Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 23.09.2016

LÖSUNG

Aufgabe 1:

a)
  i. $\rho = 0, \chi = 1$
  ii. $T_D = \frac{\sqrt{3}}{150}$
  iii. $V = \frac{15}{\sqrt{3}}\sqrt{1 + (2+\sqrt{3})^2}$
  iv. $T_R < \frac{T_D}{10}$

b)
  i. $g(t) = (\mathrm{e}^{-3t} - 2\mathrm{e}^{-2t} + 3\mathrm{e}^{-t})\sigma(t)$
  ii. $h(t) = (-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-2t} - 3\mathrm{e}^{-t} + \frac{7}{3})\sigma(t)$

c) $G(s) = \sqrt{0.1}\frac{1+\frac{s}{100}}{1-2\frac{\sqrt{0.1}}{2}\frac{s}{10}+\left(\frac{s}{10}\right)^2}$

Aufgabe 2:

a)
- Die Erreichbarkeitsmatrix ergibt sich zu

$$\mathcal{R}(A,b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 2 & -7 & -\alpha + 21 \\ 0 & 4 & -11 + 2\alpha \end{bmatrix}$$

Daraus folgen die ersten Einschränkungen für α

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}(A,b)| &\neq 0 \\ 4\alpha^2 + 12\alpha - 7 &\neq 0 \\ \alpha_1 &\neq \frac{1}{2} \\ \alpha_2 &\neq -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

- Die Beobachtbarkeitsmatrix resultiert in

$$\mathcal{O}(c,A) = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2\alpha - 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Daraus folgt eine weitere Beschränkung für α

$$\begin{aligned} |\mathcal{O}(c,A)| &\neq 0 \\ -2\alpha - 5 &\neq 0 \\ \alpha_3 &\neq -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

- Die letzte Einschränkung ergibt sich aus den Eigenwerten, welche direkt abgelesen werden können zu

$$\alpha_4 < 0$$

- Damit alle Anforderungen erfüllt sind ergibt sich der Wertebereich für α mit

$$\alpha \in \mathbb{R}^- \setminus \left\{-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right\}.$$

b) Nein, da das System mit $\alpha = 1$ instabil ist.

c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & -27 & 0 \\ 5 & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}(c, A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} -\frac{27}{7} \\ \frac{5}{7} \\ -3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3:

a) i. Nein, da die Erreichbarkeitsmatrix nur Rang 2 besitzt. $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

ii. $\mathbf{\Phi}$ ist nilpotent der Ordnung 3 und $\mathbf{\Phi}^2\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$. Daraus folgt für die Eingangsfolge $u_k = (a, 0, \dots)$ mit $a \in \mathbb{R}$ für $k \geq 0$.

iii. Mögliche Lösungen:
$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \left[0, \frac{11}{4}, -\frac{5}{4}\right]$
$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \left[\frac{5}{4}, -1, 0\right]$
$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \left[\frac{11}{12}, 0, -\frac{1}{3}\right]$.

b) i. $G(z) = \frac{4(z-3)}{z^2-\frac{1}{2}}$

ii. BIBO-stabil. Die Pole lauten $z_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ und liegen innerhalb des Einheitskreises.

iii. $y_\infty = -16$

Aufgabe 4:

a) Ruhelagen: $x_{1R} = \frac{k}{2}\pi,\ x_{2R} = x_{4R} = 0, x_{3R} = \text{beliebig}, u_R = 0$, mit $k \in \mathbb{Z}$

b)
- Linearisierung:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_R, u_R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos(x_{1R})x_{2R}^2 & 2\sin(x_{1R})x_{2R} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\cos(2x_{1R}) & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_R, u_R) = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_R, u_R) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u}(\mathbf{x}_R, u_R) = d = 0$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{\Delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{\Delta x} + 0\mathbf{\Delta u}$$

- Das lineare system ist instabil $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = \lambda_4 = -1$.

c)
- Lineares zeitvariantes System
-

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Delta x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Delta x} + \mathbf{b}\Delta u$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{u}) = \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{x}_1)\tilde{x}_2^2 & 2\sin(\tilde{x}_1)\tilde{x}_2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\cos(2\tilde{x}_1) & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{u}) = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{u}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{u}) = d = 0$$