Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 18.11.2016

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	9	11	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ Fr., 25.11.2016 ☐ Mo., 28.11.2016 ☐ Di., 29.11.2016

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben: 10 P.|

   a) Ein Prozess mit Eingangsgröße u und Ausgangsgröße y wird durch die nichtlineare Differentialgleichung 5.5 P.|

$$\ddot{y} + \sqrt{y} + y\dot{y} = u^2$$

   beschrieben.

      i. Transformieren Sie das obige System in Zustandsraumdarstellung, indem Sie neue Zustände x_1 und x_2 einführen. 1.5 P.|

      Lösung:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sqrt{x_1} - x_1 x_2 + u^2\end{bmatrix}\\ y = h(\mathbf{x}, u) &= x_1\end{aligned}$$

      ii. Bestimmen Sie sämtliche Ruhelagen $(\mathbf{x}_R, y_R, u_R)$ mit $\boldsymbol{x}_R = (x_{1,R}, x_{2,R})$. 2.0 P.|

      Lösung:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R) \rightarrow x_{2,R} &= 0\\ x_{1,R} &= u_R^4\end{aligned}$$

      Es gibt unendlich viele Ruhelagen

$$(\mathbf{x}_R, y_R, u_R) = \left(\begin{bmatrix}u_R^4\\ 0\end{bmatrix}, u_R^4, u_R\right).$$

      iii. Linearisieren Sie das gegebene System um die Ruhelage für $u = u_R = 1$ und stellen Sie das linearisierte System in der Form 2.0 P.|

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\Delta u,\\ \Delta y &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{x} + d\Delta u\end{aligned}$$

      mit $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ dar.

      Lösung:

$$u = u_R = 1 \rightarrow (\mathbf{x}_R, y_R, u_R) = \left(\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, 1, 1\right)$$

      Mit

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{2\sqrt{x_{1,R}}} - x_{2,R} & -x_{1,R}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}\\ \mathbf{b} &= \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} = \begin{bmatrix}0\\ 2u_R\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}\\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} &= \left.\frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\\ d &= \left.\frac{\partial h(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} = 0\end{aligned}$$

      folgt das linearisierte System zu

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}\Delta u\\ \Delta y &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

b) Betrachtet wird das System 4.5 P.|

$$\dot{x} = -x^2 u, \quad x(0) = 1.$$

i. Bestimmen Sie die Lösung $\tilde{x}(t)$ der obigen Differentialgleichung für die zeitabhängige Eingangsgröße $\tilde{u}(t) = t$. 2.5 P.|
Hinweis: Ersetzen Sie $\dot{x}$ durch $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ und verwenden Sie Trennung der Variablen.
Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} &= -\tilde{x}^2 t, \quad \tilde{x}(0) = 1 \\
\int -\frac{1}{\tilde{x}^2}\mathrm{d}\tilde{x} &= \int t\mathrm{d}t \\
\frac{1}{\tilde{x}} &= \frac{t^2}{2} + C
\end{aligned}$$

mit $\tilde{x}(0) = 1$ folgt $C = 1$ und damit

$$\tilde{x}(t) = \frac{2}{t^2 + 2}$$

ii. Linearisieren Sie das System um die zuvor berechnete Lösung, d.h. betrachten Sie kleine Abweichungen von der Trajektorie $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$. 2.0 P.|
Lösung:

$$\dot{x} = f(x, u) = -x^2 u$$

Mit

$$\begin{aligned}
A(t) &= \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x}(t),u=\tilde{u}(t)} = -2\tilde{x}(t)\,\tilde{u}(t) = -\frac{4t}{t^2+2} \\
b(t) &= \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{x=\tilde{x}(t),u=\tilde{u}(t)} = -(\tilde{x}(t))^2 = -\frac{4}{(t^2+2)^2}
\end{aligned}$$

folgt das linearisierte System zu

$$\Delta\dot{x} = -\frac{4t}{t^2+2}\Delta x - \frac{4}{(t^2+2)^2}\Delta u.$$

2. Gegeben ist das LTI-System 9 P.|

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

a) Ist das System global asymptotisch stabil? 0.5 P.|
Lösung:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \rightarrow \text{nicht global asymptotisch stabil weil } Re\left(\lambda_2\right) \geq 0$$

b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren des Systems und geben Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$ so an, dass die Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des transformierten Systems Diagonalstruktur aufweist. 2.0 P.|
Lösung:

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
(\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Die Wahl der Eigenvektoren ist nicht eindeutig.
Mit der Transformationsmatrix $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ folgt die Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des transformierten Systems zu $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{V}^{-1}$ des Systems (1). 1.5 P.|
Lösung: Aus der Transitionsmatrix

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}\left(t\right) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}$$

des transformierten Systems folgt die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}\left(t\right)$ des originalen Systems zu

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t} \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}.$$

d) Berechnen und skizzieren Sie die Antwort des Systems (1) auf einen Einheitssprung am Eingang einmal für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ und einmal für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 3.5 P.|
Lösung: Die allgemeine Lösung des LTI-Systems (1) lautet

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}\left(t\right) &= \mathbf{\Phi}\left(t\right)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}\left(t-\tau\right)\mathbf{b}u\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau \\
y\left(t\right) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\left(t\right).
\end{aligned}
$$

Damit folgt die Ausgangsgröße $y\left(t\right)$ mit der Eingangsgröße $u\left(t\right) = \sigma\left(t\right)$ zu

$$y\left(t\right) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 + 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

Für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ lautet die Sprungantwort

$$y(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$$

und ist in Abb. 1a dargestellt. Für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ lautet die Sprungantwort

$$y(t) = \mathrm{e}^{t} + 1 - 2\mathrm{e}^{-t}$$

und ist in Abb. 1b dargestellt.

e) Ist das System (1) BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 1.5 P.|

Lösung: Die Übertragungsfunktion des Systems (1) lautet

$$G(s) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{1}{s+1}.$$

Daraus folgt die BIBO-Stabilität des Systems (1), weil der einzige Pol $s_1 = -1$ in der linken offenen s-Halbebene liegt. Beachten Sie, dass das nicht global asymptotisch stabile System (1) aufgrund einer Pol-Nullstellenkürzung dennoch BIBO-stabil ist.

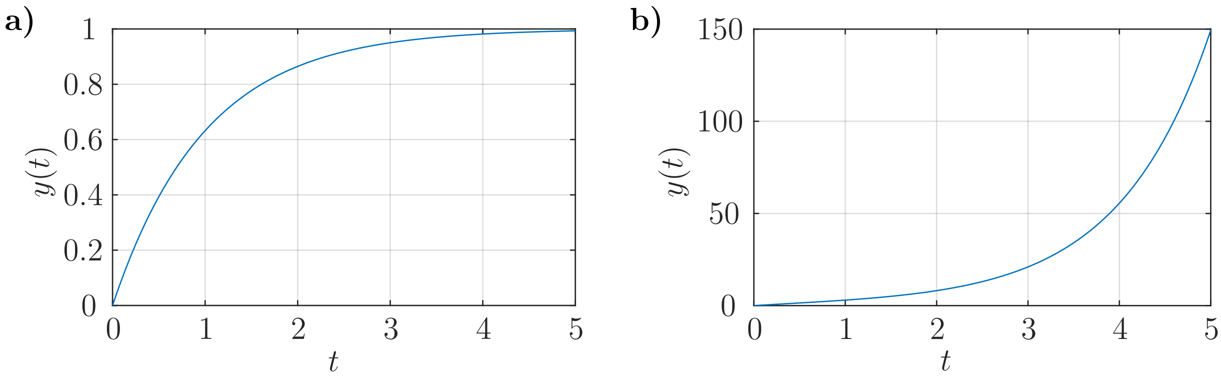

Abbildung 1: Sprungantworten zu Aufgabe 2d.

3. Bearbeiten Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben: 11 P.|

a) Die Übertragungsfunktion $G(s)$ hat die Form 2.5 P.|

$$G(s) = \frac{V}{(1+sT_1)^{\chi_1}(1+sT_2)^{\chi_2}}.$$

Bestimmen Sie aus dem zugehörigen Bode-Diagramm in Abb. 2 die Parameter V, T_1, χ_1, T_2 und χ_2. Lesen Sie nur ganzzahlige Werte aus dem Bode-Diagramm ab.

Lösung:

$$\begin{aligned} V &= -10 \\ T_1 &= 1 \\ \chi_1 &= 1 \\ T_2 &= \frac{1}{100} \\ \chi_2 &= 2 \end{aligned}$$

b) Gegeben ist die Regelstrecke 3.5 P.|

$$G(s) = \frac{20\left(\frac{s}{10}+\sqrt{3}\right)}{20+8s+s^2}.$$

Entwerfen Sie mittels des Frequenzkennlinienverfahrens einen PI-Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgenden Anforderungen genügt:

- Anstiegszeit $t_r = 0.15\,\mathrm{s}$
- prozentuelles Überschwingen ü $= 25\,\%$
- bleibende Regelabweichung $e_\infty = 0$

Lösung:

$$R(s) = \frac{10\sqrt{2}\left(1+s\frac{\sqrt{3}}{10}\right)}{s}$$

c) Gegeben sind die Übertragungsfunktionen 2.5 P.|

$$G_1(s) = \frac{4s}{s+1} - 2, \quad G_2(s) = \frac{8(1+3s)(1+4s)}{(1+s)(2+s)(3+s)(5+s)},$$
$$G_3(s) = -\frac{10(1-s)^2}{s(s+4)^2}, \quad G_4(s) = \frac{20s^2+10s+5}{s(s^3+4s^2-s-4)}, \quad G_5(s) = \frac{10(s+1)^2}{s(s-4)^2}.$$

Ordnen Sie den Übertragungsfunktionen G_1, G_2, G_3, G_4 und G_5 die entsprechenden Ortskurven aus Abb. 3 a), b), c), d) und e) zu.

Lösung:

$$\begin{aligned} G_1(s) &\;\widehat{=}\; \text{Abb. } 3d) \\ G_2(s) &\;\widehat{=}\; \text{Abb. } 3a) \\ G_3(s) &\;\widehat{=}\; \text{Abb. } 3e) \\ G_4(s) &\;\widehat{=}\; \text{Abb. } 3c) \\ G_5(s) &\;\widehat{=}\; \text{Abb. } 3b) \end{aligned}$$

d) Gegeben ist die Übertragungsfunktion 2.5 P.|

$$L(s) = \frac{20(s-1)}{s^2 + 8s + 15}$$

des offenen Standardregelkreises. Die entsprechende Nyquist-Ortskurve ist in Abb. 3 f) dargestellt. Untersuchen Sie den geschlossenen Regelkreis mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums auf BIBO-Stabilität. Dokumentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

Lösung:

$$L(s) = \frac{20(s-1)}{s^2 + 8s + 15s} = \frac{20(s-1)}{(s+3)(s+5)}$$

$$\Delta \arg \Big(1 + L(I\omega)\Big) = -2\pi$$

$$\max \Big(\operatorname{grad}(z_L), \operatorname{grad}(n_L)\Big) = 2$$

$$N_-(n_L) = 2, \quad N_+(n_L) = 0$$

Nyquist-Kriterium:

$$-2\pi \neq (2 - 2 + 0)\pi \Rightarrow \text{Der geschlossene Regelkreis ist nicht stabil.}$$

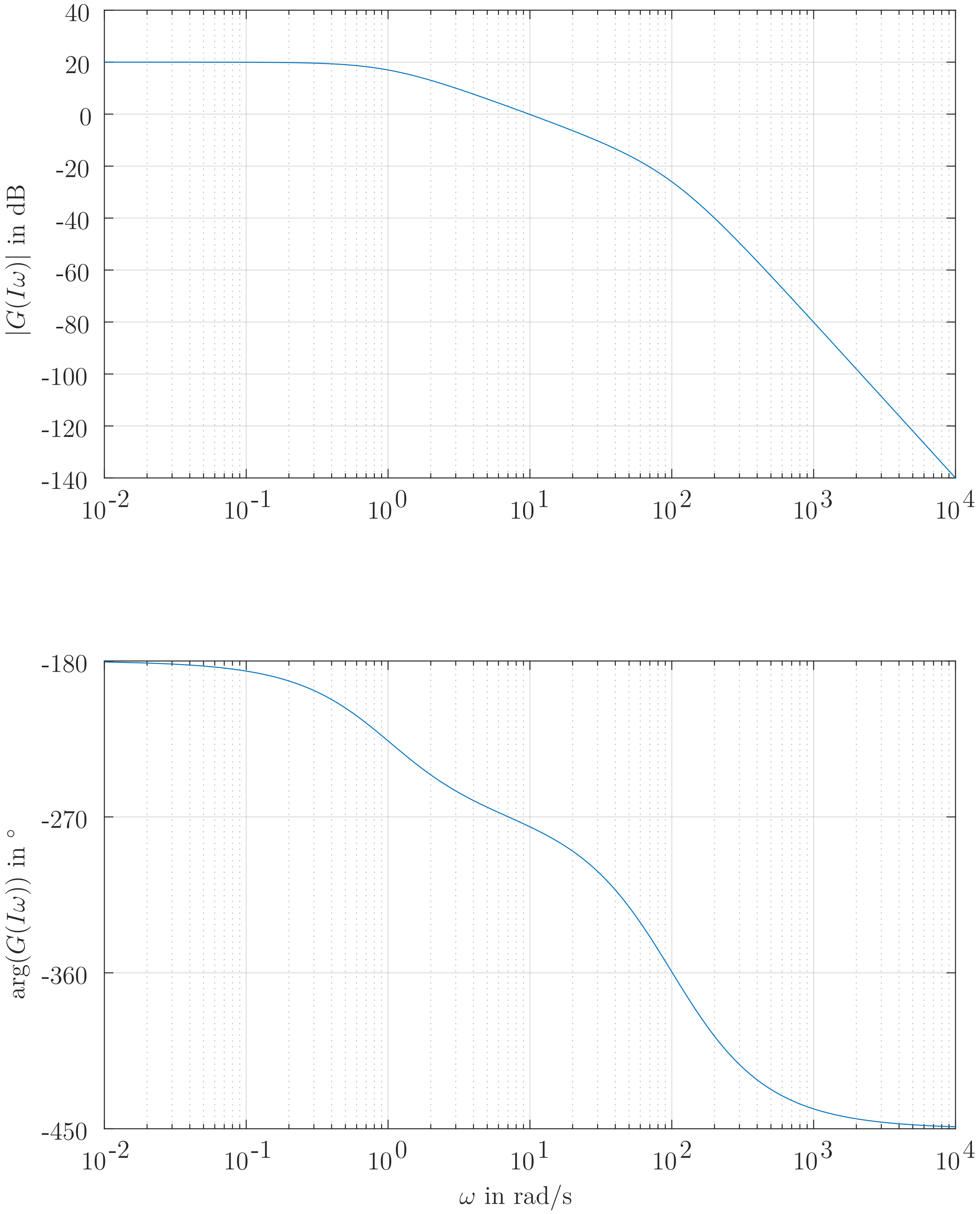

Abbildung 2: Bode-Diagramm zu Aufgabe 3a.

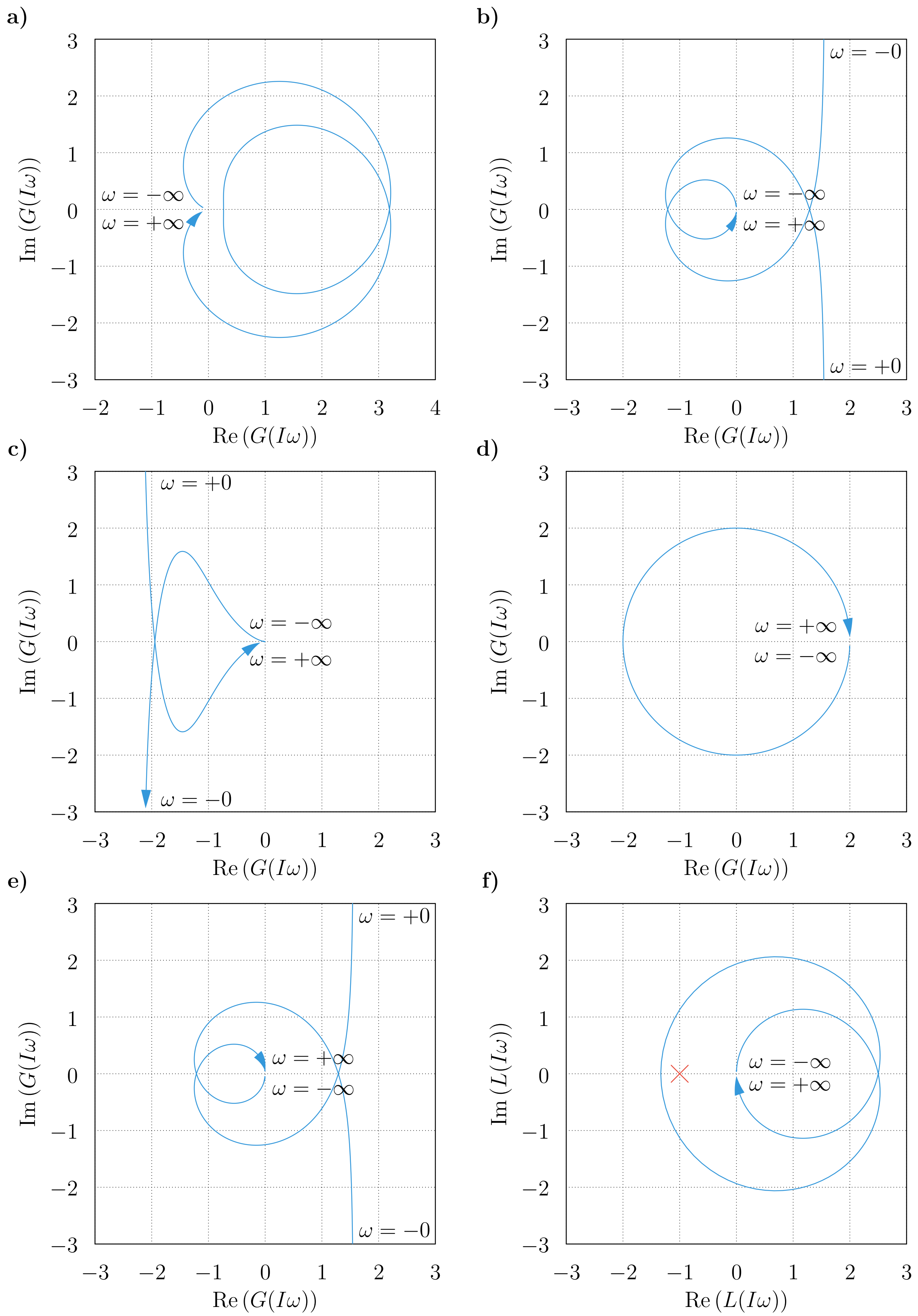

Abbildung 3: Ortskurven der Übertragungsfunktionen G_1, G_2, G_3, G_4 und G_5 zu Aufgabe 3c und der Übertragungsfunktion L zu Aufgabe 3d.

4. Gegeben ist das zeitdiskrete System 10 P.|

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_k.$$

a) Bestimmen Sie den Wertebereich von α für welchen das betrachtete System gleichzeitig vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar ist. 2.5 P.|

Lösung: Das System ist genau dann vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar wenn $\alpha \neq 0$.

b) Setzen Sie $\alpha = 1$ und entwerfen Sie einen Zustandsregler, welcher jede Anfangsauslenkung $\boldsymbol{x}_0$ in höchstens 3 Schritten in $\mathbf{0}$ überführt. 2.0 P.|

Lösung:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\Gamma}u_k, \quad u_k = \boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x}_k, \quad \boldsymbol{k} = -\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T, \tag{2}$$
$$y_k = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_k. \tag{3}$$

c) Setzen Sie $\alpha = 1$ und entwerfen Sie einen vollständigen Luenberger Beobachter für den Zustand $\boldsymbol{x}$. Die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\boldsymbol{\Phi}_e$ des Fehlersystems $\boldsymbol{e}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_e\boldsymbol{e}_k$ sollen bei 3.5 P.|

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}I, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}$$

zu liegen kommen.

Lösung:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{x}}_k + \boldsymbol{\Gamma}u_k + \hat{\boldsymbol{k}}(\hat{y}_k - y_k) \quad \hat{\boldsymbol{k}} = -\begin{bmatrix} 5/4 & 3/2 & 9/4 \end{bmatrix}^T, \tag{4}$$
$$\hat{y}_k = \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}_k. \tag{5}$$

d) Bestimmen Sie für ein allgemeines α den Wert des Ausgangs y_k zum Zeitpunkt $k = 2$ mit $u_k = (1, 0, 0, \dots)$ und $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 2.0 P.|

Lösung: Der Wert des Ausgangs zum Zeitpunkt $k = 2$ lautet $y_2 = 6$.