Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 03.02.2017

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	9.5	8.5	11	11	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ Fr., 10.02.2017 ☐ Mo., 13.02.2017 ☐ Di., 14.02.2017

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben: 9.5 P.|

   a) Gegeben ist das zeitkontinuierliche LTI-System 3 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad .$$

      i. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems. 1.5 P.|
      Berechnen Sie außerdem den Verstärkungsfaktor V, den Dämpungsgrad ξ und die Zeitkonstante T der Übertragungsfunktion $G(s)$.

      ii. Tragen Sie sämtliche Pole und Nullstellen von $G(s)$ in das leere Pol-Nullstellen Diagramm von Abbildung 1 ein. 0.5 P.|

      iii. Wo müssten die Pole und Nullstellen des Systems zu liegen kommen um ein System mit der halben Zeitkonstanten zu erhalten? 1 P.|
      Wo um ein System mit dem doppelten Dämpfungsgrad zu erhalten?
      Tragen Sie diese Pole und Nullstellen ebenfalls in das Pol-Nullstellen Diagramm ein. ***Hinweis:*** Dieser Unterpunkt kann sowohl grafisch als auch rechnerisch gelöst werden.

   b) Gegeben ist die nichtlineare Differentialgleichung 4.5 P.|

$$\dot{x} = -\sqrt{x}u \ , \quad x(0) = 1 \qquad (1)$$
$$u(t) = 2t \quad .$$

      i. Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ des Systems (1). 2 P.|

      ii. Linearisieren Sie anschließend das System um diese Lösungskurve. 1.5 P.|

      iii. Welche Eigenschaften besitzt dieses linearisierte System, handelt es sich um ein LTI System? 1 P.|
      Wann ist es zulässig die nichtlineare Differentialgleichung (1) durch das linearisierte System zu approximieren?

   c) Gegeben ist folgende q-Übertragungsfunktion 2 P.|

$$G^{\#}(q) = \frac{q^2 - 4}{q^2 - 4q - 5} \quad . \qquad (2)$$

      i. Bestimmen Sie den Verstärkungsfaktor V der zugehörigen zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktion $G(s)$ 0.5 P.|

      ii. Welcher Wertebereich der Abtastzeit T_A ist zulässig um eine sprungfähige, realisierbare Übertragungsfunktion $G^{\#}(q)$ zu erhalten. 1.5 P.|

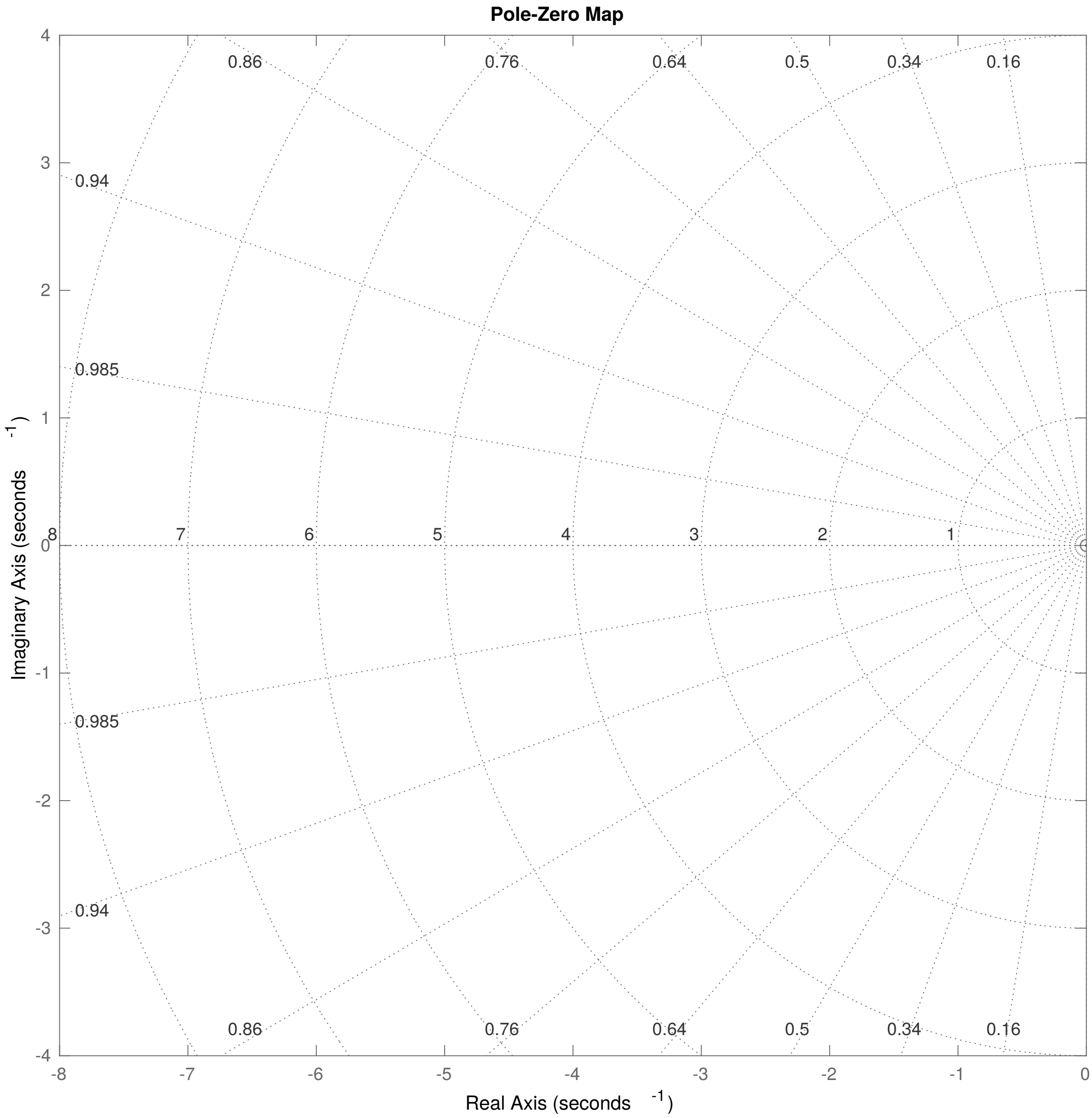

Abbildung 1: Pol-Nullstellen Diagramm.

2. Bearbeiten Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben: 8.5 P.|

a) Ausgehend von dem zeitkontinuierlichen System 3 P.|

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u \quad , && T > 0 \text{ und konstant} \\ y &= Vx \quad , && V > 0 \text{ und konstant} \end{aligned} \tag{3}$$

sollen folgende Unterpunkte bearbeitet werden.

i. Berechnen Sie das zugehörige Abtastsystem für eine allgemeine Abtastzeit T_A. 1 P.|

ii. Erklären Sie, wie die Abtastzeit T_A in Abhängigkeit von T und V zu wählen ist. 1 P.|

iii. Denken Sie an ein allgemeines System der Form 1 P.|

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du \end{aligned}$$

Können durch Abtastung die Eigenschaften *Stabilität*, *Erreichbarkeit* und *Beobachtbarkeit* eines Systems verloren gehen? Wenn Ja, welche und kann dies verhindert werden?

b) Gegeben ist das zeitdiskrete System 5.5 P.|

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 2x_{1,k}x_{2,k} + x_{1,k}\cos(u_k) + x_{2,k}^2 \\ (4 - x_{2,k})^2 + x_{2,k} + x_{1,k}\sin(u_k) \end{bmatrix} \\ y_k &= x_{1,k} \quad . \end{aligned} \tag{4}$$

i. Bestimmen Sie die Ruhelage $\mathbf{x}_R$ des Systems für $u_k = (0, 0, 0, \ldots)$. 2 P.|

ii. Linearisieren Sie das System (4) um die Ruhelage $\mathbf{x}_R$, um ein lineares zeitdiskretes System der Form 2 P.|

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\Delta\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\Delta u_k \\ \Delta y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x}_k \end{aligned}$$

zu erhalten.

Hinweis: Sollten Sie Unterpunkt i. nicht gelöst haben, rechnen Sie mit $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$. Kennzeichnen Sie dies bitte bei den folgenden Ergebnissen.

iii. Berechnen Sie die Ausgangsgröße y_k des linearen zeitdiskreten Systems für $k = 2$, $\Delta u_k = (1, 0, 0, \ldots)$, und $\Delta\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 1.5 P.|

3. Betrachtet wird der in Abb. 2 dargestellte kaskadierte Kraftregelkreis mit unterlagerter Positionsregelung. Zur Stabilisierung des mechanischen Systems mit der Übertragungsfunktion 11 P.|

$$\mathrm{G}_P(s) = \frac{10}{1/100s^2 + 15/100s + 1}$$

wird ein Positionsregler $\mathrm{R}_P(s)$ eingesetzt. Dieser soll die Struktur $\mathrm{R}_P(s) = V(T + 1/s^\rho)$ aufweisen.

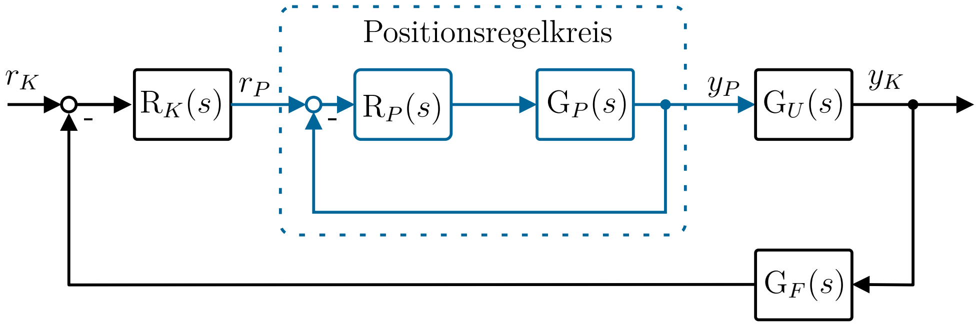

Abbildung 2: Kaskadierter Regelkreis.

Bearbeiten Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben:

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des (inneren) geschlossenen Positionsregelkreises $T_{r_P,y_P}(s)$. 1 P.|

b) Entwerfen Sie den inneren Positionsregler $\mathrm{R}_P(s)$ mit Hilfe des Frequenzkennlinienverfahrens. 6 P.|

   i. Bestimmen Sie die Kenngrößen t_r, ü und e_∞ anhand der in Abb. 3 vorgegebenen Soll-Sprungantwort des (inneren) geschlossenen Regelkreises und zeichnen Sie diese ein. Die Anstiegszeit t_r soll auf eine Kommastelle gerundet werden. 1 P.|

   ii. Wie ist der Parameter $\rho \in \{0, 1, 2\}$ zu wählen, damit die Spezifikation für $e_\infty|_{r_P(t)=\sigma(t)}$ aus Abb. 3 erfüllt werden kann. 1 P.|

   iii. Ermitteln Sie die Reglerkoeffizienten V und T nach dem Frequenzkennlinienverfahren. 4 P.|

c) Welche Voraussetzung muss der innere Positionsregelkreis erfüllen, damit ein einfacher separater Entwurf des Reglers $\mathrm{R}_K(s)$ möglich ist? 1 P.|

d) Betrachtet wird nun der äußere Kraftregelkreis mit einem P-T1 Filter $G_F = 1/(1 + sT_F)$, dem Kraftregler $\mathrm{R}_K(s) = 1/(ms^2 + ds)$ und der Streckenübertragungsfunktionen $\mathrm{G}_U(s) = k_U$ mit $k_U > 0$. Der unterlagerte Positionsregler wird als ideal angenommen. 3 P.|

   i. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kraftregelkreises $T_{r_K,y_K}(s)$ für einen als ideal angenommenen Positionsregler. 1 P.|

   ii. Welche notwendigen Bedingungen müssen m, d und T_F erfüllen, damit der geschlossene Kreis BIBO-stabil ist? Ziehen Sie dazu das Routh-Hurwitz Kriterium heran. 2 P.|

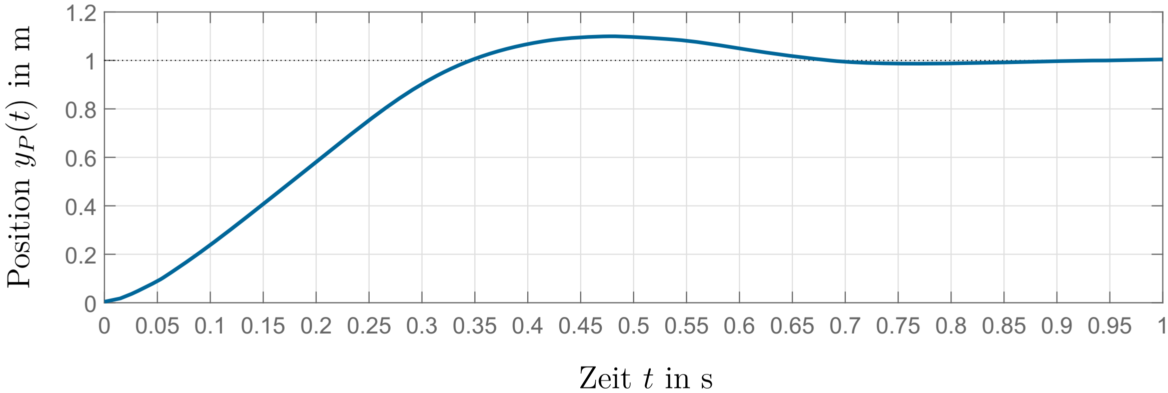

Abbildung 3: Soll-Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

4. PI-Zustandsregler 11 P.|

Für ein lineares, zeitinvariantes System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}} u_k \ , \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}} \mathbf{x}_k$$

soll ein zeitdiskreter PI-Zustandsregler

$$x_{I,k+1} = x_{I,k} + \left(r_k - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k\right)$$

$$u_k = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_x^{\mathrm{T}} & k_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ x_{I,k} \end{bmatrix} + k_p \left(r_k - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k\right)$$

mit dem Rückführvektor $\mathbf{k}_x^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ und den Parametern k_I und k_p entworfen werden.

a) Bestimmen Sie die Zustandsdarstellung für das um den Integrator erweiterte System mit $\mathbf{x}_{e,k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^{\mathrm{T}} & x_{I,k} \end{bmatrix}$. 1 P.|

b) Geben Sie den geschlossenen Regelkreis mit dem Zustand $\mathbf{x}_{g,k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^{\mathrm{T}} & x_{I,k} \end{bmatrix}$ zunächst allgemein in der Form 2.5 P.|

$$\mathbf{x}_{g,k+1} = \mathbf{\Phi}_g \mathbf{x}_{g,k} + \mathbf{\Gamma}_g r_k$$

an und berechnen Sie anschließend $\mathbf{\Phi}_g$ und $\mathbf{\Gamma}_g$ für das gegebene System.

c) Unter welcher Voraussetzung können die Eigenwerte des geschlossenen Kreises $\mathbf{\Phi}_g$ beliebig platziert werden. Prüfen Sie diese für das gegebene System. 1.5 P.|

d) Legen Sie den Parameter k_p so fest, dass für eine Führungsgröße $(r_k) = r_0(1^k)$ die Stellgröße $u_0 = k_p r_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ den gleichen Wert annimmt, der auch auch für $t \to \infty$ zur Einhaltung der Bedingung $y_\infty = r_0$ benötigt wird. 2 P.|

e) Bestimmen Sie die Reglerparameter $\mathbf{k}_x^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ und k_I mit Hilfe der Formel von Ackermann so, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ zu liegen kommen. 4 P.|