Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 08.05.2015

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	11,5	8,5	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten (*unverbindlich*):

☐ Fr., 15.05.2015 ☐ Mo., 18.05.2015 ☐ Di., 19.05.2015

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben: **11,5 P.**

   a) Gegeben ist das nichtlineare System **4 P.**

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) =& x(t)\cos(ax(t)) - x(t)u(t), \qquad x(t_0) = x_0, \\ y(t) =& x(t)^2 + u(t). \end{aligned} \tag{1}$$

      i. Bestimmen Sie sämtliche Ruhelagen x_R des Systems für einen konstanten Eingang $u = u_R$. Geben Sie auch den zulässigen Wertebereich von u_R für die jeweiligen Ruhelagen an. 1 P.

Lösung:
Offensichtlich ist $x_R = 0$ für jedes u_R eine Ruhelage von (0.5 Punkte)

$$\dot{x}(t) = x(t)(\cos(ax(t)) - u_R).$$

Sofern $-1 \leq u_R \leq 1$ erfüllt ist, ist eine unendliche Zahl von Ruhelagen durch

$$\cos(ax_R) = u_R$$

gegeben (0.5 Punkte). Diese lassen sich als $\left\{\frac{\arccos(u_R)+2k\pi}{a}, \frac{-\arccos(u_R)+2k\pi}{a}\right\}$ zusammenfassen, wenn $0 \leq \arccos(u_R) \leq \pi$ gilt.

      ii. Linearisieren Sie das System um eine allgemeine Ruhelage x_R für $u(t) = u_R$. 1 P.

Lösung:
Das linearisierte System resultiert zu

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}(t) =& \underbrace{(\cos(ax_R) - u_R - ax_R\sin(ax_R)}_{a}\Delta x + \underbrace{(-x_R)}_{b}\Delta u, \text{(0.5 Punkte)} \\ \Delta y =& \underbrace{2x_R}_{c}\Delta x + \underbrace{1}_{d}\Delta u. \text{(0.5 Punkte)} \end{aligned}$$

      iii. Geben Sie für $a = 0$ das Abtastsystem zum nichtlinearen System (1) für die Abtastzeit T_a unter Verwendung des bekannten Haltegliedes nullter Ordnung an. 2 P.

Lösung:
Die Differentialgleichung vereinfacht sich für $a = 0$ zu

$$\dot{x}(t) = x(t)(1 - u(t)), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Für einen konstanten Eingang $u(t) = u_C$ hat sie die Lösung

$$x(t) = x_0 e^{(1-u_C)(t-t_0)}. \text{(1 Punkt)}$$

Wird für den Zeitraum $kT_a \leq t < (k+1)T_a$ die Stellgröße $u(t) = u_k$ und der Anfangswert $x(kT_a) = x_k$ gesetzt, so resultiert für die Lösung zum Zeitpunkt $t = (k+1)T_a$

$$x_{k+1} = x_k e^{(1-u_k)T_a}.$$

Damit resultiert das gesuchte Abtastsystem

$$\begin{aligned} x_{k+1} =& x_k e^{(1-u_k)T_a}, \text{(0.5 Punkte)} \\ y_k =& x_k^2 + u_k. \text{(0.5 Punkte)} \end{aligned}$$

b) Beurteilen Sie die Übertragungsfunktionen 2 P.

$$G(s) = \frac{s^2}{s^2 - 2s + 4}, \qquad G(z) = \frac{z-2}{(z+\frac{1}{2})(z+2)}, \qquad G^{\#}(q) = \frac{10 - \frac{1}{2}q}{10+q}$$

hinsichtlich BIBO-Stabilität und Sprungfähigkeit. Für die Abtastsysteme gilt eine Abtastzeit $T_a = 0.1$. Begründen Sie ihre Antwort hinreichend!

Lösung:

- $G(s)$ ist sprungfähig aber nicht BIBO-stabil (kein Hurwitzpolynom). (0.5 Punkte)
- $G(z)$ ist nicht sprungfähig und nicht BIBO-stabil (Polstelle außerhalb des Einheitskreises). (0.5 Punkte)
- $G^{\#}(q)$ ist nicht sprungfähig (Nullstelle bei $\Omega_0 = \frac{2}{T_a} = 20$) aber BIBO-stabil. (1 Punkt)

c) In Abbildung 1 sind die Impulsantworten (für $u(t) = \delta(t)$) von zwei Varianten von Haltegliedern erster Ordnung dargestellt. **5,5 P.**

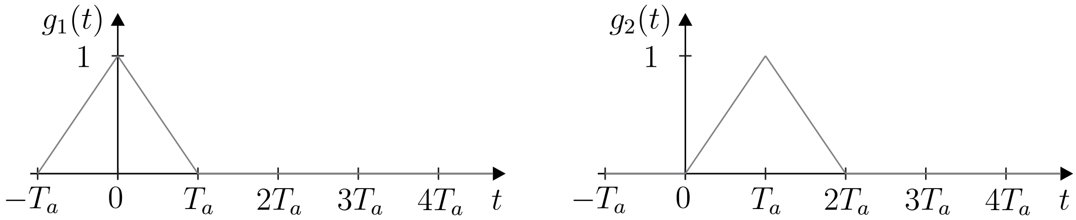


Abbildung 1: Sprungantworten der Halteglieder.

i. Stellen die beiden Halteglieder kausale Systeme dar? Begründen Sie Ihre Antwort hinreichend! 1 P.

Lösung:

Offensichtlich ist das Halteglied 1 kein kausales System, da die Impulsantwort bereits vor dem Impuls am Eingang startet (0.5 Punkte). Beim Halteglied 2 startet die Impulsantwort erst nach dem Impuls, weshalb es sich um ein kausales System handelt (0.5 Punkte).

ii. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(s)$ von Halteglied 2. 2 P.

Lösung:

Die Impulsantwort lässt sich als

$$\begin{aligned} g_2(t) =& \frac{t}{T_a}\left(\sigma(t) - \sigma(t-T_a)\right) + (1 - \frac{t-T_a}{T_a})\left(\sigma(t-T_a) - \sigma(t-2T_a)\right) \\ =& \frac{t}{T_a}\sigma(t) - 2\frac{t-T_a}{T_a}\sigma(t-T_a) + \frac{t-2T_a}{T_a}\sigma(t-2T_a) \quad \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

formulieren. Die Laplace-Transformation dieses Ausrucks liefert

$$\begin{aligned} G_2(s) =& \frac{1}{T_a s^2} - \frac{2}{T_a s^2}e^{-T_a s} + \frac{1}{T_a s^2}e^{-2T_a s} \\ =& \frac{\left(1 - e^{-T_a s}\right)^2}{T_a s^2}. \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

iii. Bestimmen Sie für die in Abbildung 2 dargestellte Impulsfolge $(u_k) = 2\delta(t) + 3\delta(t - T_a)$ das zugehörige Ausgangssignal $y_2(t)$ von Halteglied 2 und skizzieren Sie es in Abbildung 2. 2,5 P.

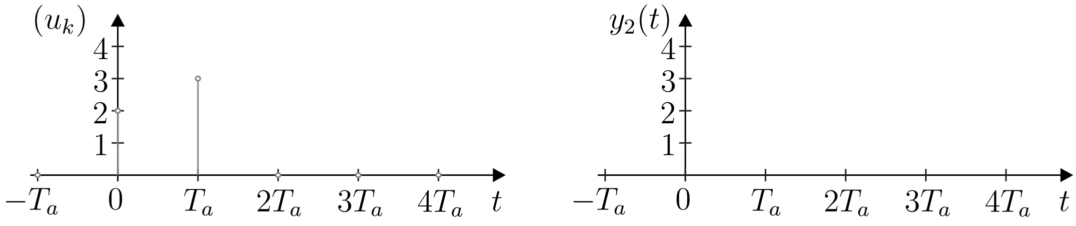


Abbildung 2: Systemantwort auf Impulsfolge.

Lösung:
Die Laplace-Transformation von $u(t) = (u_k) = 2\delta(t) + 3\delta(t - T_a)$ liefert

$$\hat{u}(s) = 2 + 3e^{-T_a s}, \text{(0.5 Punkte)}$$

woraus

$$\begin{aligned}
\hat{y}_2(s) = G_2(s)\hat{u}(s) =& \frac{2}{T_a s^2} - \frac{4}{T_a s^2} e^{-T_a s} + \frac{2}{T_a s^2} e^{-2T_a s} \\
&+ \frac{3}{T_a s^2} e^{-T_a s} - \frac{6}{T_a s^2} e^{-2T_a s} + \frac{3}{T_a s^2} e^{-3T_a s} \\
=& \frac{2}{T_a s^2} - \frac{1}{T_a s^2} e^{-T_a s} - \frac{4}{T_a s^2} e^{-2T_a s} + \frac{3}{T_a s^2} e^{-3T_a s} \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

und in weiterer Folge

$$y_2(t) = \frac{2t}{T_a}\sigma(t) - \frac{t - T_a}{T_a}\sigma(t - T_a) - 4\frac{t - 2T_a}{T_a}\sigma(t - 2T_a) + 3\frac{t - 3T_a}{T_a}\sigma(t - 3T_a) \text{(0.5 Punkte)}$$

resultiert. Das Resultat ist in Abbildung 3 dargestellt (0.5 Punkte).

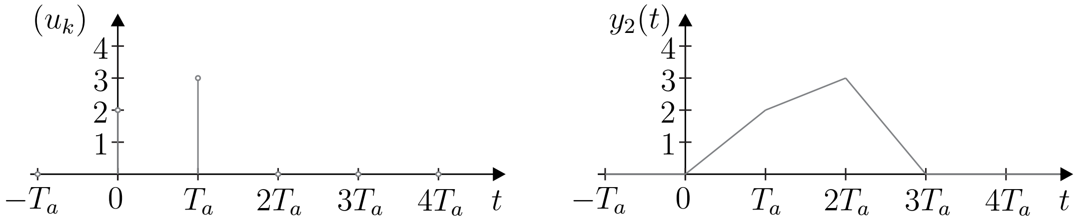


Abbildung 3: Systemantwort auf Impulsfolge - Lösung.

Alternativer Lösungsansatz: Das Problem lässt sich auch mittels Faltungsintegral lösen. Mit der Impulsantwort

$$\begin{aligned}
g_2(t) =& \frac{t}{T_a}\left(\sigma(t) - \sigma(t - T_a)\right) + (1 - \frac{t - T_a}{T_a})\left(\sigma(t - T_a) - \sigma(t - 2T_a)\right) \\
=& \frac{t}{T_a}\sigma(t) - 2\frac{t - T_a}{T_a}\sigma(t - T_a) + \frac{t - 2T_a}{T_a}\sigma(t - 2T_a)
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
y_2(t) =& \int_0^t u(t - \tau) g_2(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^t (2\delta(t - \tau) + 3\delta(t - \tau - T_a)) g_2(\tau) \mathrm{d}\tau \\
=& 2g_2(t) + 3g_2(t - T_a) \\
=& \frac{2t}{T_a}\sigma(t) - 4\frac{t - T_a}{T_a}\sigma(t - T_a) + 2\frac{t - 2T_a}{T_a}\sigma(t - 2T_a) \\
&+ \frac{3(t - T_a)}{T_a}\sigma(t - T_a) - 6\frac{t - 2T_a}{T_a}\sigma(t - 2T_a) + 3\frac{t - 3T_a}{T_a}\sigma(t - 3T_a) \\
=& \frac{2t}{T_a}\sigma(t) - \frac{t - T_a}{T_a}\sigma(t - T_a) - 4\frac{t - 2T_a}{T_a}\sigma(t - 2T_a) + 3\frac{t - 3T_a}{T_a}\sigma(t - 3T_a).
\end{aligned}$$

2. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben: **8,5 P.|**

a) Gegeben ist das lineare, zeitkontinuierliche System **4 P.|**

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \end{aligned} \tag{2}$$

i. Überprüfen Sie mit Hilfe der Erreichbarkeitsmatrix in welchem Wertebereich α und β liegen müssen, damit das System (2) vollständig erreichbar ist. 1 P.|

Lösung:
Die Erreichbarkeitsmatrix lautet

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}.$$

Sie hat vollen Rang wenn $\alpha \neq 0$ erfüllt ist (0.5 Punkte) (β darf beliebige Werte annehmen (0.5 Punkte)). In diesem Fall ist das System (2) vollständig erreichbar.

ii. Für welchen Wertebereich von α und β ist für $u = 0$ die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des Systems (2) global asymptotisch stabil? 1 P.|

Lösung:
Aus dem charakteristischen Polynom der Dynamikmatrix

$$p(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 1 & -\alpha \\ 0 & \lambda - \beta \end{bmatrix}\right) = (\lambda + 1)(\lambda - \beta)$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = \beta$ (0.5 Punkte). Daher ist das System (2) für $\beta < 0$ global asymptotisch stabil, wobei der Parameter α beliebige Werte annehmen darf (0.5 Punkte).

iii. Leiten Sie für $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ die Transitionsmatrix 2 P.|

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 1 - e^{-t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

zum System (2) her.

Lösung:
Aus

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}^3 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

lässt sich

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} (-1)^k & (-1)^{k+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{für } k > 0 \quad \text{(1 Punkt)}$$

schließen. Damit resultiert die Transitionsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k!} & -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k!} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k!} & 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k!} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 1 - e^{-t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsansatz: Wegen (für $u = 0$)

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0$$

lässt sich die Transitionsmatrix gemäß

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi} =& \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}\right\} \\ =& \begin{bmatrix} e^{-t}\sigma(t) & \int_0^t e^{-\tau}\mathrm{d}\tau\sigma(t) \\ 0 & \sigma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 1-e^{-t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\sigma(t)\end{aligned}$$

auch mit Hilfe der (inversen) Laplace-Transformation errechnen.

b) Für das vollständig beobachtbare lineare, zeitkontinuierliche System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}\end{aligned}$$

sind die Zeitverläufe der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}$, der Stellgröße u und der Ausgangsgröße y für $t \geq 0$ bekannt

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad u = t, \qquad y = 1 + 2t + \frac{t^3}{6}.$$

Ermitteln Sie hieraus den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ des Systems. 2 P.|

Lösung:

Aus der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned}y(t) =& \mathbf{c}^T\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau, \\ y(t) =& x_{0,1} + tx_{0,2} + \int_0^t (t-\tau)\tau\mathrm{d}\tau, \\ y(t) =& x_{0,1} + tx_{0,2} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3}, \\ y(t) =& x_{0,1} + tx_{0,2} + \frac{t^3}{6} \quad \text{(1 Punkt)}\end{aligned}$$

lässt sich durch Koeffizientenvergleich mit dem gegebenen Verlauf der Ausgangsgröße $x_{0,1} = 1$ (1 Punkt) und $x_{0,2} = 2$ bestimmen.

c) Entwerfen Sie für das vollständig beobachtbare lineare, zeitdiskrete System 2,5 P.|

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}u_k, \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k\end{aligned}$$

einen Zustandsbeobachter, welcher jeden Anfangsfehler $\mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$ in höchstens 3 Schritten in $\mathbf{0}$ überführt.

Lösung:

Das charakteristische Polynom zur Dynamikmatrix des Fehlersystems $\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T$ ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) = \det\left(\lambda\mathbf{E} - (\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T)\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 - k_1 & -1 & 0 \\ -k_2 & \lambda - 1 & -1 \\ -k_3 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\
= (\lambda - 1 - k_1)(\lambda - 1)\lambda - k_3 - k_2\lambda \\
= \lambda^3 + \lambda^2(-1 - 1 - k_1) + \lambda(1 + k_1 - k_2) - k_3 \\
= \lambda^3 + \lambda^2(-2 - k_1) + \lambda(1 + k_1 - k_2) - k_3.
\end{aligned}
$$

Um auf das gewünschte charakteristische Polynom $p^*(\lambda) = \lambda^3$ zu kommen, muss das Gleichungsssystem

$$
\begin{aligned}
&A: \; -2 - k_1 = 0 \\
&B: 1 + k_1 - k_2 = 0 \\
&C: k_3 = 0
\end{aligned}
$$

gelöst werden. Mit $k_1 = -2$ und $k_3 = 0$ resultiert aus B

$$k_2 = -1.$$

Alternativer Lösungsansatz: Die Aufgabe lässt sich auch mit Hilfe der Formel von Ackermann lösen. Hierzu werden in weiterer Folge die Matrizen

$$
\begin{aligned}
\Phi^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\Phi^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

benötigt. Die Beobachtbarkeitsmatrix lautet

$$\mathcal{O}(\mathbf{c}^T, \mathbf{\Phi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit ihrer Determinante $\det(\mathcal{O}) = 1$ ergibt sich ihre Inverse zu

$$\mathcal{O}(\mathbf{c}^T, \mathbf{\Phi})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

woraus sich für das gewünschte charakteristische Polynom $p^*(\lambda) = \lambda^3$ der Vektor

$$\hat{\mathbf{k}} = -\Phi^3\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ergibt.

3. Für die folgenden Teilaufgaben liegt ein einfacher offener Regelkreis mit Ausgangsstörung zugrunde, siehe Abbildung 4. **10 P.|**

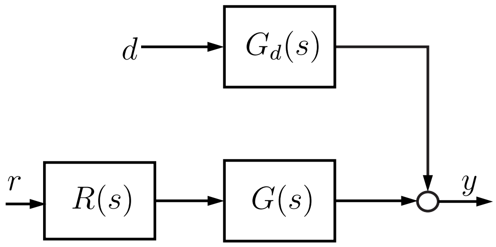


Abbildung 4: Strukturschaltbild des offenen Regelkreises.

a) Es wird angenommen, dass die Störung $d(t)$ messbar ist. **4 P.|**

i. Entwerfen Sie *allgemein* eine exakte Störgrößenkompensation für den *offenen* Kreis in Abbildung 4, indem sie am Ausgang des Reglers $R(s)$ die Größe $R_d(s)d(s)$ subtrahieren. Legen Sie die Übertragungsfunktion $R_d(s)$ so aus, dass der Einfluss der Störung $d(t)$ am Ausgang $y(t)$ exakt kompensiert wird. ***Lösung:*** 2 P.|

$$\begin{aligned} y &= Gu + G_d d \\ u &= Rr - Rdd \end{aligned}$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} u &= Rr - Rdd \\ y &= GRr - GR_d d + Gdd \\ Rd &= \frac{G_d}{G}. \end{aligned}$$

ii. Welche Voraussetzungen müssen die Zähler- und Nennerpolynome von $G(s)$ und $G_d(s)$ hinsichtlich Grad und Lage der Nullstellen erfüllen, damit $R_d(s)$ stabil und realisierbar ist? ***Lösung:*** 2 P.|

$$Rd = \frac{G_d}{G} = \frac{z_d n}{n_d z}.$$

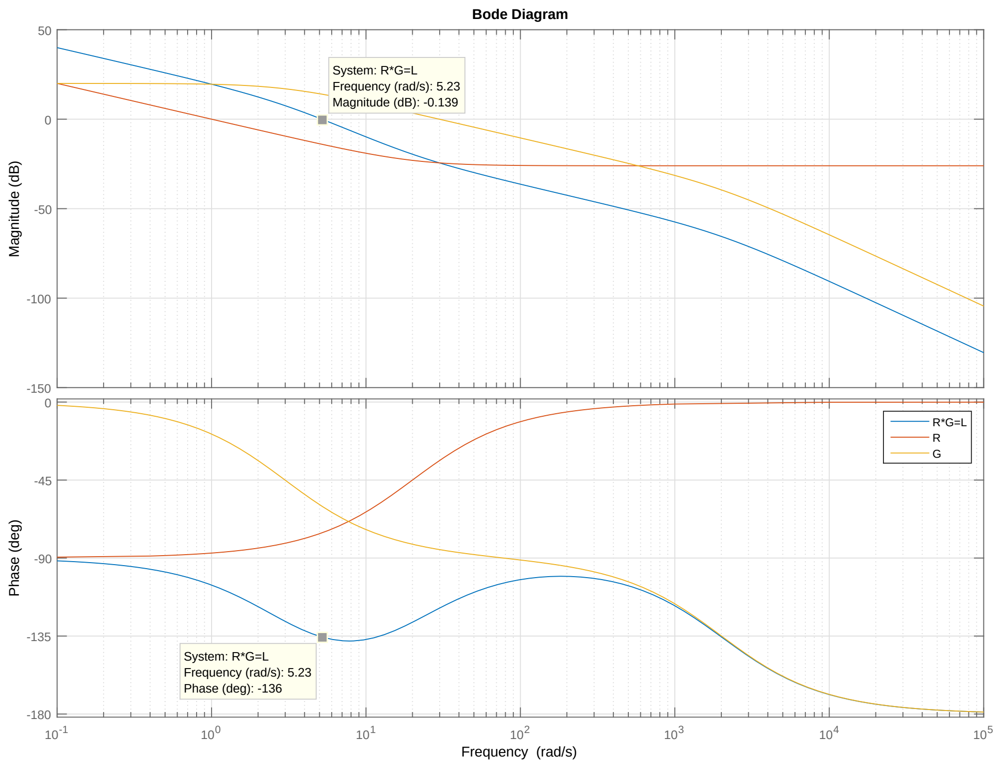
G muss minimalphasig sein, G_d stabil.
$\mathrm{grad}(z_d n) \leq \mathrm{grad}(n_d z)$.

b) Die Übertragungsfunktionen der Strecke und des Reglers in Abbildung 4 lauten **6 P.|**

$$G(s) = \frac{60000}{(s+3)(s+2000)} \quad \text{bzw.} \quad R(s) = K_P + \frac{K_I}{s},$$

mit $K_P = 1/20$ und $K_I = 1$.

i. Zeichnen Sie approximativ das Bode-Diagramm des offenen Kreises $L(s) = R(s)G(s)$ in die angehängte Vorlage. Geben Sie charakteristische Frequenzen an und zeichnen Sie die jeweiligen Asymptoten. 3 P.|
Lösung Teil b): *Regler: PT1 mit $\omega_1 = 20\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ + Integrator*
Strecke: $V = 10$, PT1 mit $\omega_1 = 3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, PT1 mit $\omega_1 = 2000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

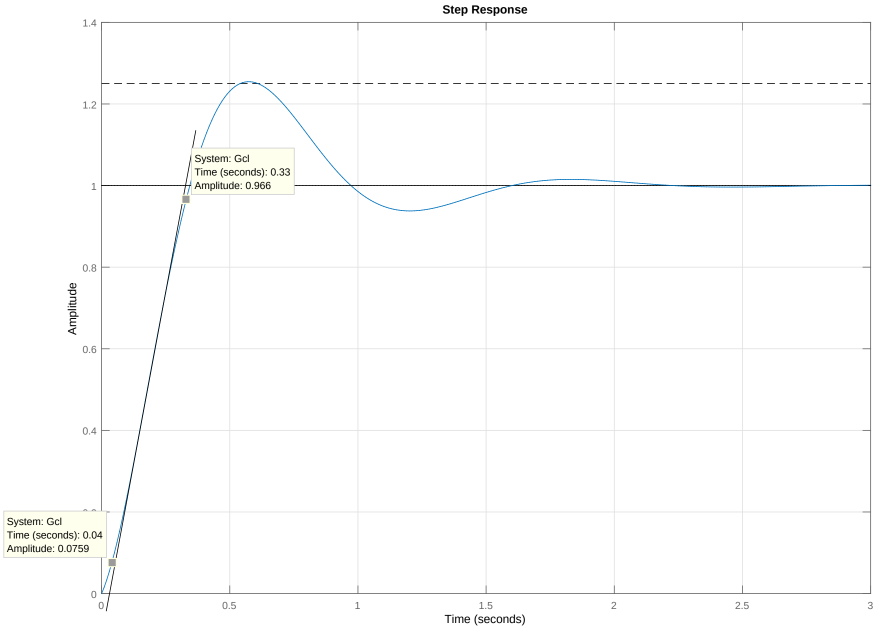


ii. Skizzieren Sie die Sprungantwort $h(t)$ des **geschlossenen Regelkreises** für einen Führungssprung $r(t) = \sigma(t)$ und $d(t) = 0$. Bestimmen Sie dazu mit Hilfe des Bode-Diagramms der offenen Strecke $L(s)$ näherungsweise die Anstiegszeit t_r und das prozentuale Überschwingen *ü*. 2 P.|

Hinweis: Sollten Sie die Parameter nicht aus dem Bode-Diagramm ablesen können, verwenden Sie ersatzweise die Parameter $\omega_c = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ und $\arg L(\mathrm{I}\omega_c) = -135°$.

Lösung Teil c): ω_c *liegt bei* $5\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \rightarrow t_r = 1.5/5 = 0.3\,\mathrm{s}$.

$\arg G(j\omega_c) = -135°, \rightarrow \Delta\Phi = 45°, \rightarrow$ *Überschwingungen* $\text{ü} = 70 - 45 =$



25 %.

iii. Der geschlossene Kreis wird mit einer Führungsrampe $r(t) = t$ beaufschlagt. Bestimmen Sie den zu erwartenden Regelfehler $e_{\infty|r(t)=t}$ für $t \to \infty$. 1 P.|

Lösung Teil d): *Bleibende Regelabweichung (1 Punkt):*

$$e(s) = r(s) - y(s) = (1 - T(s))r(s) = \frac{1}{1 + L(s)} r(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} e(s)s = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s + \lim_{s\to 0} sL(s)} = \frac{1}{10}$$

4. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Begründen Sie Ihre Ergebnisse. **10 P.|**

a) Gegeben ist die Regelstrecke **7,5 P.|**

$$G(s) = \frac{s-1}{s^3 + 2s^2 + s + 4}.$$

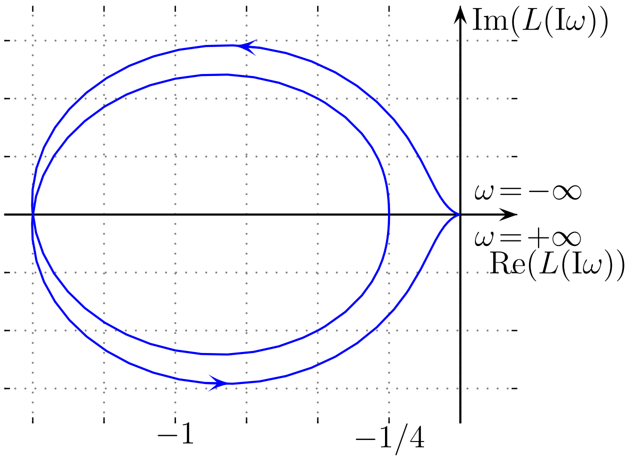
Die Strecke soll in einem Standard-Regelkreis mit einem P-Regler $R(s) = K_P$ geregelt werden.

i. Prüfen Sie mit dem Routh-Hurwitz Verfahren die Stabilität der Strecke $G(s)$. ***Lösung:*** *Routh-Schema:* 2 P.|

$$\begin{array}{lcc} s^3: & 1 & 1 \\ s^2: & 2 & 4 \\ s^1: & -1 & 0 \\ s^0: & 4 & \end{array}$$

Ein VZ-Wechsel in Pivotspalte, Übertragungsfunktion ist nicht stabil.

ii. Die folgende Abbildung zeigt das Bild der imaginären Achse $s = \mathrm{I}\omega$ von $L(s) = R(s)G(s)$ in der $L(\mathrm{I}\omega)$-Ebene für $K_P = 1$. Der so geschlossene Regelkreis ist stabil. *Ortskurve mit Lösung:*



A. Die Strecke $G(s)$ besitzt eine Polstelle mit negativem Realteil und zwei Polstellen mit positivem Realteil. Welche stetige Winkeländerung muss demnach $1 + L(\mathrm{I}\omega)$ haben, wenn der geschlossene Kreis stabil ist? ***Lösung:*** 1,5 P.|

$$\begin{aligned} \Delta \arg(1 + L(\mathrm{I}\omega)) &= (\max(\mathrm{grad}(z_L), \mathrm{grad}(n_L)) - N_-(n_L) + N_+(z_L))\pi \\ &= (3 - 1 + 2)\pi = 4\pi. \end{aligned}$$

B. Markieren Sie den Bildpunkt von $s = \mathrm{I}0$ und den Punkt -1. ***Lösung:*** *s. Ortskurve.* 1,5 P.|

C. Kennzeichnen Sie qualitativ, was für $\omega \to \pm\infty$ geschieht. ***Lösung:*** *s. Ortskurve.* 1,5 P.|

D. Markieren Sie durch Pfeile die Laufrichtung von $L(\mathrm{I}\omega)$ für wachsende ω. *Hinweis:* Nehmen Sie das Ergebnis aus A. zu Hilfe. ***Lösung:*** *s. Ortskurve.* 1 P.|

b) Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen zur Beschreibung eines Systems bestehend aus einer Strecke und einem Stellglied,

$$\dddot{w} = \left(a\mathrm{e}^{w} - \frac{b\ddot{w}}{\sqrt{w}}\right)\sin v + c\dot{v}^2, \quad \dot{p} = \arctan{(wv)}, \quad w^2 z = gv.$$

Dabei können die Größen w und p sowie ihre Ableitungen der Strecke und die Größe v und ihre Ableitung dem Stellglied zugeordnet werden. Die Größe z ist messbar und a, b, c und g sind konstante Parameter.

Bringen Sie die Differentialgleichungen auf die Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$, $y = h(\mathbf{x}, u)$. 2,5 P.|
Führen Sie dazu einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$, eine Eingangsgröße u und eine Ausgangsgröße y ein.

Lösung: *Zustandsvektor (1,25 Punkte):*

$$\mathbf{x} = [w, \dot{w}, \ddot{w}, p, v], \quad u = \dot{v}, \quad y = z,$$

, Zustandssystem (1,25 Punkte):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ (a\mathrm{e}^{x_1} - \frac{bx_3}{\sqrt{x_1}})\sin x_5 + cu^2 \\ \arctan(x_1 x_5) \\ u \end{bmatrix}, \quad y = (gx_5)/x_1^2$$

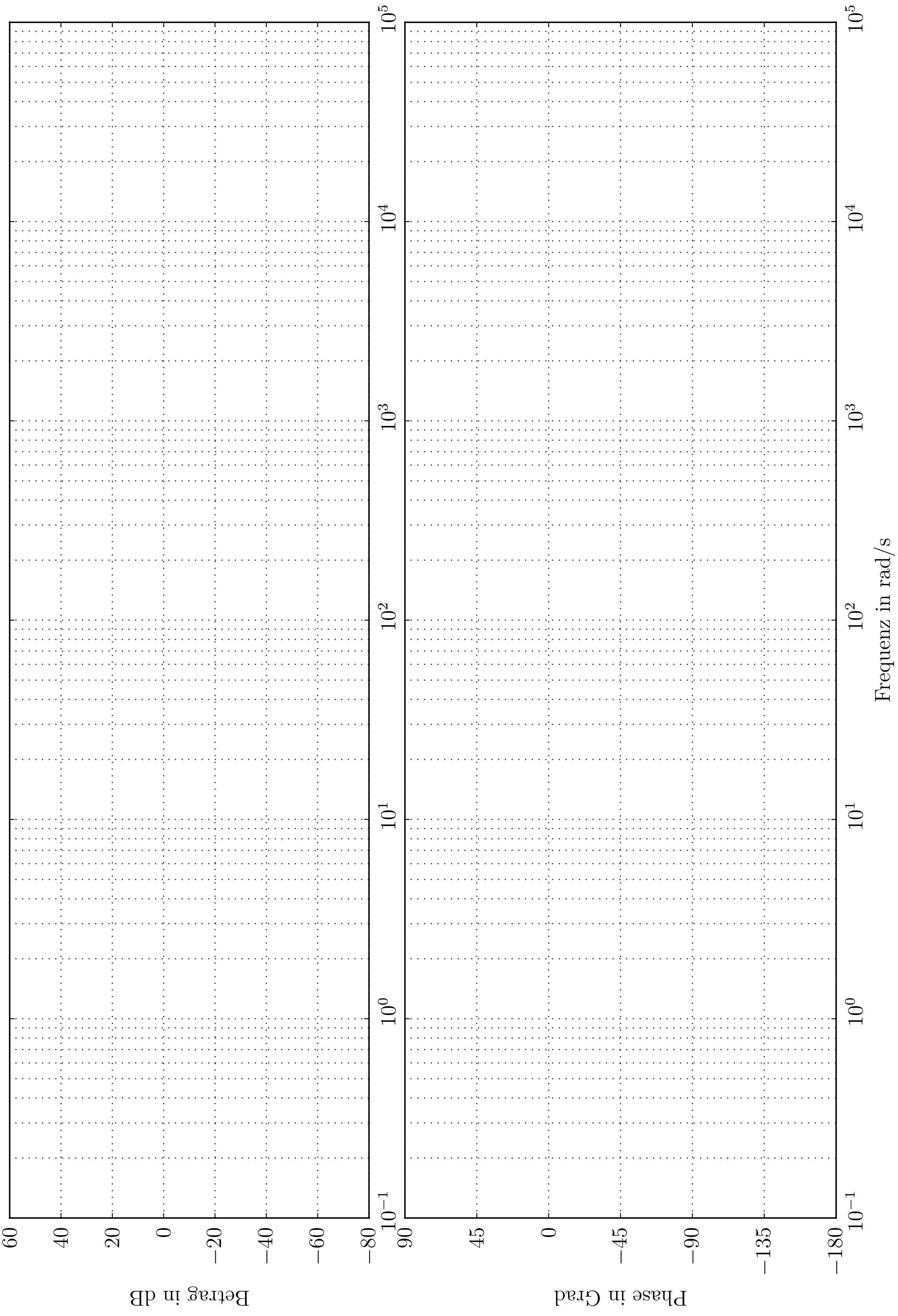


Abbildung 5: Vorlage Bode-Diagramm zu Aufgabe 4