Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 02.10.2015

LÖSUNG

Aufgabe 1:

a) Lösung zur Unteraufgabe

i. Ruhelagen des Systems

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} -2 \\ -\ln(6) \end{bmatrix}$$

ii. Linearisiertes System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -11 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\ln(6) \end{bmatrix}\Delta u$$
$$\Delta y = \begin{bmatrix} \frac{-4}{\sqrt{4+\ln(6)^2}} & \frac{-2\ln(6)}{\sqrt{4+\ln(6)^2}} \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x}$$

b) Lösung zur Unteraufgabe

i. Übertragungsfunktion: Man beachte, dass bei der Inversion der Matrix $s\mathbf{E} - \mathbf{A}$ nur der Eintrag in der ersten Zeile und dritten Spalte der Adjungierten berechnet werden muss!

$$G(s) = \frac{-1 + 7s}{(s+1)(s+3)^2}$$

c) Impulsantwort

$$g(t) = \left(-2\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-3t} + 11t\mathrm{e}^{-3t}\right)\sigma(t)$$

Aufgabe 2:

a) Lösung zur Unteraufgabe

i. Die Systemmatrix ist in Blockstruktur gegeben. Die Eigenwerte der linken oberen 3x3 Matrix liegen in der linken Seite der komplexen Ebene und können direkt abgelesen werden. Somit muss nur noch die rechte untere 3x3 Matrix $\mathbf{A}_{ru}$ näher untersucht werden. Das charakteristische Polynom dieser Untermatrix ergibt sich zu

$$\det(\lambda\mathbf{E}_{3\times 3} - \mathbf{A}_{ru}) = \left(\lambda^2 + 3\lambda - 22\right)(\lambda + 5)\,.$$

Aus dem negativen Vorzeichens folgt sofort, dass mindestens 1 Eigenwert in der rechten Halbebene liegt. Somit ist das System **nicht** asymptotisch stabil.

ii. x_3 ist der nicht erreichbare Zustand. Er ist weder direkt über den Eingang u noch indirekt über die anderen fünf Zustände beeinflussbar.

iii. Sprungfähig, da $d = 25 \neq 0$.

b) Lösung zur Unteraufgabe

i. Aus $\det(\mathbf{H}_d) = -1 \neq 0$ folgt die vollständige Erreich- und Beobachtbarkeit.

ii. $g_0 = 0$ da das System nicht sprungfähig ist. Aus den Markov-Parameter folgt mit $g_k = m_k$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ die Impulsantwort zu

$$(g_k) = (0, \alpha, \beta, 1, 0, 0, \dots) = \alpha\delta_{k-1} + \beta\delta_{k-2} + \delta_{k-3}$$

und die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\alpha z^2 + \beta z + 1}{z^3}.$$

iii. Die eingeschwungene Lösung ergibt sich zu

$$y_\infty = |G(e^{j\frac{\pi}{4}})| \sin\left(\frac{\pi}{4}k + \arg\left(G(e^{j\frac{\pi}{4}})\right)\right)$$

mit

$$|G(e^{j\frac{\pi}{4}})| = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$\arg\left(G(e^{j\frac{\pi}{4}})\right) = 45^\circ - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) = -\arctan\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

iv. Die zwei gleichwertigen Lösungen folgen zu

A. Steuerbarkeitsnormalform:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

B. Beobachtbarkeitsnormalform:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

v. Abhängig von der gewählten Minimalrealisierung berechnet sich der Anfangsvektor zu

A. Steuerbarkeitsnormalform:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \end{bmatrix}$$

B. Beobachtbarkeitsnormalform:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3:

a) Über die z-Übertragunsgfunktion $G(z) = \frac{4(z+1)}{67z^2-96z+37}$ ergibt sich mit $z = \frac{1+\frac{q}{\Omega_0}}{1-\frac{q}{\Omega_0}}$ die gesuchte q-Übertragungsfunktion zu

$$G^{\#}(q) = \frac{1-\frac{q}{\Omega_0}}{1+\frac{15}{2}\frac{q}{\Omega_0}+25\left(\frac{q}{\Omega_0}\right)^2}$$

b) Reglerentwurf

i. Der offene Regelkreis muss mindestens einen Pol im Ursprung besitzen, daher $\rho \geq 1$. Für die weitere Betrachtung gilt $\rho = 1$.

ii. $\Omega_c = 0.5\mathrm{s}^{-1}$, $\Phi = 69°$: $\arg\left(L^{\#}(j\Omega_c)\right) = -141° \rightarrow$ Phase muss um 30° angehoben werden. Somit folgt $T_I = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{s}^{-1}$

iii. Die Verstärkung folgt zu $V_I = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{27}{2\cdot 101}}$

c) Durch umformen der Angabe auf

$$G(s) = 10\frac{\left(1+\frac{s}{10^4}\right)\left(1-\frac{s}{10^4}\right)}{1+2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{s}{100}+\left(\frac{s}{100}\right)^2}$$

folgt direkt der in Abbildung 1 dargestellte Betrags- und Phasengang.

Aufgabe 4:

a) Lösung zur Unteraufgabe

i. Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 11 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

Determinante der Beobachtbarkeitsmatrix $\det(\mathcal{O}) = -3 \neq 0$, daher ist das System vollständig beobachtbar.

ii. Beobachterverstärkungsmatrix $\hat{\mathbf{k}}$

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} \\ -\frac{7}{8} \\ -\frac{77}{16} \end{bmatrix}$$

b) Das System muss offensichtlich nicht beobachtbar sein, wobei der nicht beobachtbare Teil des Systems instabil ist. Eine mögliche Wahl ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Man sieht einfach, dass das System nicht asymptotisch stabil ist, vollständig erreichbar ist und dass die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

BIBO-stabil ist.

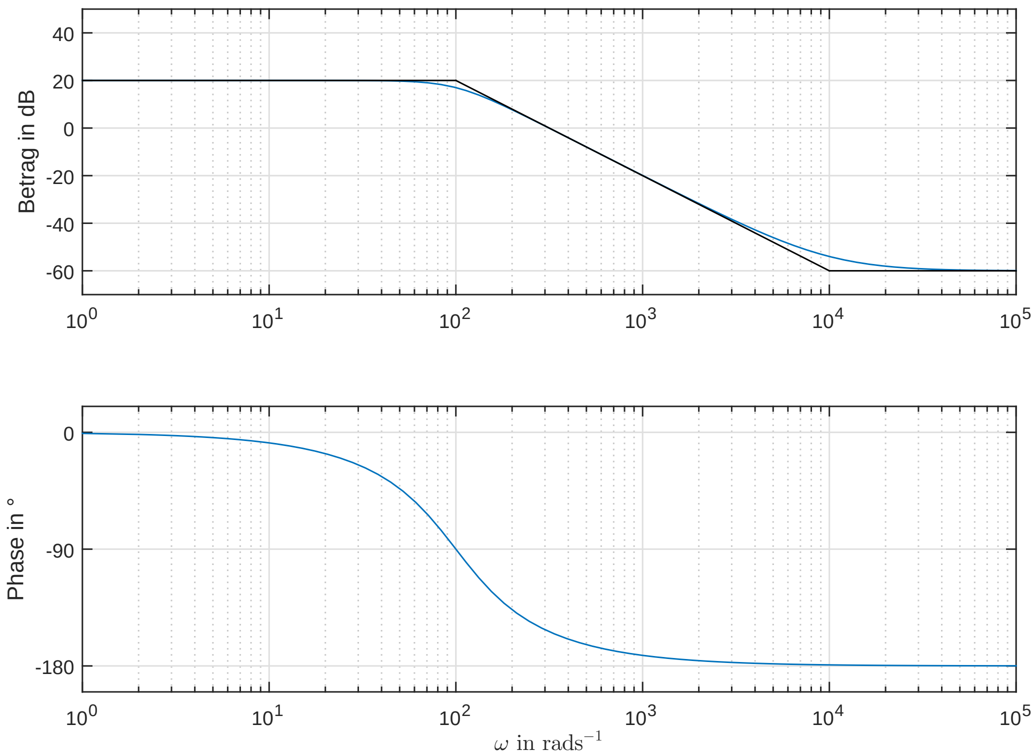

Abbildung 1: Betrags- und Phasengang zu Aufgabe 3c