Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 05.02.2016

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	11	10	13	6	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ Do., 11.02.2016 ☐ Mo., 15.02.2016 ☐ Di., 16.02.2016

Viel Erfolg!

1. **Kontinuierliche Systeme**
   Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben: 11 P.|

   a) Gegeben ist das nichtlineare System

$$\dot{x}_1 = x_1^2 x_2 + \sqrt{2}\sin u,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 x_2^2 + \sqrt{2}\cos u,$$
$$y = \arctan\frac{x_2}{x_1} + 2u^2.$$

   i. Bestimmen Sie die Ruhelage $(\mathbf{x}_R, y_R)$ für $u = u_R = \pi/4$. 1.5 P.|

   ii. Linearisieren Sie das System für $u = u_R$ um die Ruhelage und stellen Sie das sich ergebende System in der Form 2.5 P.|

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u,$$
$$\Delta y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x} + d\Delta u$$

   dar.
   Hinweis: Es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   b) Zeigen Sie, dass die Transitionsmatrix des linearen autonomen Systems 2 P.|

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\mathbf{z}, \qquad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

   durch

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{bmatrix}$$

   gegeben ist.

   c) Gegeben ist das lineare autonome System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   i. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$, um das System auf Jordansche Normalform zu transformieren. Geben Sie das transformierte System in der Form 3.5 P.|

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}, \qquad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

   an. **Hinweis:** Eine Wurzel des charakteristischen Polynoms lässt sich einfach herausheben.

   ii. Berechnen Sie nun die Lösung $\mathbf{z}(t)$. 1.5 P.|

2. **Regelkreis**
Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben: 10 P.|

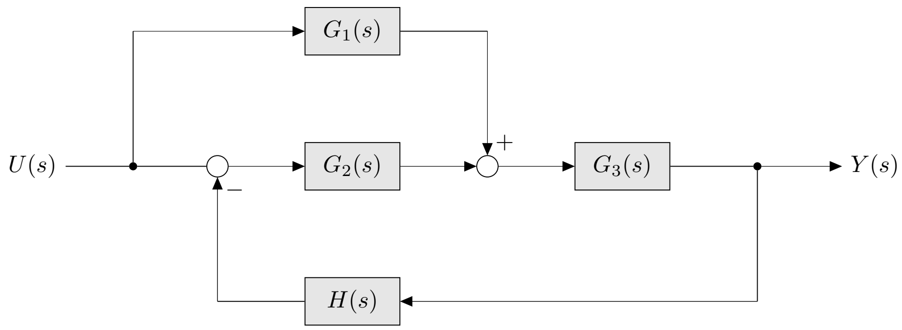

Abbildung 1: Regelkreis.

a) Gegeben ist der in Abbildung 1 dargestellte Regelkreis.

i. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ als Funktion allgemeiner Ausdrücke für $G_1(s), G_2(s), G_3(s)$ und $H(s)$ und vereinfachen Sie diese soweit als möglich. 2 P.|

ii. Nehmen Sie nun an, dass sich $G(s)$ zu 2 P.|

$$G(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 + 4s^2 + (K+1)s + 2K - 6}$$

mit einer reellen Konstanten K ergibt. Verwenden Sie ein geeignetes numerisches Stabilitätskriterium zur Bestimmung des Wertebereichs von K, damit $G(s)$ BIBO-stabil ist.

iii. Berechnen Sie die eingeschwungene Ausgangsgröße für die Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t) + 2\sin(3t) - 2e^{-2t}$ und $K = 8$. 2 P.|

b) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$L(s) = K \frac{4(s+1)^2}{s(s-10)^2}$$

des offenen Standardregelkreises. Die entsprechenden Nyquist-Ortskurven sind in Abbildung 2 für $K = 4$ und $K = 6$ dargestellt.

i. Zeichnen Sie die Grenzwerte 2 P.|

$$\lim_{\omega \to +0} L(I\omega), \quad \lim_{\omega \to -0} L(I\omega), \quad \lim_{\omega \to +\infty} L(I\omega), \quad \lim_{\omega \to -\infty} L(I\omega).$$

in Abbildung 2 ein und markieren Sie den Durchlaufsinn durch Pfeile.

ii. Untersuchen Sie die geschlossenen Regelkreise für $K = 4$ und $K = 6$ mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums auf BIBO-Stabilität. 2 P.|

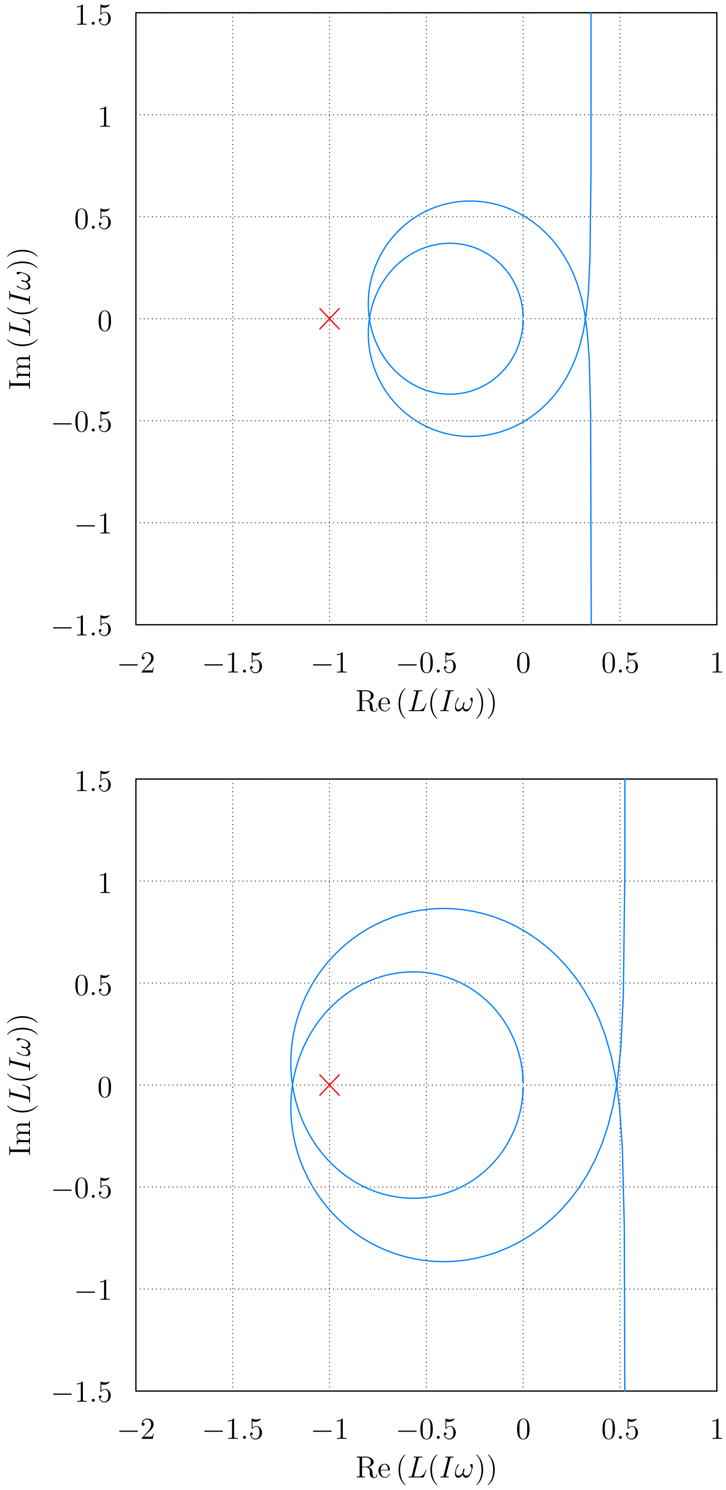

Abbildung 2: Nyquist-Ortskurven der Übertragungsfunktion aus Aufgabe 2b).
Oben: $K = 4$, Unten: $K = 6$.

3. **Steuerung und Regelung**

Gegeben ist das lineare zeitinvariante Abtastsystem 13 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \tag{1a}$$

$$y_k = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + du_k \tag{1b}$$

mit

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1c}$$

und der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{-2z^2 + 3z - 4}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{3}{2}}. \tag{1d}$$

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) i. Zeigen Sie, dass das System nicht vollständig erreichbar ist. Ist es vollständig **steuerbar**? 2 P.|

ii. Was muss für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = [-3\ 2\ x_{3,0}]^{\mathrm{T}}$ gelten, damit der Zustand $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ in kürzest möglicher Zeit erreicht werden kann? Geben Sie auch die dazu notwendige Steuerfolge u_k an. 3 P.|

iii. Die Eigenwerte der Dynamikmatrix sind durch $\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \pm I\frac{\sqrt{15}}{4}\}$ gegeben. Argumentieren Sie anhand dieser und der Übertragungsfunktion, ob ein Zustandsregelgesetz der Form $u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k$ geeignet ist, um die Ruhelage $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}$ asymptotisch zu stabilisieren. 2 P.|

b) i. Die Impulsantwort des Systems lautet $g_k = \{g_0, 0, -1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, ...\}$. Bestimmen Sie die unbekannten Komponenten $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = [c_1\ c_2\ 0]^{\mathrm{T}}$ und d des Systems (1b) sowie den Wert g_0. 2.5 P.|

ii. Für ein beliebiges System der Form (1a)-(1b) mit der Systemordnung N soll ein Luenberger Beobachter entworfen werden, so dass der Beobachtungsfehler $\mathbf{e}$ so **schnell als möglich** verschwindet. Zeigen Sie **allgemein** anhand der Fehlerdynamik wie viele Abtastschritte hierfür höchstens notwendig sind. 1 P.|

iii. Berechnen Sie nun den Vektor $\hat{\mathbf{k}}$ des unter Punkt ii beschriebenen Beobachters für das gegebene System (1c). 2.5 P.|
Hinweis: Falls Sie Punkt i. nicht gelöst haben, verwenden Sie den Vektor $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = [2\ 0\ 0]$.

4. **Abtastsysteme** 6 P.|

a) i. Bestimmen Sie, welche der q-Übertragungsfunktionen 3 P.|

$$G_1^{\#}(q) = \frac{-5q^2 + 4q + 1}{q + 3q^2} \qquad G_2^{\#}(q) = \frac{2q^2 + 6q + 1}{q + 2q^2}$$
$$G_3^{\#}(q) = \frac{4q^2 + 7q + 1}{q + 3q^2} \qquad G_4^{\#}(q) = \frac{-4q^2 + 3q + 1}{q + 2q^2}$$

mit der Abtastzeit $T_a = 2\mathrm{s}$ zum System mit der s-Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{6s^2 + s(2 + 5\ln(2)) + \ln(2)}{s(\ln(2) + 2s)}$$

gehört. Begründen Sie **für jede andere** Übertragungsfunktion, warum diese nicht zur Übertragungsfunktion $G(s)$ passt.
Hinweis: Es gilt $\tanh(x) = 1 - \frac{2}{\exp(2x)+1}$.

ii. Wie groß ist der Verstärkungsfaktor der gewählten Übertragungsfunktion? 1 P.|

b) Gegeben ist das lineare zeitinvariante Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Nehmen Sie nun an, dass $u_k = 0$ gilt. Wie muss der Anfangszustand $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ gewählt werden, damit für den Verlauf der Lösung $\mathbf{x}_k = \gamma^k \mathbf{x}_0$ gilt? Welchem Wert entspricht γ? Begründen Sie Ihre Aussage. 2 P.|