Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 11.03.2016

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	9	13	9	9	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ Mo., 21.03.2016 ☐ Di., 22.03.2016

Viel Erfolg!

1. **Kontinuierliche Systeme**

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben: 9 P.|

Gegeben ist das nichtlineare System

$$(ma^2 + J)\ddot{\theta} + d\dot{\theta} - mga\sin(\theta) = ma\cos(\theta)u \tag{1a}$$

$$\ddot{w} = u \tag{1b}$$

mit dem Eingang u, den Zuständen θ und w und den konstanten Parametern g, m, a, J und d.

a) Führen Sie einen Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und geben Sie das System (1) in der Form 2 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

an. *Die Lösung lautet:*

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}\theta & \dot{\theta} & w & \dot{w}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \ , \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{ma^2 + J}\Big(- dx_2 + mga\sin(x_1) + ma\cos(x_1)u\Big) \ , \\
\dot{x}_3 &= x_4 \ , \\
\dot{x}_4 &= u
\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems (1). *Die Lösung lautet:* 1.5 P.|

$$u_R = 0 \ , \quad x_{1,R} = k\pi \, , k \in \mathbb{Z} \ , \quad x_{2,R} = 0 \ , \quad x_{3,R} = \text{beliebig} \ , \quad x_{4,R} = 0$$

c) Linearisieren Sie das System (1) um die Ruhelage ($u_R = 0, \mathbf{x}_R = \mathbf{0}$) und stellen Sie das sich ergebende System in der Form 2.5 P.|

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u$$

dar.

Die Lösung lautet:

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\\ \Delta\dot{x}_3\\ \Delta\dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{mga}{ma^2+J} & \frac{-d}{ma^2+J} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\\ \Delta x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{am}{ma^2+J}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\Delta u,$$

d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen vom Eingang Δu auf die Ausgänge Δw und $\Delta\theta$. *Die Lösung lautet:* Die Übertragungsfunktion vom Eingang Δu auf den Ausgang Δs ergibt sich unmittelbar aus $\ddot{w} = u$ zu 2 P.|

$$G_1(s) = \frac{\Delta w}{\Delta u} = \frac{1}{s^2}$$

Die Übertragungsfunktion vom Eingang Δu auf den Ausgang $\Delta\theta$ lautet

$$\begin{aligned}
G_1(s) = \frac{\Delta\theta}{\Delta u} &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left(s\mathbf{E} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{mga}{ma^2+J} & \frac{-d}{ma^2+J}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \frac{am}{ma^2+J}\end{bmatrix} \\
&= \frac{am}{(ma^2 + J)s^2 + ds - mga}
\end{aligned}$$

e) Charakterisieren Sie die Stabilität der Differentialgleichung (1b). Begründen Sie ihre Antwort ausführlich. *Die Lösung lautet:* Die Differentialgleichung (1b) stellt einen Doppelintegrator, mit den Eigenwerten $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2$, dar. Dieser ist instabil. 1 P.|

2. **Regelkreis**
Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben: 13 P.|

a) Die Abbildungen 1 und 2 zeigen zwei Regelkreise.

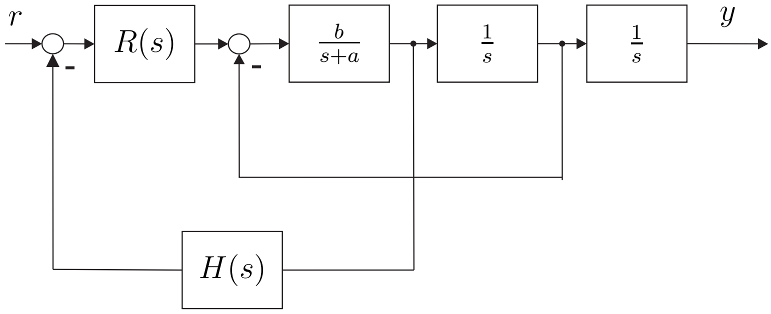


Abbildung 1: Regelkreis (a).

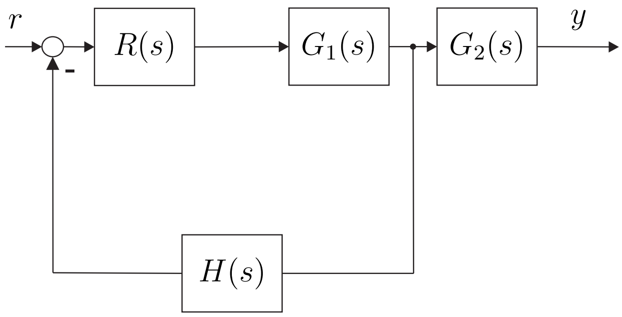


Abbildung 2: Regelkreis (b).

i. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ nach Abbildung 2 so, dass die Regelkreise (a) und (b) äquivalent bezüglich des Eingangs-Ausgangs-Verhaltens sind. 3 P.|
Hinweis: Zeichnen Sie dazu den Regelkreis nach Abbildung (1) in geeigneter Form um. *Die Lösung lautet:*

$$G_1 = \frac{bs}{s(s+a)+b} \quad \text{und} \quad G_2 = \frac{1}{s^2}$$

ii. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion vom Eingang r zum Ausgang y für $H(s) = h$ und $R(s) = k/(s+w)$. *Die Lösung lautet:* 1 P.|

$$G(s) = G_2(s)\frac{R(s)G_1(s)}{1 + H(s)R(s)G_1(s)} = \frac{bk}{s^4 + (w+a)s^3 + (bkh + aw + b)s^2 + bws}$$

b) Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{4+s}{2s^3 + 8s^2 + 2(p+1)s + 4p - 12} \tag{2}$$

mit dem reellen Parameter p.

i. Überführen Sie die Übertragungsfunktion (2) in die Beobachtbarkeitsnormalform. *Die Lösung lautet:* Die Normalform lautet: 2 P.|

$$G(s) = \frac{2 + 0.5s}{(-6+2p) + (p+1)s + 4s^2 + s^3} = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + s^3}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(-6+2p) \\ 1 & 0 & -(p+1) \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}\end{aligned}$$

ii. Verwenden Sie ein geeignetes numerisches Stabilitätskriterium zur Bestimmung des Wertebereichs von p, sodass die Übertragungsfunktion (2) BIBO-stabil ist. *Die Lösung lautet:* Mithilfe des Routh-Hurwitz-Kriteriums folgt $p > 3$. 3 P.

c) Ein lineares, zeitinvariantes System der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

wird mit Hilfe einer regulären Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$ auf Jordansche Normalform transformiert. Es bezeichnen $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ und $\tilde{\mathbf{C}}$ die Systemmatrizen des transformierten Systems. Folgende Matrizen sind bekannt

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

wobei $\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)$ die Transitionsmatrix des transformierten Systems ist.

i. Bestimmen Sie die Eigenwerte des Systems. Ist das System stabil? Begründen Sie ihre Antwort. *Die Lösung lautet:* Nein, da $\lambda_1 = 2 > 0$ und $\lambda_2 = -4$. 1 P.|

ii. Berechnen Sie die Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des transformierten Systems. *Die Lösung lautet:* 1 P.|

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

iii. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$. *Die Lösung lautet:* 1 P.|

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

iv. Geben Sie die Systemmatrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ des Originalsystems an. *Die Lösung lautet:* 1 P.|

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. **FKL und Stabilität**

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. 9 P.|

Aufgabe c) kann unabhängig von a) und b) gelöst werden.

a) Entwerfen Sie für die Streckenübertragungsfunktion 3 P.|

$$G(s) = \frac{2}{s\left(\frac{s}{3}+1\right)}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises den Spezifikationen $t_r = 1.5\,\mathrm{s}$, $\ddot{u} = 10\%$ und $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$ genügt. Benutzen Sie dazu einen Regler minimaler Ordnung der Form

$$R(s) = V\frac{z(s)}{s^\rho(1+sT_R)}, \quad \rho \in \mathbb{N}_0$$

und wählen Sie $z(s)$ und ρ passend und bestimmen Sie die Parameter V sowie T_R. *Die Lösung lautet:*

$$V = 1/\sqrt{3}, \quad T_R = 1/\sqrt{3}, \quad \rho = 0, \quad z(s) = 1 + s/3$$

b) Skizzieren Sie das Bodediagramm des offenen Regelkreises $L(s)$ und zeichnen Sie die Durchtrittsfrequenz ω_c und die Phasenreserve Φ ein. *Die Lösung lautet:* 2 P.|

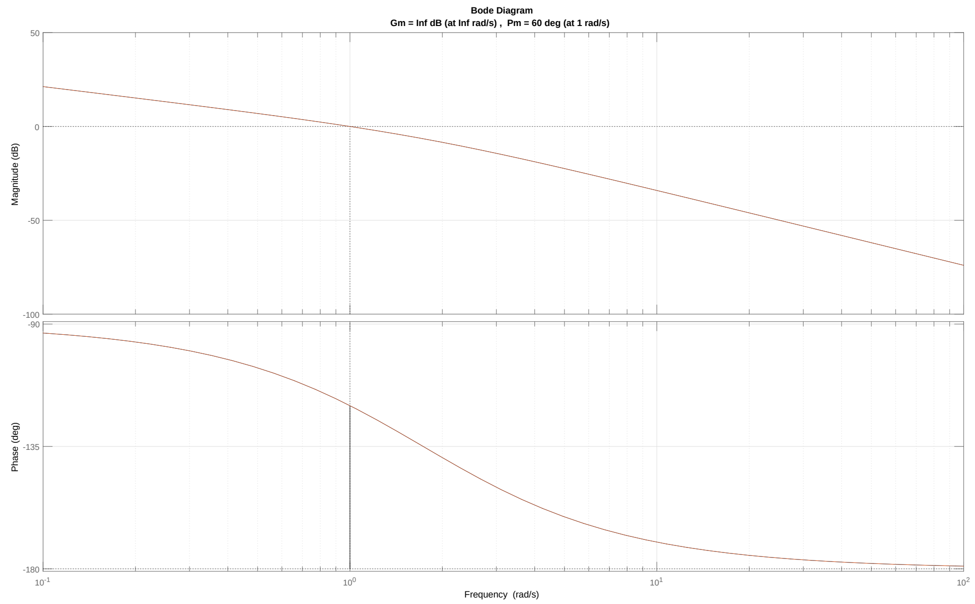


Abbildung 3: Bodediagramm.

c) Gegeben ist der folgende Regelkreis mit den Übertragungsfunktionen 4 P.|

$$G(s) = \frac{s-2}{s-1}, \quad R(s) = \frac{c_1(s+1)}{s+c_2}, \quad F(s) = a \neq 0\,.$$

Welche Bedingungen müssen die Parameter c_1, c_2 und a erfüllen, damit der Regelkreis aus Abbildung 4 intern stabil ist? Geben Sie diese Bedingungen explizit an. *Die Lösung lautet:*

$$-1 < c_1 < -1/3, \quad c_2 > c_1 + 1, \quad c_2 < -2c_1, \quad a > 0$$

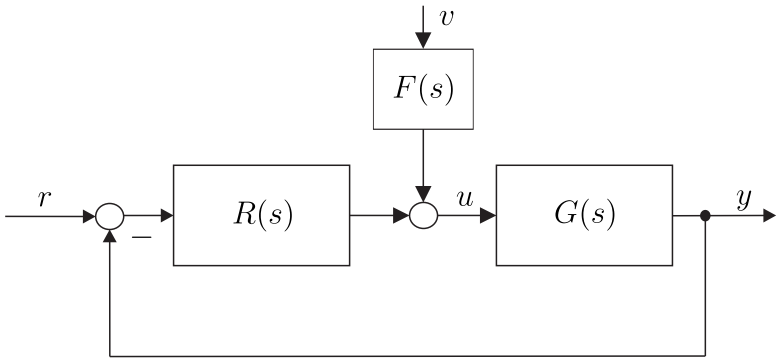


Abbildung 4: Regelkreis.

4. **Zeitdiskretes System**

   Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. 9 P.|

   Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} u_k \tag{4a}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \tag{4b}$$

   a) Weisen Sie die vollständige Bobachtbarkeit des Systems (4) anhand der Beobachtbarkeitsmatrix nach. 1 P.|

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \mathrm{Rang}(\mathcal{O}) = 3$$

   b) Entwerfen Sie einen vollständigen Luenberger Beobachter für das System (4). 3 P.|
   Die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix $\mathbf{\Phi}_e$ des Fehlersystems sollen bei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1/2$ und $\lambda_3 = 1/2$ liegen.

$$p_{soll}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda/4$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 - k_1 & -2 & -1 \\ -k_2 & \lambda + 1 & 2 \\ -k_3 & -2 & \lambda + 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda^3 + (1-k_1)\lambda^2 + (3-2k_1-2k_2-k_3)\lambda - 5k_1 - 4k_2 + 3k_3 - 5$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = -15/8, \quad k_3 = 5/2$$

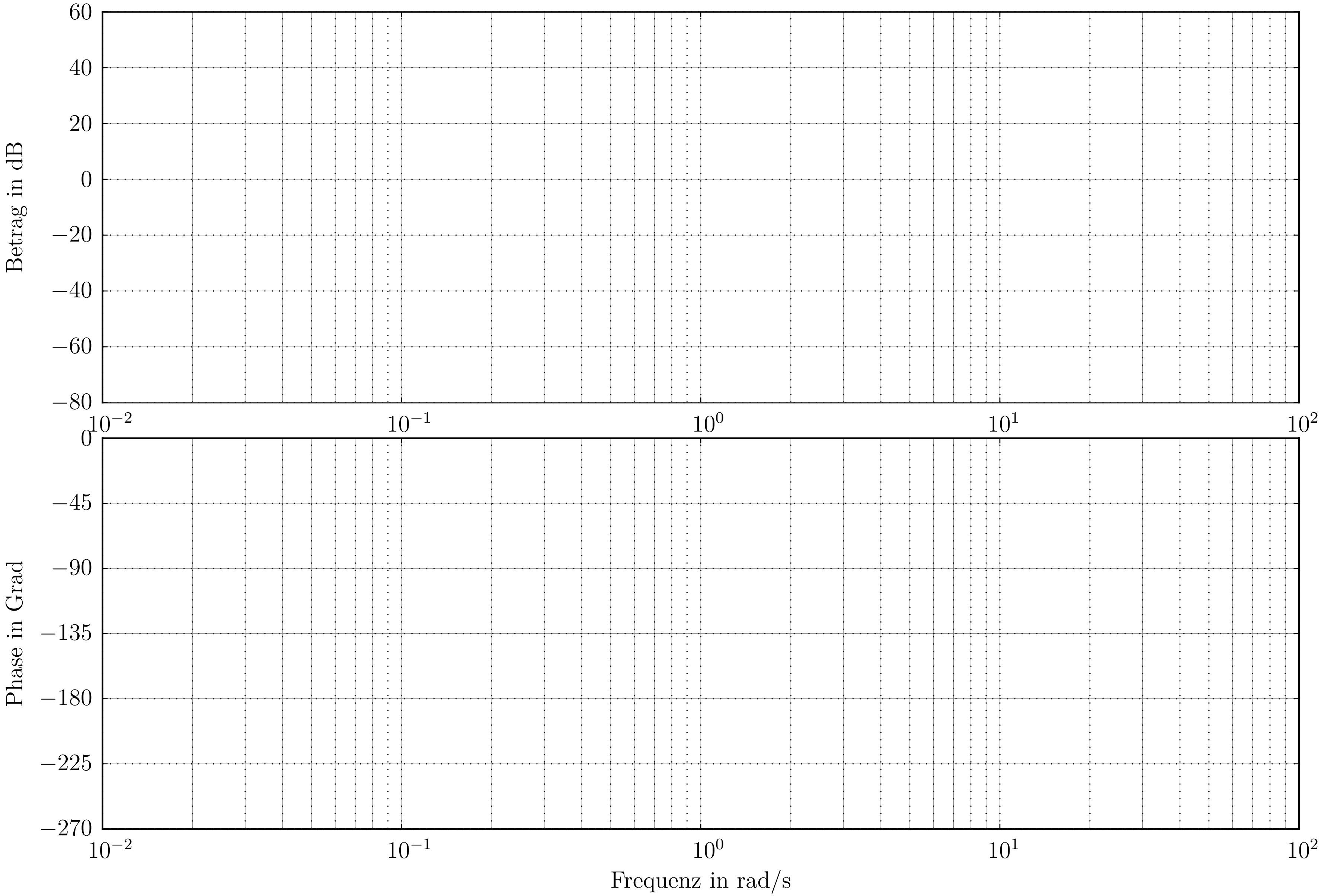
   c) Es wird nun ein Dead-Beat-Beobachter für das System (4) entworfen. Zeigen Sie, dass jeder Anfangsfehler $\mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$ in höchstens $n = 3$ Schritten zu $\mathbf{0}$ wird. 2 P.|

$$\mathbf{\Phi}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}_e \text{ ist nilpotente Matrix der Ordnung 3}$$

   d) Geben Sie das duale System zu (4) an. Zeigen Sie allgemein, dass die Erreichbarkeit des primalen Systems äquivalent zur Beobachtbarkeit des dualen Systems ist. 3 P.|

$$\mathbf{x}_{d,k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{d,k} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{d,k}$$

$$y_{d,k} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{d,k}$$


Betrag in dB
60
40
20
0
−20
−40
−60
−80
Phase in Grad
0
−45
−90
−135
−180
−225
−270
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequenz in rad/s

$$\text{Erreichbarkeit primales System: } \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{\Phi\Gamma} & \dots & \mathbf{\Phi}^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}$$
$$\text{Beobachtbarkeit duales System: } \mathcal{O}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}} & \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} & \dots & \Gamma^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{n-1\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$