Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 26.06.2015

LÖSUNG

Aufgabe 1: Lösungen zu Aufgabe 1

a) $$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ -\frac{1}{d_1}\left[c_{1,1}(\tilde{x}_1-\tilde{x}_3)+c_{1,2}(\tilde{x}_1-\tilde{x}_3)^3+\sigma_0\tilde{x}_5+\sigma_1(\tilde{x}_2-\sigma_3\tilde{x}_2\tilde{x}_5)+\sigma_2\tilde{x}_2\right] \\ \tilde{x}_4 \\ -\frac{1}{d_3}\left[c_{2,1}(\tilde{x}_1-\tilde{x}_3)+c_{2,2}(\tilde{x}_1-\tilde{x}_3)^3+\sigma_0\tilde{x}_6+\sigma_1(\tilde{x}_4-\sigma_3\tilde{x}_4\tilde{x}_6)+\sigma_2\tilde{x}_4\right] \\ \tilde{x}_2-\sigma_3\tilde{x}_2\tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_4-\sigma_3\tilde{x}_4\tilde{x}_6 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{u_1}{d_1} \\ 0 \\ \frac{u_2}{d_3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{u})}$$

b) Mit der Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ ergibt sich
$\varepsilon_1 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_3$; $\varepsilon_2 = \tilde{x}_2$; $\varepsilon_3 = \tilde{x}_4$; $\varepsilon_4 = \tilde{x}_5$; $\varepsilon_5 = \tilde{x}_6$
und die Systemgleichungen folgen zu

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_2-\varepsilon_3 \\ -\frac{1}{d_1}\left[c_{1,1}\varepsilon_1+c_{1,2}\varepsilon_1^3+\sigma_0\varepsilon_4+\sigma_1(\varepsilon_2-\sigma_3\varepsilon_2\varepsilon_4)+\sigma_2\varepsilon_2\right] \\ -\frac{1}{d_3}\left[c_{2,1}\varepsilon_1+c_{2,2}\varepsilon_1^3+\sigma_0\varepsilon_5+\sigma_1(\varepsilon_3-\sigma_3\varepsilon_3\varepsilon_5)+\sigma_2\varepsilon_3\right] \\ \varepsilon_2-\sigma_3\varepsilon_2\varepsilon_4 \\ \varepsilon_3-\sigma_3\varepsilon_3\varepsilon_5 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\varepsilon})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{u_1}{d_1} \\ \frac{u_2}{d_3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})}.$$

Der erste Satz von Ruhelagen ergibt sich zu
$\varepsilon_{1,\mathrm{RL}} = 0$; $\varepsilon_{2,\mathrm{RL}} = \varepsilon_{3,\mathrm{RL}} = \text{beliebig} \neq 0$; $\varepsilon_{4,\mathrm{RL}} = \varepsilon_{5,\mathrm{RL}} = \frac{1}{\sigma_3}$;
$u_{1,\mathrm{RL}} = \frac{\sigma_0}{\sigma_3} + \sigma_2\varepsilon_{2,\mathrm{RL}}$; $u_{2,\mathrm{RL}} = \frac{\sigma_0}{\sigma_3} + \sigma_2\varepsilon_{3,\mathrm{RL}}$.
Der zweite Satz von Ruhelagen ergibt sich zu
$\varepsilon_{1,\mathrm{RL}} = 0$; $\varepsilon_{2,\mathrm{RL}} = \varepsilon_{3,\mathrm{RL}} = 0$; $\varepsilon_{4,\mathrm{RL}}, \varepsilon_{5,\mathrm{RL}} = \text{beliebig}$;
$u_{1,\mathrm{RL}} = \sigma_0\varepsilon_{4,\mathrm{RL}}$; $u_{2,\mathrm{RL}} = \sigma_0\varepsilon_{5,\mathrm{RL}}$.

c) Die Systemmatrizen ergeben sich für $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{RL}} = \mathbf{0}$ zu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_{1,1}}{d_1} & -\frac{\sigma_1+\sigma_2}{d_1} & 0 & -\frac{\sigma_0}{d_1} & 0 \\ -\frac{c_{2,1}}{d_3} & 0 & -\frac{\sigma_1+\sigma_2}{d_3} & 0 & -\frac{\sigma_0}{d_3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{d_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2:

a) Die Übertragungsfunktion des PI-Reglers lautet

$$R(z) = k_p + \frac{k_I T_a}{z-1}.$$

b) Die Reglerparameter im q-Bereich berechnen sich zu

$$V_I = k_I$$
$$T_I = \frac{k_p}{k_I} - \frac{T_a}{2}.$$

c) Die z-Übertragungsfunktion der Strecke lautet

$$G(z) = \frac{3}{2}\frac{1}{z - \frac{1}{4}}.$$

d) Unter der Voraussetzung, dass der geschlossene Kreis stabil ist, wird die sprungförmige Störung stationär unterdrückt, wenn das Nennerpolynom die Struktur

$$n_G(z) = (z-1)\, n_0(z)$$

aufweist, mit einem nicht näher spezifierbaren Polynom $n_0(z)$. Die Strecke muss somit integrales Verhalten aufweisen.

e) Der Regelkreis kann nur für $|a| < 1$ mit dem P-Regler $R(z) = k_p$ stabilisiert werden. In diesem Fall muss die Anforderung

$$|k_p| < 1 - a$$

erfüllt sein.

Aufgabe 3:

a) Lösungen zum ersten Blockschaltbild

i. Das System lässt sich zu $F_a(s) = \frac{F_1F_2(1-F_3F_4)}{F_1F_2F_3F_4+F_1F_3-F_3F_4+1}$ bzw. $F_a(s) = \frac{5(s-4)}{s^2+7s+26}$ vereinfachen.

ii. Die Übertragungsfunktion $F_a(s)$ ist stabil, da beim Nennerpolynom (2.Ord.) alle Koeffizienten gleiches Vorzeichen besitzen.

iii. Als Eingangssignal wird ein Sprung angenommen. Für $t \to 0$ ergibt sich somit $|F_a| = 0; \arg(F_a(I\infty)) = -90°$ und für $t \to \infty$ folgt $|F_a| = 10/13$; $\arg(F_a(I0)) = 180°$.

b) Smith Prädiktor

i. Der Ausgang eines Smith Prädiktors folgt allgemein zu

$$y = \underbrace{\frac{RG\mathrm{e}^{-sT_t}}{1 + RG_m - RG_m\mathrm{e}^{-sT_m} + RG\mathrm{e}^{-sT_t}}}_{T_{r,y}} + \underbrace{\frac{1 + RG_m - RG_m\mathrm{e}^{-sT_m}}{1 + RG_m - RG_m\mathrm{e}^{-sT_m} + RG\mathrm{e}^{-sT_t}}}_{T_{d,y}}.$$

ii. Bei genauer Kenntnis der Strecke, also mit $G_m = G$ und $T_m = T_t$ folgt ais i

$$y = \underbrace{\frac{RG\mathrm{e}^{-sT_t}}{1 + RG}}_{T_{r,y}} + \underbrace{\frac{1 + RG - RG\mathrm{e}^{-sT_t}}{1 + RG}}_{T_{d,y}}.$$

Aus der Abbildung 4a ergibt sich

$$T_{r,y} = \frac{RG\mathrm{e}^{-sT_t}}{1 + RG}$$

und aus Abbildung 4b

$$T_{r,y} = 1 - \frac{RG\mathrm{e}^{-sT_t}}{1 + RG}.$$

Aufgabe 4:

a) Die z-Transformierte des Ausgangs lautet

$$y_z(z) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \left(z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi} \right)^{-1} \left(z\mathbf{x}_0 + \mathbf{\Gamma} u_z(z) \right) + d u_z(z)$$

mit der z-Transformierten $u_z(z)$ des Eingangssignals.

b) Die Dynamikmatrix des zeitdiskreten Systems lautet

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{16} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

c) Die Beobachterverstärkung lautet

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{4} + \alpha \right) \\ -\frac{1}{\gamma} \left(1 + \beta \right) \end{bmatrix}.$$