Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 08.07.2016

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	11	10	9	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ Fr., 15.07.2016 ☐ Mo., 18.07.2016 ☐ Di., 19.07.2016

Viel Erfolg!

1. In dieser Aufgabe wird der Regelkreis aus Abbildung 1 mit dem P-Regler $K_p \in \mathbb{R}$ betrachtet. Der eingerahmte Bereich markiert die zeitkontinuierliche Strecke Σ mit dem Eingang u, dem Ausgang $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^{\mathrm{T}}$ und den reellen Konstanten $K_1 > 0$ und $K_2 > 0$. 11 P.|

   a) Wählen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}}$ und bestimmen Sie das zeitkontinuierliche Modell der Strecke Σ in der Form 3 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

   Das zeitkontinuierliche Modell des LTI-Systems lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_1 & 0 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_2 & 0 & -K_2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

   b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$. Ist das System global asymptotisch stabil? 3 P.|

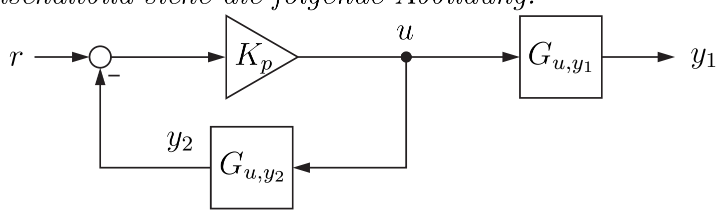
   Die Eigenwerte lauten $[0, 0, \pm I\sqrt{K_1 + K_2}]$. *Damit ist das System nicht global asymptotisch stabil.*

   c) Die Beschreibung des Eingangs-/Ausgangsverhaltens der Strecke Σ erfolgt in dieser Teilaufgabe im Laplacebereich anhand der beiden Übertragungsfunktionen G_{u,y_1} bzw. G_{u,y_2} vom Eingang u zu den Ausgängen y_1 bzw. y_2. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Teilaufgaben: 5 P.|

      i. Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen G_{u,y_1} bzw. G_{u,y_2} für die betrachtete Strecke Σ. 3 P.|
      Hinweis: Diese Aufgabe kann sowohl anhand des Blockschaltbildes im Laplace Bereich als auch mithilfe des Zustandsraummodells gelöst werden. Beachten Sie dabei die dünn besetzte Matrix $\mathbf{C}$ sowie den Vektor $\mathbf{b}$.
      Die Übertragungsfunktionen lauten

$$G_{u,y_1} = \frac{K_1}{s^2\left(s^2 + K_1 + K_2\right)} \quad \textit{bzw.} \quad G_{u,y_2} = \frac{s^2 + K_1}{s\left(s^2 + K_1 + K_2\right)}.$$

      ii. Nehmen Sie G_{u,y_1} bzw. G_{u,y_2} als gegeben an und zeichnen Sie ein Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises im Laplacebereich. Leiten Sie daraus die Übertragungsfunktion T_{r,y_1} des geschlossenen Regelkreises für $K_p \to \infty$ her. 2 P.|
      Zum Blockschaltbild siehe die folgende Abbildung:



      Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises lautet

$$T_{r,y_1} = \frac{K_p G_{u,y_1}}{1 + K_p G_{u,y_2}}, \quad \lim_{K_p \to \infty} T_{r,y_1} = \frac{G_{u,y_1}}{G_{u,y_2}}$$

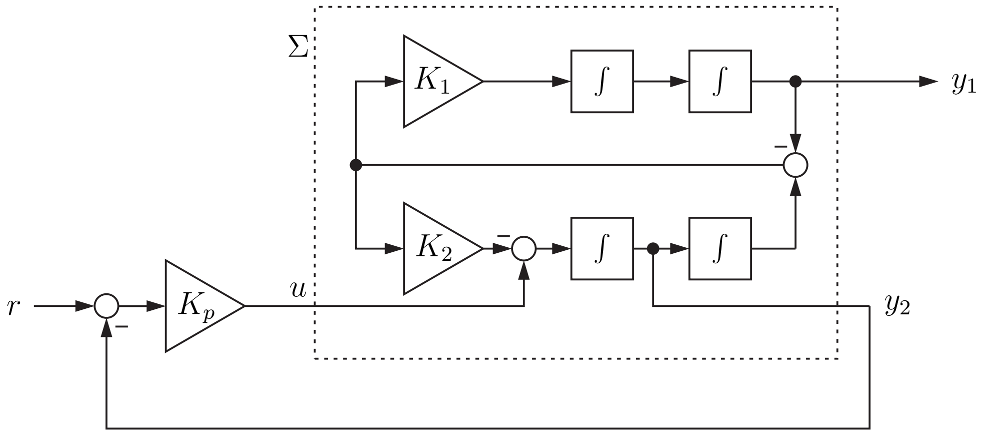


Abbildung 1: Regelkreis zu Aufgabe 1

2. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben: 10 P.|

   a) Gegeben ist ein LTI-System der Form 4 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \tag{1}$$

   i. Geben Sie ein Beispiel für ein System der Form (1) mit $\dim(\mathbf{x}) = 3$ ohne Ruhelage an. 2 P.|
   Hierfür muss gelten $\det(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ *und* $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) \neq \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{u}_R\end{bmatrix}\right)$. *Beispielsweise*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{2}$$

   ii. Nehmen Sie nun an, das System hätte 2 P.|
      A. eine einzige Ruhelage. 1 P.|
      $\mathbf{A}$ *ist regulär.*
      B. unendlich viele Ruhelagen. 1 P.|
      $\mathbf{A}$ *ist singulär und* $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = \operatorname{rang}(\begin{bmatrix}\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{u}_R\end{bmatrix})$.
   Geben Sie die notwendigen Eigenschaften von $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{u}_R$ an.

   b) Betrachtet wird das eingangsaffine System 2 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{g}, \tag{3}$$

   mit der Eingangsgröße $\mathbf{u}$ und dem konstanten Vektor $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$. Geben Sie die Tranformationsvorschrift für $\boldsymbol{\xi}$ an, um das System (3) mit der Ruhelage $\mathbf{x}_R \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{u}_R = \mathbf{0}$ in ein System der Form

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}, \tag{4}$$

   mit $\boldsymbol{\xi}_R = \mathbf{0}, \mathbf{u}_R = \mathbf{0}$ zu überführen. Geben Sie auch die Zusammenhänge zwischen $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$ und $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ an.
   Die Transformationsvorschrift lautet $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, *mit* $\mathbf{A}\mathbf{x}_R = \mathbf{g}$. *Für die Matrizen gilt* $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$.

   c) Betrachtet wird die Übertragungsfunktion 4 P.|

$$G(s) = \frac{(s^2 - 1)(s+3)^2}{(s^2 + 3s + 2)(s^2 + 7s + 12)}.$$

i. Ist die Übertragungsfunktion sprungfähig? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|
Ja, da hier für $G(s) = z(s)/n(s)$ *gilt* $\mathrm{grad}(z(s)) = \mathrm{grad}(n(s))$.

ii. Ist das System minimalphasig? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|
Nein, da eine Nullstelle bei +1 liegt.

iii. Ist die Übertragungsfunktion realisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|
Ja, da die Bedingung $\mathrm{grad}(z(s)) \leq \mathrm{grad}(n(s))$ *erfüllt ist.*

iv. Berechnen Sie den Verstärkungsfaktor sowie die Sprungantwort bei $t = 0$. 1 P.|
$V = -3/8$, $h(t = 0) = 1$

v. Zeichnen Sie alle Pole und Nullstellen von $G(s)$ in das beigefügte Diagramm ein. 0.5 P.|

vi. Welche Stabilitätsaussage können Sie für ein System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ treffen? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|
Das System ist BIBO-stabil. Weitere Aussagen sind anhand der reinen Kenntnis der Übertragungsfunktion nicht möglich, da Pol-Nullstellenkürzungen nicht auszuschließen sind.

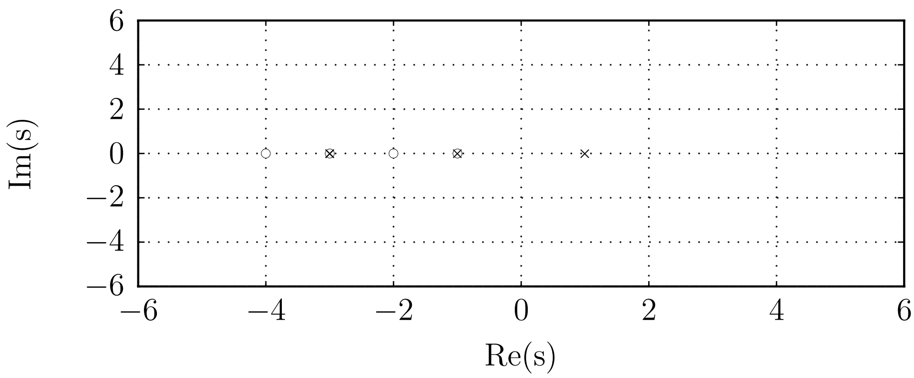


Abbildung 2: Vorlage Pol-Nullstellen-Diagramm zu Aufgabe 3

3. In dieser Aufgabe wird das zeitdiskrete LTI-System 9 P.|

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\
y_k &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k
\end{aligned} \tag{5}
$$

in Kombination mit einem Zustandsregelgesetz der Form $u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_k$ betrachtet, wobei für den Rückführvektor

$$
\mathbf{k} = [2, -1, \alpha]^{\mathrm{T}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}
$$

gilt.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix des Systems (5). Ist das System vollständig erreichbar bzw. vollständig beobachtbar? 1.5 P.|

Die Eigenwerte lauten $[0, \frac{1}{2} \pm I\frac{1}{2}]$.

Das System ist nicht vollständig erreichbar da $\operatorname{rang}(\mathcal{R}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma})) = 2 \neq 3$. Man sieht dies auch direkt an der ersten Zeile des Systems von Differenzengleichungen in (5).

Da das System in Beobachtbarkeitsnormalform vorliegt, ist es vollständig beobachtbar und es gilt $\operatorname{rang}(\mathcal{O}(\mathbf{C}, \mathbf{\Phi})) = 3$.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich von $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass der geschlossene Kreis stabil ist. 1.5 P.|

Der Wertebereich lautet $-2 < \alpha < 0$.

c) Die Realisierung des Zustandsregelgesetzes erfolgt in dieser Teilaufgabe in der Form $u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{x}}_k$, wobei der Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}$ des Systemzustands von einem Beobachter generiert wird. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Teilaufgaben: 6 P.|

i. Entwerfen Sie einen trivialen Beobachter und berechnen Sie die Dynamikmatrix des Beobachtungsfehlers $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$. 1 P.|

Der triviale Beobachter als Kopie der Strecke lautet

$$
\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma} u_k
$$

mit $\mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{\Gamma}$ als den üblichen Bezeichnungen für die Dynamikmatrix und dem Eingangsvektor von (5). $\mathbf{\Phi}$ ist somit auch die Dynamikmatrix des Beobachtungsfehlers.

ii. Ist die Kombination aus Zustandsregler und trivialem Beobachter stabil? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der Dynamikmatrix des erweiterten Systems mit dem Zustand $[\mathbf{x}^{\mathrm{T}}, \mathbf{e}^{\mathrm{T}}]$. 3 P.|

Die Dynamik des erweiterten Systems ergibt sich zu

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{e}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^{\mathrm{T}} & \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}_{ges}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix}
$$

mit dem charakteristischen Polynom (Ausnutzung der Blockdiagonalstruktur von $\mathbf{\Phi}_{ges}$)

$$
\det(z\mathbf{E}_{6\times 6} - \mathbf{\Phi}_{ges}) = \det(z\mathbf{E}_{3\times 3} - \mathbf{\Phi}) \det\left(z\mathbf{E}_{3\times 3} - (\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^{\mathrm{T}})\right).
$$

Somit müssen die Eigenwerte von $\mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ betraglich kleiner als 1 sein. Diese Bedingung ist für $\mathbf{\Phi}$ gemäß a) erfüllt. Somit ist das System stabil, wenn α entsprechend b) gewählt wird.

iii. Entwerfen Sie einen vollständigen Luenberger-Beobachter. Berechnen Sie die Beobachterverstärkung $\hat{\mathbf{k}}$ so, dass sämtliche Eigenwerte der Beobachterfehlerdynamik an der Stelle $\frac{1}{2}$ in der komplexen Ebene zu liegen kommen. *Die Beobachterverstärkung lautet* $\hat{\mathbf{k}} = [\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. 2 P.|

4. Für die folgende Aufgabe wird ein lineares zeitinvariantes autonomes System mit $\dim(\mathbf{x}) = 2$ betrachtet. Bei den gegebenen Anfangszuständen 10 P.|

$$\mathbf{x}_{0,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{0,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

zeigen sich am Ausgang die entsprechenden Signale

$$y_1(t) = \sin(t) + \cos(t), \quad y_2(t) = \sin(t) - \cos(t). \tag{7}$$

a) Berechnen Sie den Ausgangsvektor $\mathbf{c}$ des Systems. 2 P.|
$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) Berechnen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des Systems. 7 P.|
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) Geben Sie die Eigenwerte des Systems an. 1 P.|
$\lambda_1 = I, \lambda_2 = -I$