen bei

$$\lambda_1 = 0 \qquad \text{mit der algebraischen Vielfachheit } n_1 = 2$$
$$\lambda_2 = -1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Das System ist vollständig beobachtbar jedoch nicht asymptotisch stabil, womit der Simulator zur Zustandsschätzung nicht einsetzbar ist.

Aufgabe 4: Lösungen zu Aufgabe 4

a) i Die Übertragungsfunktionen lauten

$$T_{u,y}(s) = \frac{G_1(1+G_2G_3)}{1+(G_1+G_2)G_3},$$
$$T_{d,y}(s) = -\frac{1+G_2G_3}{1+(G_1+G_2)G_3},$$
$$T_{w,y}(s) = -\frac{G_1G_3}{1+(G_1+G_2)G_3}.$$

ii Mit $T > 0$ ist die Übertragungsfunktion $T_{u,y}(s)$ BIBO-stabil.

iii Für $y_\infty = -1$ muss $V_1/V_2 = 1/2$ gelten.

b) i Die Impulsfolge lautet $(g_k) = 4\delta_{k-1} + 6\delta_{k-2} + 6\delta_{k-3}$.

ii Für den Eingangsvektor gilt $\mathbf{\Gamma} = [1, 0, 3]^T$ und eine mögliche Dynamikmatrix ergibt sich zu

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) i Die BIBO-stabile, sprungfähige und nicht-phasenminimale s-Übertragungsfunktion ergibt sich zu $G(s) = \frac{s(s-2)}{(s+2)(s+4)}$.

ii Die zugehörige z-Übertragungsfunktion lautet $G(z) = \frac{1-2z+z^2}{\frac{1}{8}-\frac{3}{4}z+z^2}$ mit der Minimalrealisierung

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + u_k.$$