Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 06.03.2015

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	11	9	8	12	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ Fr., 13.03.2015 ☐ Mo., 16.03.2015 ☐ Di., 17.03.2015

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben 11 P.|

a) Gegeben ist das Blockschaltbild eines nichtlinearen zeitkontinuierlichen Systems: 7 P.|

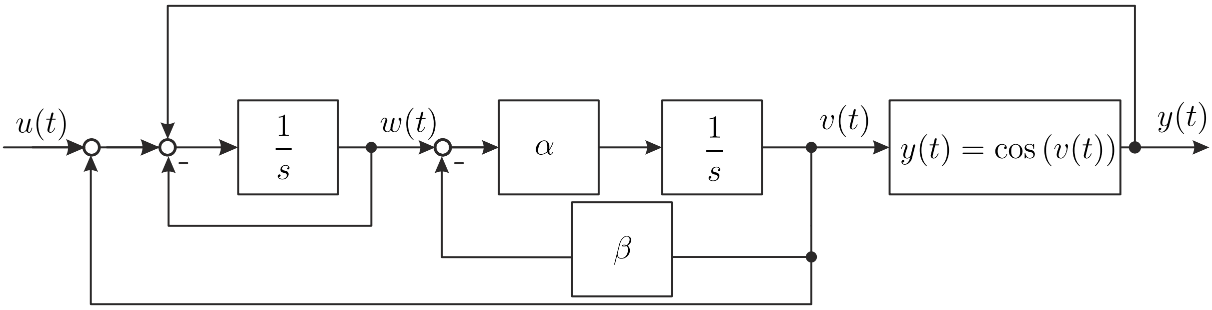

Abbildung 1: Nichtlineares System.

i. Erstellen Sie das nichtlineare Zustandsmodell in der Form 3 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$
$$y = g(\mathbf{x}, u).$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v & w \end{bmatrix}^T$.

ii. Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems für $u(t) = 0$ und $\beta = 1$. 1 P.|

iii. Linearisieren Sie das Zustandsmodell um die Ruhelage und schreiben Sie das linearisierte System vollständig an für $\beta = 1$ und $\sin(v(t)) = 1$. 1 P.|

iv. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des linearisierten Systems. 1 P.|

v. Für welches α ist das linearisierte Modell BIBO stabil? 1 P.|

b) Ein lineares, zeitinvariantes System der Form 5 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

wird mit Hilfe einer regulären Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$ auf Jordansche Normalform transformiert. Es bezeichnen $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ und $\tilde{\mathbf{C}}$ die Systemmatrizen des transformierten Systems. Folgende Matrizen sind bekannt

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

mit der Transitionsmatrix des transformierten Systems $\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)$.

i. Ist das System asymptotisch stabil? Begründen Sie ihre Antwort. 1 P.|

ii. Berechnen Sie die Dynamikmatrix des transformierten Systems $\tilde{\mathbf{A}}$. 1 P.|

iii. Bestimmen Sie die Eigenwerte des Systems, sowie die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$. 1 P.|

iv. Geben Sie $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ des ursprünglichen Systems an. 2 P.|

2. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben: 9 P.|

   a) Gegeben ist das System 3. Ordnung der Form 2 P.|

$$\frac{1}{2}y_{k+3} + 2e^{y_{k+2}} + 4\sin(u_k) = \frac{\alpha}{10}\sqrt{y_{k+1}}.$$

   Stellen Sie dieses System in der Form von Differenzengleichungen 1. Ordnung dar

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k, u_k\right)$$
$$y_k = g(\mathbf{x}_k).$$

   b) Die folgende Abbildung zeigt die Pol- und Nullstellen einer Übertragungsfunktion $G(z)$. ($x\ldots$ Polstelle, o ... Nullstelle). 5 P.|

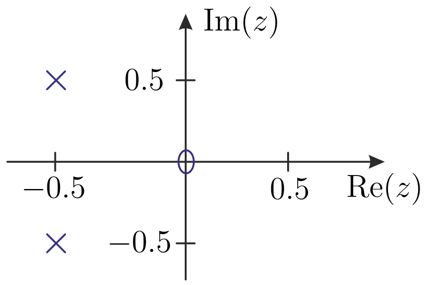

Abbildung 2: Pol/Nullstellendiagramm.

      i. Ist das in Abbildung 2 dargestellte System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|
      ii. Ermitteln Sie $G(z)$ so, dass $\lim_{z\to 1} G(z) = 1$ gilt. 2 P.|
      iii. Berechnen Sie allgemein die Impulsantwort (g_k) des Systems. 2 P.|

   c) Gegeben ist das Abtastsystem mit der z-Übertragungsfunktion 2 P.|

$$G(z) = \frac{2z+1}{4z^2}$$

   und der Abtastzeit $T_a = 1$s. Bestimmen Sie die eingeschwungene Lösung (y_k) aufgrund der Eingangsfolge

$$(u_k) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}k + 1\right) + \left(1^k\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}k + \pi\right)e^{-k}.$$

3. Gegeben sei das lineare, zeitdiskrete System der Form 8 P.|

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_k, \\
y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Lösen Sie folgende Teilaufgaben:

a) Überprüfen Sie das System (1) auf Erreichbarkeit. Verwenden Sie dazu den PBH-Eigenvektortest. 2.5 P.|

b) Entwerfen Sie für das zeitdiskrete System (1) einen Zustandsregler der Form

$$u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_k + g r_k,$$

sodass die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $z = \frac{1}{4}$ zu liegen kommen. 3 P.|

c) Berechnen Sie den Verstärkungsfaktor g derart, dass für den geschlossenen Kreis für eine Eingangsfolge $(r_k) = r_0(1^k) = (r_0, r_0, r_0, \ldots)$

$$\lim_{k \to \infty} y_k = r_0$$

gilt. 1.5 P.|

d) Für das betrachtete System (1) lautet die Hankelmatrix

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Beurteilen Sie anhand der Hankelmatrix die Beobachtbarkeit des vorliegenden Systems. Begründen Sie ihre Antwort ausführlich. 1 P.|

4. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben: 12 P.|

a) Abbildung 3 zeigt den Amplitudengang sowie die Nyquist-Ortskurve einer zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktion $G(s)$. Welche der folgenden Übertragungsfunktionen entspricht den dargestellten Verläufen. Zeichnen Sie in der Nyquist-Ortskurve die Frequenzen $\omega \to \pm\infty$ und $\omega = 0$ ein. Begründen Sie Ihre Antworten ausführlich. 4 P.|

1) $G_1(s) = \dfrac{4+s}{2s^2+s+4}$ 2) $G_2(s) = \dfrac{4}{(2s^2+s+4)(1+s)}$

3) $G_3(s) = \dfrac{(4-s)}{(2s^2+s+4)}$ 4) $G_4(s) = \dfrac{4}{(2s^2+s+4)(1-s)}$

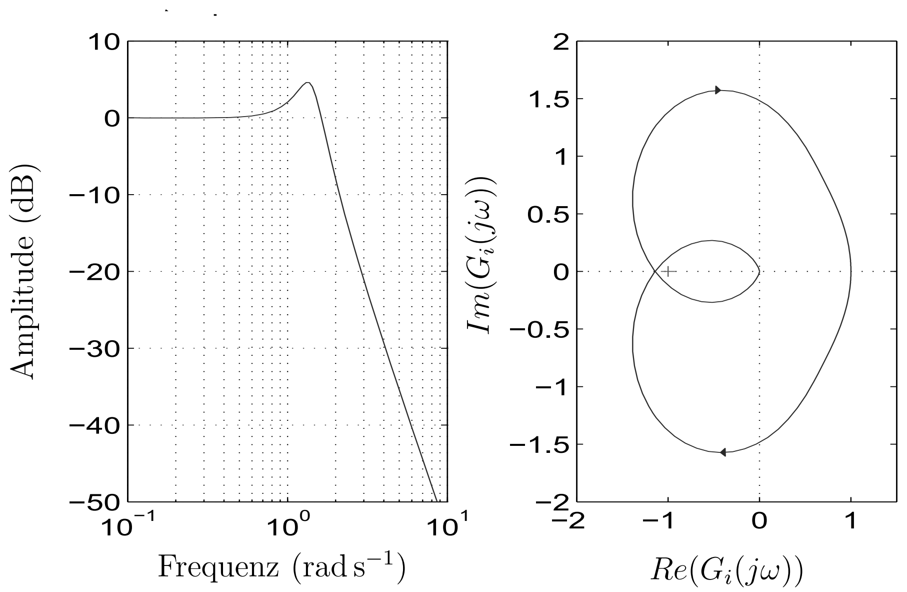

Abbildung 3: Amplitudengang und Nyquist-Ortskurve zu Aufgabe 4 a).

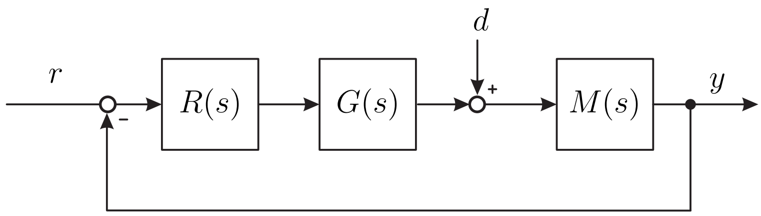

Abbildung 4: Geschlossener Regelkreis zu Aufgabe 4 b).

b) Im folgenden wird der Regelkreis nach Abbildung 4 mit der Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{12\left(s + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)}{s\left(s + 4\sqrt{3}\right)(s+4)}$$

betrachtet. Für die Übertragungsfunktion der Messeinrichtung $M(s)$ gilt vorerst $M(s) = 1$.

i. Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion $G(s)$ und $M(s) = 1$ mit Hilfe des Frequenzkennlinienverfahrens einen Regler der Form

$$R(s) = V_R \frac{1 + sT_R}{s^\beta},$$

welcher folgende Spezifikationen erfüllt.

- Anstiegszeit $t_r = \frac{3}{8}$s
- Prozentuelles Überschwingen $\ddot{u} = 25\%$
- $e_\infty|_{r(t)=t} = 0$.

A. Zeigen Sie mit Hilfe des Endwertsatzes, dass der Parameter β zu $\beta = 1$ gewählt werden muss. 3 P.|

B. Berechnen Sie die Reglerkoeffizienten V_R und T_R für $\beta = 1$. 3 P.|

ii. Es gelte nun $M(s) = e^{-sT_t}$. Wie groß darf T_t maximal werden, damit der Regelkreis noch BIBO-stabil ist? 2 P.|