Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 13.05.2016

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	9	11	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ Mo., 23.05.2016 ☐ Di., 24.05.2016

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben: 10 P.|

   a) Gegeben ist das nichtlineare autonome System 3 P.|

   $$\dot{x} = -\sqrt{x}, \quad x(0) = x_0 > 0.$$

      i. Bestimmen Sie für $x > 0$ das zugehörige Abtastsystem mit der Abtastzeit T_a. Verwenden Sie **kein** numerisches Integrationsverfahren, wie etwa das Eulerverfahren. 2 P.|

      ii. Bestimmen Sie die Ruhelage des resultierenden Abtastsystems. 1 P.|

   b) Gegeben ist die Strecke 1 P.|

   $$G(s) = \frac{V_I}{s}.$$

   Bestimmen Sie für eine allgemeine Abtastzeit T_a die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des zugehörigen Abtastsystems.

   c) Beurteilen Sie BIBO-Stabilität, Sprungfähigkeit und Realisierbarkeit der Übertragungsfunktion 1.5 P.|

   $$G^{\#}(q) = \frac{(4-q)(q+12)}{\left(4q+1\right)\left(1+\frac{q}{3}\right)}.$$

   mit der Abtastzeit $T_a = 0.5\,\mathrm{s}$. Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

   d) Gegeben ist die in Abbildung 1 dargestellte Steuerung, die in den nachfolgenden Aufgaben für die alternativen zeitdiskreten Strecken G_1 und G_2 mit den Impulsantworten 4.5 P.|

   $$g_{1,k} = 2\sigma_k + \delta_{k-3} - \sigma_{k-3}, \tag{1a}$$

   $$g_{2,k} = 2\sigma_{k-1} + \delta_{k-2} - 4\sigma_{k-2} + p\sigma_{k-3}, \quad p \in \mathbb{R}. \tag{1b}$$

   untersucht werden soll.

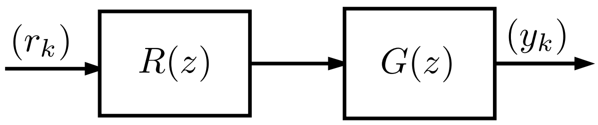

Abbildung 1: Zeitdiskrete Steuerung.

   Hinweise: Für die (zeitverschobene) Sprungfolge wird hier die Schreibweise $(\sigma_{k-1}) = (0, 1, 1, \dots)$ verwendet. Nachfolgende Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

      i. Nehmen Sie $p = 2$ an. Beurteilen Sie anhand der Impulsantworten (1a) und (1b) Sprungfähigkeit sowie BIBO-Stabilität von G_1 und G_2. Ist die Anwendung einer Steuerung auf die jeweiligen Strecken möglich? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich! 2 P.|

      ii. Von der Strecke G_2 ist bekannt, dass es sich um ein System der Ordnung 3 handelt. Für welchen Wertebereich von p ist dieses System vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich! 2.5 P.|

2. Gegeben ist das LTI-System 9 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{2a}$$
$$y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \tag{2b}$$

mit den Systemmatrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben und begründen Sie ihre Antworten!

a) Bestimmen Sie ob das System vollständig beobachtbar ist. 1 P.|

b) Nehmen Sie für diesen Unterpunkt an, dass $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ gilt und das System somit vollständig beobachtbar ist.

   i. Kann durch Abtastung die vollständige Beobachtbarkeit verloren gehen? Falls ja, berechnen Sie die Abstastzeiten T_a, bei denen das System diese Eigenschaft verlieren würde. 1.5 P.|

   ii. Kann für dieses System ein trivialer Beobachter entworfen werden? 0.5 P.|

c) Geben Sie für das System (2) die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$ vom Eingang $u(t)$ zum Ausgang $y(t)$ an. 1 P.|

   Hinweis: Die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ ergibt sich im Laplace-Bereich zu

$$\mathbf{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{s+1}{(s^2+2s+2)(s-1)} & \frac{1}{(s^2+2s+2)(s-1)} & \frac{2}{(s-1)(s+2)} \\ 0 & \frac{s+1}{s^2+2s+2} & \frac{1}{s^2+2s+2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{s^2+2s+2} & \frac{s+1}{s^2+2\,s+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}.$$

d) Ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des Systems (2a) für $u = 0$ asymptotisch stabil? 1 P.|

e) Ist das System (2) BIBO-stabil? 1 P.|

f) Nehmen Sie an, dass für das System (2) die Lösungen 3 P.|

   - $y(t) = e^{-t}(\cos(t) - \sin(t))$ für $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ und $u(t) = 0$
   - $y(t) = e^{-t}(\cos(t) - 3\sin(t)) - \cos(2t) + 2\sin(2t)$ für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $u(t) = 5\sin(2t)$

   bekannt sind. Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ für $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $u(t) = \sin(2t)$.

3. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. 11 P.|

a) Gegeben ist ein nichtlineares System in impliziter Form durch

$$a\dot{x}\cos(x) - \dot{x}e^{(x-\pi)} - \ddot{x} - \int_0^t \dot{x} - \sin(x(\tau))u(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$$

und die Ausgangsgleichung

$$y = x - \dot{x}u^2.$$

i. Geben Sie das System in Zustandsdarstellung der Form 3 P.|

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x}, u)\end{aligned}$$

an.

ii. Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems für $u(t) = u_R \neq 0$. Wie viele Ruhelagen gibt es? 1.5 P.|

iii. Linearisieren Sie das System um die Ruhelage, für die $u_R \neq 0$ gilt und $x_{1,R} > 0$ kleinstmöglich ist. Geben Sie die Systemmatrizen des linearisierten Systems an. 2 P.|

iv. Geben Sie den zulässigen Wertebereich von a in Abhängigkeit von u_R an, sodass das linearisierte System asymptotisch stabil ist. 2.5 P.|

b) Betrachten Sie das System 2 P.|

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3u \\ y &= -x - 6u\end{aligned}$$

und entwerfen Sie einen trivialen Beobachter. Zeigen Sie, dass für den Beobachtungsfehler $e(t)$ gilt: $\lim_{t\to\infty} e(t) \neq 0$ für $e(0) \neq 0$.
Zeigen Sie des Weiteren, dass für

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - 3u \\ y &= -x - 6u\end{aligned}$$

der Beobachtungsfehler $e(t)$ exponentiell abklingt.

4. Gegeben ist der kaskadierte Regelkreis aus Abbildung 2, mit 10 P.|

$$R_1(s) = \frac{V_I(1+sT_I)}{s}, \quad G_1(s) = \frac{5}{s+\frac{1}{2}}, \quad G_2(s) = \frac{1}{\left(s+2\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\left(1+2\xi sT_2+(sT_2)^2\right)}.$$

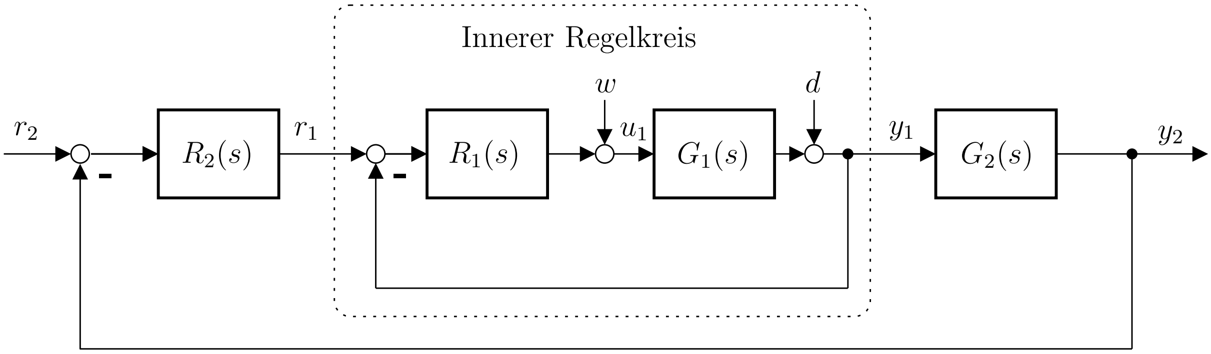

Abbildung 2: Kaskadierter Regelkreis.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben, die unabhängig voneinander gelöst werden können.

a) Dimensionieren Sie die Parameter V_I und T_I des Regler $R_1(s)$ durch Koeffizientenvergleich so, dass sich die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen inneren Regelkreises für eine allgemeine Zeitkonstante T_* zu 3 P.|

$$T_{r_1,y_1}(s) = \frac{1}{1+sT_*}$$

ergibt. Ermitteln Sie anschließend den kleinstmöglichen Wert der Zeitkonstante T_*, für den die Stellgrößenübertragungsfunktion die Forderung

$$\lim_{\omega\to\infty} |T_{r_1,u_1}(\mathrm{I}\,\omega)|_{\mathrm{dB}} \leq 20\,\mathrm{dB}$$

erfüllt.

b) Nehmen Sie an, dass die Störung $d(t)$ messbar ist. Wie müsste eine Störgrößenaufschaltung $\hat{w}(s) = -R_d(s)\hat{d}(s)$ ausgelegt werden, um den Einfluss von $d(t)$ am Ausgang $y_1(t)$ exakt zu kompensieren? Ist dies im vorliegenden Fall möglich? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich! 1.5 P.|

c) Entnehmen Sie der in Abbildung 3 dargestellten Sprungantwort die Parameter Anstiegszeit t_r, prozentuelles Überschwingen $\ddot{u}$ und bleibende Regelabweichung e_∞. Skizzieren Sie in Abbildung 3 wie die jeweiligen Parameter bestimmt werden. 1.5 P.|

d) Entwerfen Sie einen realisierbaren Kompensationsregler $R_2(s)$ der Ordnung 2 im Sinne einer Kaskadenregelung so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises die Anforderungen 4 P.|

- Anstiegszeit $t_r = 0.75\,\mathrm{s}$
- Prozentuelles Überschwingen $\ddot{u} = 10\%$
- Bleibende Regelabweichung $e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t)|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$

erfüllt und das konjugiert komplexe Polpaar in $G_2(s)$ kompensiert wird.
Hinweis: $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

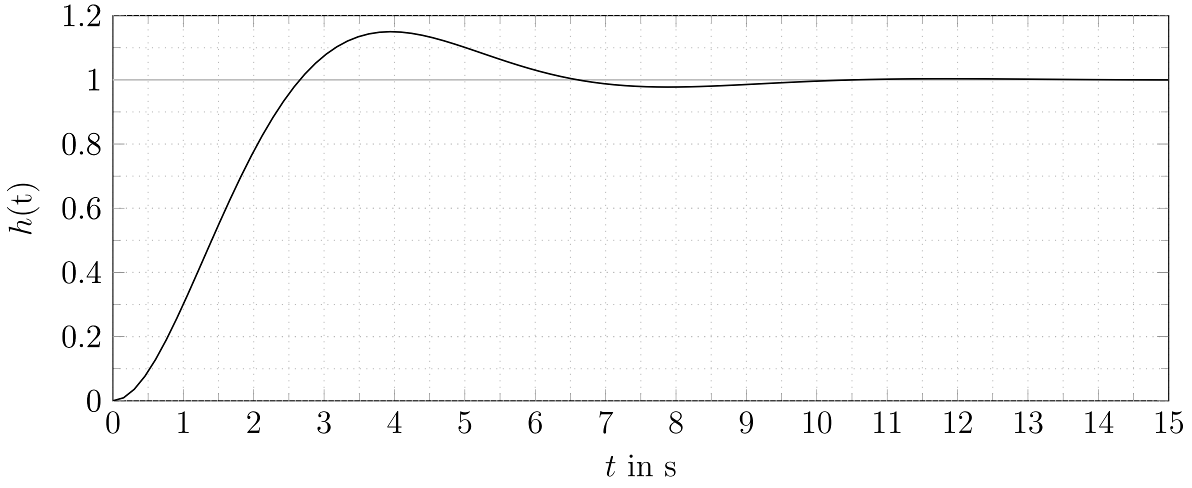

Abbildung 3: Sprungantwort.