Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 30.01.2015

LÖSUNG

Aufgabe 1: Lösungen zu Aufgabe 1

a) Für die rechte Seite gilt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_4^2 - \frac{1}{x_1^2} + 2u_2\sin(u_1) \\ x_4 \\ -\frac{2x_2x_4}{x_1} + \frac{u_2}{2x_1}\cos(u_1) \end{bmatrix}.$$

b) Die Ruhelagen lauten

$$\begin{bmatrix} x_{1,s} \\ x_{2,s} \\ x_{3,s} \\ x_{4,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s \\ 0 \\ \theta_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} u_{1,s} \\ u_{2,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \frac{1}{2x_{1,s}^2} \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,s} \\ x_{2,s} \\ x_{3,s} \\ x_{4,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s \\ 0 \\ \theta_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} u_{1,s} \\ u_{2,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ -\frac{1}{2x_{1,s}^2} \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

c) Das System zerfällt in zwei unabhängige Teilsysteme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_1} \Delta u_2 \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2} \begin{bmatrix} \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \Delta u_1$$

i. Das autonome System ist nicht asymptotisch stabil, da das obere Teilsystem instabil ist ($\mathrm{eig}(\mathbf{A}_1) = \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$) bzw. das untere Teilsystem einen doppelten Eigenwert bei Null aufweist ($\mathrm{eig}(\mathbf{A}_2) = \lambda_{3,4} = 0$).

ii. Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{\Delta\hat{x}_1(s)}{\Delta\hat{u}_2(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} (s\mathbf{E} - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{b_1} = \frac{2}{s^2 - 2}$$

d) Das linearisierte System lautet

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_{4,s}^2(t) + \frac{2}{x_{1,s}^3(t)} & 0 & 0 & 2x_{1,s}(t)x_{4,s}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2x_{2,s}(t)x_{4,s}(t)}{x_{1,s}^2(t)} - \frac{u_{2,s}\cos(u_{1,s})}{2x_{1,s}^2(t)} & -\frac{2x_{4,s}(t)}{x_{1,s}(t)} & 0 & -\frac{2x_{2,s}(t)}{x_{1,s}(t)} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2u_{2,s}\cos(u_{1,s}) & 2\sin(u_{1,s}) \\ 0 & 0 \\ -\frac{u_{2,s}\sin(u_{1,s})}{2x_{1,s}(t)} & \frac{\cos(u_{1,s})}{2x_{1,s}(t)} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}$$

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ w_s^2 + \frac{2}{r_s^3} & 0 & 0 & 2r_s w_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2w_s}{r_s} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}.$$

Aufgabe 2: Lösungen zu Aufgabe 2

a) $G(z) = \frac{z-1}{z}\frac{1}{zT_a}\frac{T_a z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z(z-1)}, \quad G^{\#}(q) = \frac{(1-q)^2}{2q(1+q)}$

b) $\Omega_C = 2 - \sqrt{3}$, $\Phi = 60°$, $n = 0$ (Integrator bereits enthalten)

$R^{\#}(q) = \frac{1}{c_1(1 + \frac{c_2}{c_1}q)}, \quad L_1^{\#}(q) = \frac{(1-q)^2}{2q(1+q)}$

$\Rightarrow \arg(L_1^{\#}(I\Omega_C)) = 2\arctan\left(\frac{-\Omega_C}{1}\right) - \arctan\left(\frac{\Omega_C}{1}\right) - \arctan\left(\frac{2\Omega_C}{0}\right) = \frac{-3\pi}{4}$

$\Rightarrow$ Phase muss um 15° angehoben werden $\Rightarrow -\arctan\left(\frac{c_2}{c_1}\Omega_C\right) = \frac{\pi}{12} \Rightarrow c_1 = -c_2$

$L^{\#}(q) = \frac{(1-q)}{2qc_1(1+q)}$

$\Rightarrow 20\log\left(\sqrt{\Omega_C^2+1}\right) - 20\log\left(\sqrt{\Omega_C^2+1}\right) - 20\log(2c_1\Omega_C) = 0\,\mathrm{dB} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2(2-\sqrt{3})}$

c) Bode Diagramm siehe MATLAB

d)
  i. Aussage über Definition der Sprungfähigkeit $\lim_{s\to\infty} G(s) \neq 0$ möglich:
     $G_1(s)$ ist sprungfähig, $G_2(s)$ ist nicht sprungfähig
  ii. Siehe Skript Abschnitt 4.4.2, Formel (4.38)–(4.41)
     Stetige Winkeländerung von $G_1(s)$ ist π, stetige Winkeländerung von $G_2(s)$ ist -2π. Das Nennerpolynom hat eine negative Nullstelle und eine Nullstelle auf der imaginären Achse $\Rightarrow$ stetige Winkeländerung des Nennerpolynoms beträgt somit π, vgl. (4.41).
     Mit $\Delta\arg(G(I\omega)) = \sum\Delta\arg(I\omega - \alpha_i) - \sum\Delta\arg(I\omega - \beta_i)$ erhält man
     $G_1(s): \pi = x_1\pi - \pi \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow 2$ negative Nullstellen $\Rightarrow z_1(s)$ ist ein Hurwitzpolynom
     $G_2(s): -2\pi = x_2\pi - \pi \Rightarrow x_2 = -1 \Rightarrow 1$ positive Nullstelle $\Rightarrow z_2(s)$ ist kein Hurwitzpolynom
  iii. $z_1(s) = s^2 + s + 1$, $z_2(s) = s - 1$

Aufgabe 3: Lösungen zu Aufgabe 3

a) $\mathbf{\Phi}_B = \mathbf{V}\mathbf{\Phi}\mathbf{V}^{-1}, \quad \mathbf{\Gamma}_B = \mathbf{V}\mathbf{\Gamma}, \quad \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}, \quad d_B = d, \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{V}\mathbf{x}_0$

b) Mit $\mathbf{\Phi}_B = \mathbf{V}\mathbf{\Phi}\mathbf{V}^{-1}$ folgt $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{\Phi}_B = \mathbf{\Phi}\mathbf{V}^{-1}$ bzw.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \dots & \mathbf{s}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \dots & \dots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1\\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2}\\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}\begin{bmatrix}\mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \dots & \mathbf{s}_n\end{bmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{s}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

bzw.

$$-a_0\mathbf{s}_1 - a_1\mathbf{s}_2 - \dots - a_{n-1}\mathbf{s}_n = \mathbf{\Phi}\mathbf{s}_n.$$

Mit $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}$ folgt

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \dots & \mathbf{s}_n\end{bmatrix}$$

bzw. mit $\mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{s}_i,\ i = 1, 2, \dots, n-1$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}\\ \vdots\\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{n-1}\end{bmatrix}\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}.$$

c) Die Beobachtbarkeitsmatrix und die inverse Beobachtbarkeitsmatrix lauten

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{O}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}.$$

Es folgt damit

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{\Phi}\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{\Phi}_B = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{\Gamma}_B = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad d_B = 2.$$

d) Siehe Skript Automatisierung Satz 8.1.

e) Es gilt $\mathbf{\Psi}(k) = \mathbf{\Phi}^k$ und damit

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Psi}(0) &= \mathbf{\Phi}^0 = \mathbf{E} \\
\mathbf{\Psi}(k+l) &= \mathbf{\Phi}^{k+l} = \mathbf{\Phi}^k\mathbf{\Phi}^l = \mathbf{\Psi}(k)\,\mathbf{\Psi}(l) \\
\mathbf{\Psi}^{-1}(k) &= \left(\mathbf{\Phi}^k\right)^{-1} = \mathbf{\Phi}^{-k} = \mathbf{\Psi}(-k) \\
\mathbf{\Psi}(k+1) &= \mathbf{\Phi}^{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^k = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}(k)\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Lösungen zu Aufgabe 4

a) i. $F(s) = \dfrac{G(s) + H_1(s)}{1 + G(s)H_2(s)}$

ii. Die Probemstellung führt auf die Hurwitztabelle

s^3	1	$2K+2$
s^2	5	$4K-8$
s^1	$\dfrac{6K+18}{5}$	0
s^0	$4K-8$	0

Aus der Pivotspalte ergeben sich die Forderungen $K > -3$ und $K > 2$, d.h. es muss $K > 2$ gelten.

b) i. Siehe Skript Automatisierung Abschnitt 8.4

ii. Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 12 & 3 & 18 \end{bmatrix}$$

hat Rang $n = 3$, damit ist das System vollständig beobachtbar. Mit

$$\det(\lambda E - A - \hat{k}c^{\mathrm{T}}) = \lambda^3 + (-\hat{k}_1 - \hat{k}_3 - 4)\lambda^2 + (\hat{k}_1 - \hat{k}_2)\lambda + \hat{k}_2 - 2\hat{k}_3 - 6$$

erhält man über einen Koeffizientenvergleich des Sollpolynoms $(\lambda+1)\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda+3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$ die Koeffizienten von $\hat{k}$ zu

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_1 \\ \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ -11 \end{bmatrix}.$$