**Technische Universität Wien**
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 19.05.2017

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 11 | 9 | 10 | 10 | 40 |
| erreichte Punkte | | | | | |

**Bitte** ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ Mo., 29.05.2017 ☐ Di., 30.05.2017

**Viel Erfolg!**

1. Die folgenden Aufgaben zu zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten dynamischen Systemen können getrennt voneinander bearbeitet werden. 11 P.|

   a) Gegeben ist das nichtlineare zeitkontinuierliche System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^2 - e(2x_2 - 1) + x_1 \sin(u)\\ \dot{x}_2 &= (x_1 + d)\cos(u)\\ y &= 7x_1^2 + \frac{1}{x_2 + 1}\end{aligned}$$

   mit dem Zustand $\mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2]^{\mathrm{T}}$, dem Eingang $u$, dem Ausgang $y$ und den konstanten Skalaren $d, e$, wobei $e \geq 1$ gilt.

      i. Berechnen Sie alle Ruhelagen dieses Systems für $u = 0$. 1 P.|
      ii. Linearisieren Sie das nichtlineare System um die Ruhelagen aus der vorherigen Aufgabe und geben Sie das Ergebnis in der Form $\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u$, $\Delta y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x}$ an. 2.5 P.|
      iii. Bestimmen Sie $d$ und $e$ so, dass alle Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ null sind. 1 P.|

   b) Es wird das lineare zeitinvariante autonome System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

   betrachtet.

      i. Ist dieses System global asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P.|
      ii. Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$. 2.5 P.|
      iii. Berechnen Sie $\mathbf{x}(t \geq 0)$ für $\mathbf{x}(t = 0) = [x_{1,0} \; x_{2,0}]^{\mathrm{T}}$. 0.5 P.|

   c) Gegeben ist das lineare zeitdiskrete System

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_k\\ y_k &= [1 \;\; 2]\mathbf{x}_k.\end{aligned}$$

      i. Ist dieses System vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P.|
      ii. Bestimmen Sie die $z$-Übertragungsfunktion $\mathbf{G}(z)$ des Abtastsystems. 1 P.|
      iii. Ist die $z$-Übertragungsfunktion $\mathbf{G}(z)$ BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! 0.5 P.|

**Lösung:**

a) i. $x_{1R} = -d$, $x_{2R} = e \pm \sqrt{e^2 - e}$

   ii. $\mathbf{b} = [-d \;\; 0]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = [-14d \quad -\frac{1}{(1+e\pm\sqrt{e^2-e})^2}]$ und $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{e^2 - e} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   iii. $e = 1$ und $d$ ist beliebig.

b) i. Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ lauten: $\lambda_{12} = -2 \pm I \Rightarrow$ System ist global asymptotisch stabil.

   ii.

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t}(\cos t - \sin t) & \mathrm{e}^{-2t}\sin t \\ -2\mathrm{e}^{-2t}\sin t & \mathrm{e}^{-2t}(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}$$

iii.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t}\Big(x_{1,0}(\cos t - \sin t) + x_{2,0}\sin t\Big) \\ \mathrm{e}^{-2t}\Big(x_{2,0}(\cos t + \sin t) - 2x_{1,0}\sin t\Big) \end{bmatrix}$$

c) i. Die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ besitzt vollen Rang und daher ist das System vollständig beobachtbar.

ii. $G(z) = \frac{4z-10}{z^2-3z+5}$

iii. Die Pole von $G(z)$ lauten $z_{12} = \frac{3}{2} \pm I\frac{\sqrt{11}}{2}$ und sind daher außerhalb vom Einheitskreis. Daher ist $G(z)$ nicht BIBO-stabil.

2. Gegeben ist das Pol/Nullstellen Diagramm der Übertragungsfunktion $G(s)$. 9 P.|

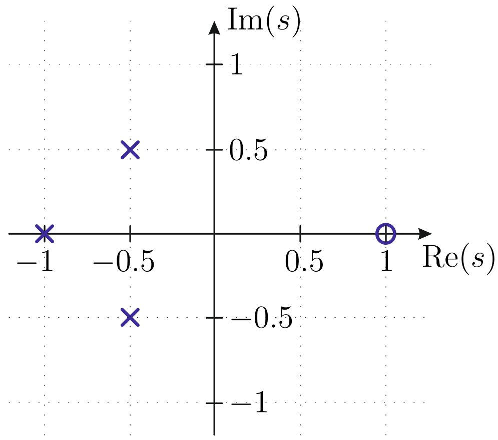


Abbildung 1: Pol/Nullstellendiagramm.

a) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ an und charakterisieren Sie das System auf Phasenminimalität und Sprungfähigkeit. Begründen Sie ihre Antworten! 1.5 P.|

b) Gemäß Abbildung 2 soll nun ein P-Regler mit dem konstanten Verstärkungsfaktor $\alpha \in \mathbb{R}$ entworfen werden. Bestimmen Sie den zulässigen Wertebereich für $\alpha$ für den der geschlossene Kreis BIBO-stabil ist. 3 P.|

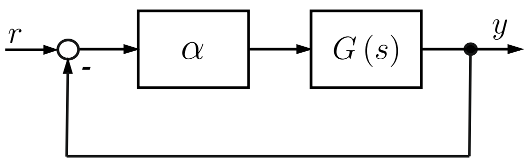


Abbildung 2: Einschleifiger Standardregelkreis.

c) Entwerfen Sie mithilfe des FKL-Verfahrens einen Kompensationsregler der Form 4.5 P.|

$$R_1(s) = \frac{V_R\, n(s)}{s\,(1+sT_R)^{\rho}} \tag{1}$$

für die Übertragungsfunktion

$$G_1(s) = \frac{s+2}{\left(s+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)(s^2+s+1)}\ , \tag{2}$$

sodass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises folgenden Anforderungen genügt:

- Anstiegszeit $t_r = 0.75s$
- Prozentuelles Überschwingen ü $= 25\%$
- Keine bleibende Regelabweichung

Wählen Sie den kleinst möglichen Wert für $\rho \in \mathbb{N}$, damit die obigen Anforderungen erfüllt werden können.

**Lösung:**

a) $G(s) = \frac{s-1}{(s+1)\left(s^2+s+\frac{1}{2}\right)}$
Das System ist nicht phasenminimal und nicht sprungfähig.

b) $-\dfrac{5}{6} < \alpha < \dfrac{1}{2}$

c) $\rho = 1$
$T_R = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
$V_R = \frac{8}{3\sqrt{2}}$

3. Die folgenden Aufgaben können getrennt voneinander bearbeitet werden. 10 P.|

a) Gegeben ist das zeitkontinuierliche System 5. Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t) \tag{3}$$
$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t).$$

Die Erreichbarkeitsmatrix $\mathcal{R}$ und die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}$ des obigen Systems besitzen jeweils den Rang 4.

i. Bestimmen Sie den <u>nicht</u> erreichbaren Zustand. 1 P.|

ii. Bestimmen Sie den <u>nicht</u> beobachtbaren Zustand. 1 P.|

b) Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \tag{4}$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k.$$

i. Entwerfen Sie einen Dead-Beat Regler für das System (4). 3 P.|

ii. Bestimmen Sie jenes Gebiet $\mathcal{D}$ in der $(x_{1,0}, x_{2,0})$-Ebene des Anfangszustandes $\mathbf{x}_0$, damit die Stellgrößenbeschränkung $0 \leq u_k \leq 12$ nicht verletzt wird. 2 P.|

c) Entwerfen Sie für das zeitdiskrete System 3 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}_k \tag{5}$$
$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k$$

einen Zustandsregler der Form $u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k$, sodass alle Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $\lambda_i = -\frac{1}{2}$ zu liegen kommen.
**Hinweis:** Um die Aufgabe zu lösen, muss die Erreichbarkeitsmatrix nicht berechnet werden.

**Lösung:**

a) i. Der Zustand $x_4$ ist nicht vollständig erreichbar, da dieser weder direkt durch eine Eingangsgröße, noch durch eine andere Zustandsgröße beeinflusst werden kann.
ii. Der Zustand $x_2$ ist nicht vollständig beobachtbar, da dieser weder direkt, noch indirekt am Ausgang sichtbar ist.

b) i. Der Rückführungsvektor lautet $\mathbf{k}_{db}^{\mathrm{T}} = [-\frac{2}{3}, -1]$
ii. $\mathcal{D} = \left\{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \middle| -12 - \frac{2}{3}x_{1,0} \leq x_{2,0} \leq -\frac{2}{3}x_{1,0}\right\}$

c) $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \left[-\frac{3}{16}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right]^{\mathrm{T}}$

4. Es soll das Separationsprinzip hergeleitet werden. Dieses besagt, dass bei der Kombination eines linearen Zustandsreglers mit einem vollständigen Luenberger Beobachter die Eigenwerte beim Entwurf des Reglers und des Beobachters getrennt voneinander vorgegeben werden können. Dazu wird das lineare zeitdiskrete System 10 P.|

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)\\ y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k\end{aligned}$$

betrachtet. Als Messgröße steht nur der Ausgang $y_k$ zur Verfügung und der Zustand $\mathbf{x}_k$ soll geschätzt werden. Der Zustandsregler besitzt die konstanten Verstärkungen $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ für den Zustand und $g$ für die Führungsgröße $r_k$.

a) Schreiben Sie den geschlossenen Kreis als Differenzengleichungssystem im Zustand $\mathbf{x}_{ges}^{\mathrm{T}} = [\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}]$ mit dem Schätzfehler $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ und der Führungsgröße $r_k$ als neuem Eingang an. Dabei bezeichnet $\hat{\mathbf{x}}$ den beobachteten Zustand. 5 P.|

b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p_{ges}(z)$ des geschlossenen Kreises und trennen Sie dieses in das charakteristische Polynom für den Zustandsreglerentwurf $p_g(z)$ und für den Zustandsbeobachterentwurf $\hat{p}_g(z)$ auf. 2 P.|

c) Bestimmen Sie die $z$-Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises vom Eingang $r_k$ zum Ausgang $y_k$. Welche Ordnung hat die Übertragungsfunktion wenn $\dim(\mathbf{x}) = n$ ist? 3 P.|

**Lösung:** Die Lösung zu diesem Beispiel finden Sie im Skriptum zur Vorlesung Automatisierung im Beweis von Satz 8.6 (Separationsprinzip) und in der Lösung von Aufgabe 8.11.