Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 30.01.2015

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	8	12	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten: ☐ Mo., 09.02.2015 ☐ Di., 10.02.2015

Viel Erfolg!

1. Gegeben sind die Bewegungsgleichungen 8 P.|

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \frac{1}{r^2} + 2v\sin(\phi)\\ \ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{v}{2r}\cos(\phi).\end{aligned} \tag{1}$$

Im Folgenden soll der Zustandsvektor $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & \dot{\theta}\end{bmatrix}$ und der Eingangsvektor $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}\phi & v\end{bmatrix}$ verwendet werden. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

a) Geben Sie das System (1) in Zustandsdarstellung der Form 1 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

an.

b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems für $r = r_s \neq 0$ und $\theta = \theta_s$. 2 P.|

c) Für eine bestimmte Ruhelage lautet das linearisierte System

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 0\\ -\frac{1}{4} & 0\end{bmatrix}\Delta\mathbf{u}, \quad \Delta\mathbf{x}(0) = \Delta\mathbf{x}_0.$$

i. Ist das zugehörige autonome System asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich! 1 P.|

ii. Geben Sie die Übertragungsfunktion vom Eingang $\Delta u = \Delta u_2$ zum Ausgang $\Delta y = \Delta x_1$ an. 1 P.|

d) Linearisieren Sie das System um eine Trajektorie $\mathbf{x}_s^{\mathrm{T}}(t) = \begin{bmatrix} r_s & 0 & \omega_s t & \omega_s\end{bmatrix}$ und den Eingang $\mathbf{u}_s^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}\pi/2 & 0\end{bmatrix}$ und geben Sie das linearisierte System an. 3 P.|

2. Gegeben ist die Übertragungsfunktion 12 P.|

$$G(s) = e^{-sT}\frac{1}{sT}$$

mit der Zeitkonstanten $T = 2$.

a) Bestimmen Sie die zugehörige z-Übertragungsfunktion $G(z)$ sowie die zugehörige q-Übertragungsfunktion $G^{\#}(q)$ mit der Abtastzeit $T_a = T$. 2 P.|

b) Entwerfen Sie mithilfe des Frequenzkennlinienverfahrens einen Regler minimaler Ordnung der Form 3 P.|

$$R^{\#}(q) = \frac{1}{q^n(c_1 + c_2 q)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

so, dass für die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgendes gilt:

i. Anstiegszeit $t_r = \frac{6}{5}(2-\sqrt{3})^{-1}$ s

ii. Überschwingen $\ddot{u} = 10\%$

iii. bleibende Regelabweichung $e_\infty|_{(r_k)=(1^k)} = 0$.

Hinweis: $\arctan(2-\sqrt{3}) = \pi/12$.

c) Skizzieren Sie das Bodediagramm des offenen Regelkreises $L^{\#}(q)$ und zeichnen Sie die Durchtrittsfrequenz Ω_C und die Phasenreserve Φ ein. Benutzen Sie hierzu die Näherung $2(2-\sqrt{3}) \approx 0.5$. 2 P.|

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den Aufgaben (a)–(c) gelöst werden.

d) Betrachten Sie die Ortskurven der Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{z_1(s)}{s(s+2)} \quad \text{und} \quad G_2(s) = \frac{z_2(s)}{s(s+2)}$$

aus Abbildung 1.

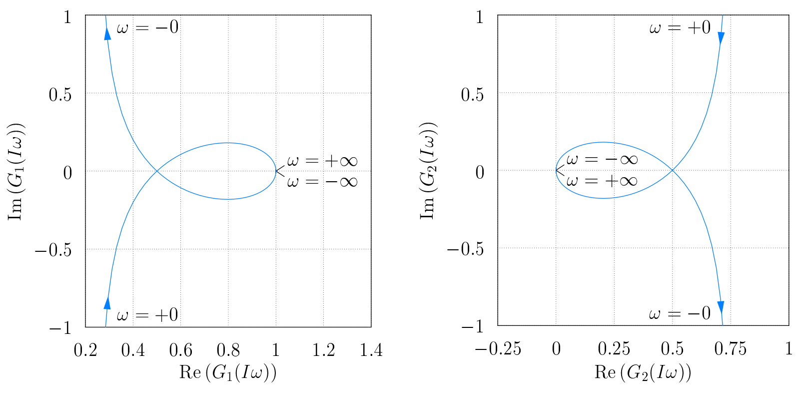


Abbildung 1: Ortskurven von $G_1(s)$ und $G_2(s)$.

Beantworten Sie mithilfe der Ortskurven folgende Fragen und bearbeiten Sie die Punkte i. und ii. ohne mit konkreten Polynomen $z_1(s)$ bzw. $z_2(s)$ zu argumentieren. Begründen Sie ihre Antworten ausführlich. Einfache Ja/Nein Aussagen sind nicht ausreichend!

i. Ist $G_1(s)$ bzw. $G_2(s)$ sprungfähig? 1 P.|

ii. Handelt es sich bei $z_1(s)$ bzw. $z_2(s)$ um ein Hurwitzpolynom? 2 P.|

iii. Bestimmen Sie anhand der Ortskurven, welche der folgenden Polynome die Zählerpolynome von $G_1(s)$ bzw. $G_2(s)$ sind: 2 P.|

$$a_1(s) = s + 2, \quad a_2(s) = s^2 + s + 1, \quad a_3(s) = s - 1, \quad a_4(s) = 3s^2 + 2$$

3. Gegeben ist das vollständig beobachtbare Abtastsystem 10 P.|

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,\\ y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + du_k\end{aligned}$$

mit $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ und $d \in \mathbb{R}$. Mithilfe der regulären Zustandstransformation $\mathbf{z}_k = \mathbf{V}\mathbf{x}_k$ soll dieses System auf Beobachtbarkeitsnormalform (zweite Standardform)

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}_B\mathbf{z}_k + \mathbf{\Gamma}_B u_k, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0,\\ y_k &= \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{z}_k + d_B u_k\end{aligned}$$

transformiert werden.

a) Geben Sie allgemein den Zusammenhang zwischen $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_0$, d und $\mathbf{\Phi}_B$, $\mathbf{\Gamma}_B$, $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{z}_0$, d_B über die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ an. 1 P.|

b) Die Transformationsmatrix lässt sich als Zeilenvektor von Spaltenvektoren $\mathbf{s}_i$ mit $i = 1, 2, \ldots, n$ in der Form 4 P.|

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \ldots & \mathbf{s}_n\end{bmatrix}$$

darstellen. Zeigen Sie, dass

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}\\ \vdots\\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{n-1}\end{bmatrix}\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{s}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

gilt.

c) Gegeben ist das vollständig beobachtbare Abtastsystem 3 P.|

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u_k,\\ y_k &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}_k + 2u_k.\end{aligned}$$

Berechnen Sie die Beobachtkeitsnormalform und die zugehörige Transformationsmatrix $\mathbf{V}$ in Anlehnung an Aufgabe 3b).

d) Was besagt der Satz von Cayley-Hamilton. 1 P.|

e) Im Weiteren wird das lineare, zeitinvariante autonome Abtastsystem 1 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

betrachtet. Zeigen Sie, dass für die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Psi}(k)$ die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}(0) &= \mathbf{E}\\ \mathbf{\Psi}(k+l) &= \mathbf{\Psi}(k)\,\mathbf{\Psi}(l)\\ \mathbf{\Psi}^{-1}(k) &= \mathbf{\Psi}(-k)\\ \mathbf{\Psi}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}(k)\end{aligned}$$

gelten.

4. Bearbeiten Sie die folgenden, unabhängigen Teilaufgaben: 10 P.|

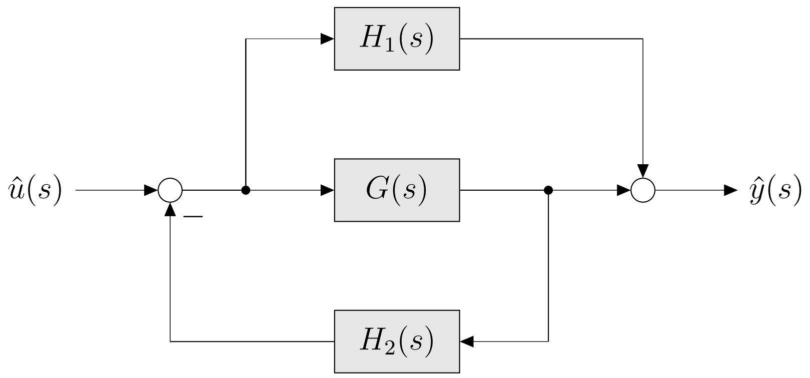


Abbildung 2: Regelkreis.

a) Die Übertragungsfunktionen $H_1(s), G(s)$ und $H_2(s)$ des in Abbildung 2 dargestellten Regelkreises lauten

$$H_1(s) = \frac{1}{s+2}, \qquad G(s) = \frac{2}{s+4}, \qquad H_2(s) = \frac{K}{s-1},$$

wobei K einen reellen Parameter bezeichnet.

i. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $F(s) = \hat{y}(s)/\hat{u}(s)$. 2 P.|

ii. Bestimmen Sie den Wertebereich von K, damit $F(s)$ BIBO-stabil ist. 2 P.|

b) Im Folgenden soll das zeitkontinuierliche System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{4}$$

betrachtet werden, für welches ein zeitkontinuierlicher, vollständiger Luenberger Beobachter der Form

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}(t) - y(t)), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}(t) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

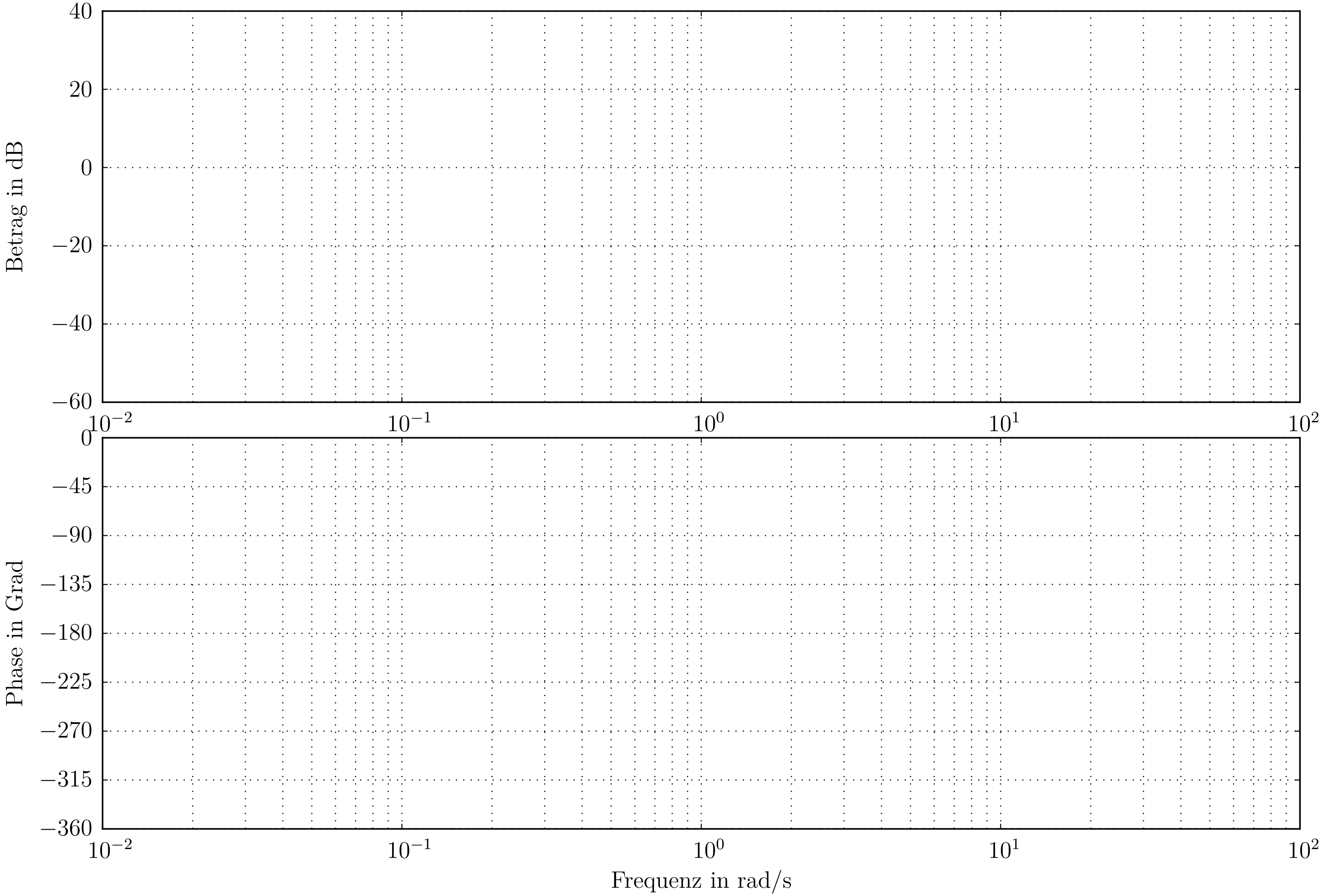
entworfen werden soll.

i. Für die Regelung des zeitkontinuierlichen Systems (4) soll ein Zustandsregelgesetz der Form $u(t) = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}(t)$ und der vollständige Luenberger Beobachter (5) verwendet werden. Zeigen Sie, dass das Separationsprinzip auch im zeitkontinuierlichen Fall gilt. 3 P.|

ii. Untersuchen Sie, ob das durch 3 P.|

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

definierte System vollständig beobachtbar ist. Bestimmen Sie ein $\hat{\mathbf{k}}$ so, dass die Eigenwerte von $\mathbf{A} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ bei $\{-1, -2, -3\}$ zu liegen kommen.
Hinweis: Sie benötigen dazu nicht die Formel von Ackermann.


Betrag in dB
40
20
0
−20
−40
−60
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Phase in Grad
0
−45
−90
−135
−180
−225
−270
−315
−360
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequenz in rad/s