Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 05.02.2016

LÖSUNG

Aufgabe 1:

a) Lösung zur Unteraufgabe

i.

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}^T, \quad y_R = \pi/4 + \pi^2/8.$$

ii.

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\Delta u,$$
$$\Delta y = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix} + \pi\Delta u.$$

b) Es gilt

$$\mathbf{\Phi}(t) = \exp(\mathbf{J}t) = \exp((\lambda\mathbf{E} + \mathbf{N})t)$$

mit

$$\lambda\mathbf{E} = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Die Matrix $\mathbf{N}$ ist nilpotent der Ordnung 2. Somit gilt

$$\exp(\mathbf{N}t) = \mathbf{E} + \mathbf{N}t = \begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Weil $\lambda\mathbf{E}$ und $\mathbf{N}$ kommutieren, folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}(t) &= \exp(\lambda\mathbf{E}t)\exp(\mathbf{N}t)\\ &= \begin{bmatrix}e^{\lambda t} & 0\\ 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

c) Lösung zur Unteraufgabe

i. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von $\mathbf{A}$ lauten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$. Die algebraische und geometrische Vielfachheit von λ_1 beträgt 2 bzw. 1. Die algebraische und geometrische Vielfachheit von λ_2 ist 1. Eine mögliche Wahl der Transformationsmatrix lautet

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix} \text{ mit der inversen Matrix } \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Damit ergeben sich $\tilde{\mathbf{A}}$ und $\mathbf{z}_0$ zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}.$$

ii. Die Lösung lautet

$$\mathbf{z}(t) = \exp(\tilde{\mathbf{A}}t)\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2:

a) Lösung zur Unteraufgabe

i.

$$G(s) = \frac{G_3(s)\big(G_1(s) + G_2(s)\big)}{1 + H(s)G_2(s)G_3(s)}.$$

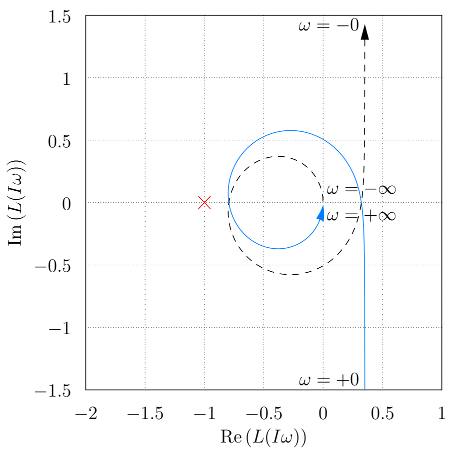
ii. Mit Hilfe des Routh-Hurwitz-Kriteriums folgt $K > 3$.

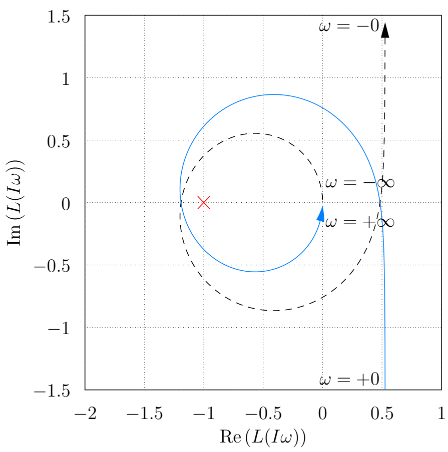
iii. Die Ausgangsgröße im eingeschwungenen Zustand lautet

$$y(t) = \frac{1}{5} + \frac{7}{13}\sin(3t).$$

b) Lösung zur Unteraufgabe

i. Nyquist-Ortskurven für $K = 4$ (links) und $K = 6$ (rechts).





ii. Für $K = 4$ lautet die stetige Winkeländerung $\Delta \arg(1 + L(I\omega)) = \pi$. Für $K = 6$ lautet die stetige Winkeländerung $\Delta \arg(1 + L(I\omega)) = 5\pi$. Des Weiteren gilt

$$\big[\max(\mathrm{grad}(z_L), \mathrm{grad}(n_L)) - N_-(n_L) + N_+(n_L)\big]\pi = \big[\max(2,3) - 0 + 2\big]\pi = 5\pi.$$

Mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums folgt, dass der geschlossene Regelkreis für $K = 4$ instabil und für $K = 6$ stabil ist.

Aufgabe 3:

a) Lösung zur Unteraufgabe

i. Die Erreichbarkeitsmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

hat den Rang 2 und die Systemmatrix $\mathbf{\Phi}$ ist regulär, somit ist das System nicht vollständig erreichbar und auch nicht vollständig steuerbar.

ii. Damit der Anfangszustand im erreichbaren Unterraum liegt, muss $x_{3,0} = -5$ gelten. Die Steuerfolge ergibt sich zu $u_0 = -\frac{3}{2}$ und $u_1 = -\frac{9}{2}$.

iii. Da die Erreichbarkeitsmatrix den Rang 2 hat, ist bekannt, dass zumindest ein Eigenwert des Systems nicht durch das Zustandsregelgesetz beeinflusst werden kann. Die konjugiert komplexe Polstelle der Übertragungsfunktion entspricht dem konjugiert komplexen Eigenwert der Matrix $\mathbf{\Phi}$. Dieser kann daher durch die Zustandsregelung beeinflusst werden. Der Eigenwert $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ ist somit jener der nicht beeinflusst werden kann, liegt aber innerhalb des Einheitskreises. Somit ist die Ruhelage durch das Zustandsregelgesetz asymptotisch stabilisierbar.

b) Lösung zur Unteraufgabe

i. Die Ausgangsgleichung lautet

$$y_k = [0\ 2\ 0]\mathbf{x}_k - 2u_k$$

und $g_k = d = -2$.

ii. Die Fehlerdynamik des Beobachtungsfehlers lautet

$$\mathbf{e}_{k+1} = \left(\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{e}_k.$$

Somit ergibt sich der Beobachtungsfehler nach N Abtastschritten zu

$$\mathbf{e}_N = \left(\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right)^N \mathbf{e}_0.$$

Wenn die Matrix $\mathbf{\Phi}$ nilpotent der Ordnung N ist, gilt

$$\left(\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right)^N = \mathbf{0}$$

und somit $\mathbf{e}_N = \mathbf{0}$.

iii.

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{15}{8} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Aufgabe 4:

a) Lösung zur Unteraufgabe

i. $G_3^{\#}(q)$ gehört zur Übertragungsfunktion $G(s)$. $G_1^{\#}(q)$ ist nicht sprungfähig und $G_2^{\#}(q)$ sowie $G_4^{\#}(q)$ haben eine falsche Polstelle.

ii.

$$V = 1$$

b) Aus

$$\mathbf{x}_1 = \gamma\mathbf{x}_0 = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_0$$

folgt $(\mathbf{\Phi} - \gamma\mathbf{E})\,\mathbf{x}_0 = 0$. Somit ist γ ein Eigenwert von $\mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{x}_0$ der zugehörige Eigenvektor.