Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 14.07.2017

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	11	10	9.5	9.5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ Fr., 21.07.2017 ☐ Mo., 24.07.2017 ☐ Di., 25.07.2017

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben: 11 P.|

a) Gegeben ist das zeitdiskrete System 7 P.|

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 32 & 0 & -16 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \end{aligned} \tag{1}$$

i. Beurteilen Sie die asymptotische Stabilität des Systems. 1 P.|
Hinweis: Das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix lautet $p(z) = z^3 - \frac{1}{2}z$

ii. Berechnen Sie für den Anfangswert $\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ und der Eingangsfolge $(u_k) = (0, 0, \dots,)$ den Ausgang zum Zeitpunkt $k = 9$. 2 P.|
Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Cayley-Hamilton.

iii. Prüfen Sie das System auf vollständige Erreichbarkeit. 1 P.|

iv. Entwerfen Sie für das System (1) einen Zustandsregler der Form $u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k$ mit dem Vektor $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$, sodass der geschlossene Kreis Dead-Beat Verhalten aufweist. 3 P.|

b) Von einem zeitdiskreten LTI-System wurden für die Eingangsfolge $(u_k) = (\delta_k)$ die Messwerte 4 P.|

$$(y_k) = \left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$$

aufgenommen.

i. Geben Sie die Impulsantwort (g_k) des Systems an. 1 P.|

ii. Berechnen Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$. Sollten Sie die vorhergehenden Aufgabe nicht gelöst haben, verwenden Sie $(g_k) = \left(\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right)$. 1 P.|

iii. Bestimmen Sie die Sprungantwort (h_k). 2 P.|

2. Bearbeiten Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben: 10 P.|

a) Gegeben ist das System aus Abbildung 1 mit den Übertragungsmatrizen 8 P.|

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} 0 & F_{12} \\ F_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_1(s) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10+s} & \frac{1}{1+s} \\ 0 & \frac{1}{50+s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{10}{\alpha+s} \end{bmatrix}$$

und dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

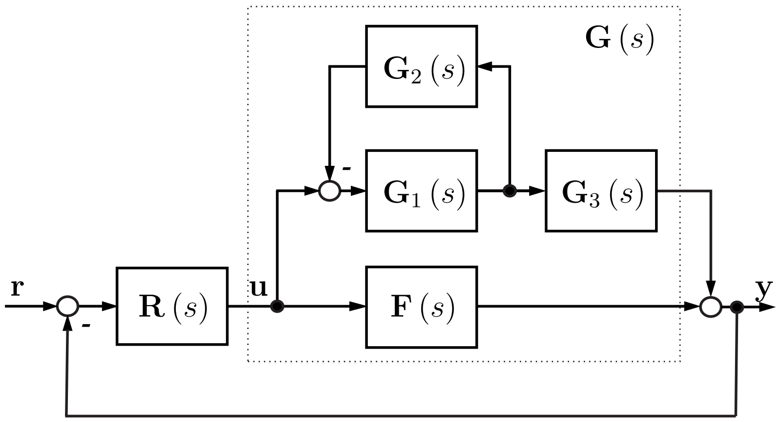

Abbildung 1: Blockschaltbild des Regelkreises.

Die Aufgabe iii ist unabhängig von den vorhergehenden Punkten lösbar.

i. Berechnen Sie allgemein die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ vom Eingang $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ zum Ausgang $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 2 P.|

Hinweis: Beachten Sie, dass die Matrixmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

ii. Berechnen Sie die Einträge F_{12} und F_{21} der Matrix $\mathbf{F}$, sodass die beiden Teilsysteme voneinander entkoppelt sind, daher $\mathbf{G}(s)$ Diagonalstruktur aufweist. 2 P.|

iii. Für das zweite Teilsystem soll ein Regler der Form 4 P.|

$$R_{22}(s) = V\frac{1 + sT_I}{s^\rho}$$

nach dem FKL-Verfahren entworfen werden, sodass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Eigenschaften aufweist:

- Anstiegszeit $t_r = 0.025\,\mathrm{s}$
- Überschwingen ü $= 5\,\%$
- $e_\infty|_{r_2(t)=\sigma(t)} = 0$.

Verwenden Sie für den Entwurf die Übertragungsfunktion

$$G_{22}(s) = \frac{100\,(50 + s)}{(3600 + 120s + s^2)}.$$

Bestimmen Sie die Reglerparameter ρ, V und T_I.
Hinweis: $\tan(50°) \approx 1.2$.

b) Gegeben ist die q-Übertragungsfunktion 2 P.

$$G^{\#}(q) = \frac{12 - 12q}{12 + 35q + 25q^2}.$$

Bestimmen Sie, welche der folgenden s-Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{5 + \left(\frac{4}{\ln(3)} - \frac{3}{\ln(2)}\right) s}{\left(1 + \frac{s}{\ln(2)}\right)\left(1 + \frac{s}{\ln(3)}\right)} \qquad G_2(s) = \frac{1 + \left(\frac{4}{\ln(3)} - \frac{3}{\ln(2)}\right) s}{\left(1 + \frac{s}{\ln(2)}\right)\left(1 + \frac{s}{\ln(3)}\right)}$$

$$G_3(s) = \frac{1 + \left(\frac{4}{\ln(3)} - \frac{3}{\ln(2)}\right) s + s^2}{\left(1 + \frac{s}{\ln(2)}\right)\left(1 + \frac{s}{\ln(3)}\right)} \qquad G_4(s) = \frac{1 + \left(\frac{4}{\ln(3)} - \frac{3}{\ln(2)}\right) s}{\left(1 - \frac{s}{\ln(2)}\right)\left(1 + \frac{s}{\ln(3)}\right)}$$

mit $T_a = 2\,\mathrm{s}$ auf $G^{\#}(q)$ führt. Begründen Sie auch für alle anderen Übertragungsfunktionen, warum diese nicht zu $G^{\#}(q)$ passt.

3. Bearbeiten Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben: 9.5 P.|

a) Gegeben ist ein nichtlineares System in der Form 6.5 P.|

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\left(x_1 - 1\right)^2 + \frac{1}{2}\cos(\pi x_2) \\
\dot{x}_2 &= 3x_1 - 9x_2^2 + \int_0^t \cos\left(\pi x_2\right) - x_1 \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}u^2 \\
x_2 &= \frac{4}{3\pi}\arctan\left(\left(y - u\right)x_1\right)
\end{aligned}
$$

i. Wählen Sie für das gegebene System geeignete Zustandsgrößen $\mathbf{x}$ und geben Sie die nichtlineare Zustandsraumdarstellung der Form 2 P.|

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\
y &= g(\mathbf{x}, u)
\end{aligned}
$$

an.

ii. Bestimmen Sie für dieses System mit dem stationären Eingang $u_R = 1$ alle Ruhelagen. Wie viele Ruhelagen existieren für das System. 2 P.|

iii. Linearisieren Sie das System um eine zuvor bestimmten Ruhelage. 2.5 P.|

b) Gegeben ist die s-Übertragungsfunktion 3 P.|

$$
G(s) = \frac{V}{1 + 2\xi\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}.
$$

Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω_r in Abhängigkeit der Dämpfung ξ, mit $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, bei der der Betragsgang der Übertragungsfunktion seinen maximalen Wert annimmt. Berechnen Sie außerdem allgemein diesen Maximalwert.

4. Bearbeiten Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben: 9.5 P.|

a) Von einem zeitkontinuierlichen LTI-System ist die Transitionsmatrix 5 P.|

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\lambda_3 t}}{\lambda_1 - \lambda_3} \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \tag{2}$$

gegeben. Für die Eigenwerte $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ sowie $\lambda_3 = -3$ und den Ausgangsvektor $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ folgt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s^2 + 5s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}. \tag{3}$$

i. Bestimmen Sie den Ausdruck $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ für die gegebenen Zahlenwerte, wobei $\mathbf{A}$ die zu (2) korrespondierende Dynamikmatrix beschreibt. 1 P.|

ii. Bestimmen Sie $\mathbf{b}$ und d welche auf die Übertragungsfunktion (3) führt . 1.5 P.|

iii. Berechnen Sie die zu (2) zugrundeliegende Dynamikmatrix für **allgemeine** Eigenwerte. 1 P.|

iv. Betrachten Sie den Spezialfall $\lambda_3 = \lambda_1$ und berechnen Sie allgemein die Transitionsmatrix. Welche Aussage können Sie über die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ_1 treffen. 1.5 P.|

b) Für die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems ist eine Eigenwertzerlegung durchgeführt worden, wobei sich die Matrizen 4.5 P.|

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & -0.5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ergaben. Die ermittelten Rechts- und Linkseigenvektoren sind in den Matrizen $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$ bzw. $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \end{bmatrix}$ und die Eigenwerte als Diagonalelemente in der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ angeführt.

i. Berechnen Sie Bedingungen für einen Eingangsvektor $\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$, sodass das System mit der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ vollständig erreichbar ist. 1.5 P.|

ii. Für die Eigenvektoren gilt die Beziehung $\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$. Folgern Sie daraus einen Zusammenhang für die Matrizen $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}$ und $\mathbf{V}$. 1.5 P.|

Hinweis: Für das Kronecker-Delta gilt $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

iii. Berechnen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$. 1.5 P.|