

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 14.07.2017

LÖSUNG

Aufgabe 1:

- a) i. Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Alle Eigenwerte liegen innerhalb des Einheitskreises, daher ist das System asymptotisch stabil.
- ii. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt $\Phi^3 = \frac{1}{2}\Phi$. Somit folgt der Zusammenhang $\Phi^9 = \frac{1}{16}\Phi$ und abschließend $y_9 = \frac{1}{16}\mathbf{c}^T \Phi \mathbf{x}_0 = -8$.
- iii. Anhand der Erreichbarkeitsmatrix $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 6 \end{bmatrix}$ und dessen Determinante $\det(\mathcal{R}) = 3.5 \neq 0$ folgt, dass das System vollständig erreichbar ist.
- iv. Einsetzen des Regelgesetzes und Berechnung des charakteristischen Polynomes liefert über einen Koeffizientenvergleich den Rückführvektor $\mathbf{k} = [0 \quad -\frac{6}{7} \quad 1]^T$. Alternativ folgt aus der Formel von Ackermann und dem Satz von Cayley-Hamilton $\mathbf{k}^T = -\mathbf{v}^T \Phi^3 = -\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \Phi$ mit $\mathbf{v} = [0 \quad \frac{13}{7} \quad -2]^T$.
- b) i. $(g_k) = (y_k) = \left(2 \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$ mit $k = 0, 1, 2, \dots$
- ii. Die z-Transformation $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2z}$ liefert direkt $G(z) = \frac{4z}{2z-1}$ bzw. $G(z) = \frac{12z}{4z-1}$ für die alternative Angabe. Die Korrespondenz IV aus der Formelsammlung liefert mit der Substitution $e^{aT_a} = \frac{1}{2}$ bzw. $e^{aT_a} = \frac{1}{4}$ auch direkt die gesuchte Lösung.
- iii. $(h_k) = \left(\sum_{n=0}^k g_n\right) = \left(4 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) \sigma_k\right) = \left(2\delta_k + \left(4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) \sigma_{k-1}\right)$
bzw. $\left(4 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\right) \sigma_k\right)$. Alternativ folgt die Sprungantwort im z-Bereich $H(z) = G(z) \frac{z}{z-1} = \frac{2z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}$. Aus der Partialbruchzerlegung von $\frac{2z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} z$ folgt $\left(\frac{4}{z-1} - \frac{2}{z-\frac{1}{2}}\right) z$, welche über die Korrespondenztabelle die Lösung im Zeitbereich liefert.

Aufgabe 2:

- a) i. $\mathbf{G}(s) = \mathbf{F} + \mathbf{G}_3 \mathbf{G}_1 (\mathbf{E} + \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1)^{-1} = \mathbf{F} + \mathbf{G}_3 (\mathbf{E} + \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{G}_1.$
ii. $F_{12} = 40 \frac{(10+s)(50+s)}{(s+1)(14+s)(60+s)}, F_{21} = 0.$
iii. $\rho = 1, T_I = \frac{2-\sqrt{3}}{60}, V = \frac{2160}{\sqrt{60^2+50^2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$

b)

$$G^\#(q) = \frac{1-q}{\left(1+\frac{q}{0.8}\right)\left(1+\frac{q}{0.6}\right)}$$

- $G_1(s)$: Verstärkungsfaktoren von G_1 und $G^\#(q)$ sind unterschiedlich.
- $G_3(s)$: $G^\#(q)$ hat eine Nullstelle bei Ω_0 , d.h. nicht sprungfähig. G_3 ist sprungfähig.
- $G_4(s)$: $G^\#(q)$ hat nur Pole in der linken Halbebene, G_4 hat einen Pol in der rechten Halbebene.

Daher ist $G_2(s)$ die gesuchte Lösung.

Aufgabe 3:

- a) i. Die nichtlineare Zustandsraumdarstellung lautet:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2} \cos(\pi x_2) \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 - 9x_2^2 + x_3 + \frac{1}{2}u^2 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + \cos(\pi x_2) \\ y &= \frac{\tan\left(\frac{3\pi}{4}x_2\right)}{x_1} + u\end{aligned}$$

- ii. Für $u_R = 1$ existieren unendlich viele Ruhelagen, die sich zu

$$\begin{aligned}x_{1,R} &= \frac{1}{2} \\ x_{2,R} &= \pm \frac{1}{3} + 2k \\ x_{3,R} &= 9x_{2,R} - 3x_{1,R} - \frac{1}{2}u\end{aligned}$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ ergeben. Mit der Wahl $k = 0$ folgt $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}^T$.

- iii. Die Systemmatrizen des linearisierten Systems lauten für $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}^T$ und $u_R = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}\pi}{4} & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ -1 & -\frac{\sqrt{3}\pi}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} -4 & 3\pi & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad d = 1.$$

- b)

$$\begin{aligned}\omega_r &= \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \\ |G(s)|_{\max} &= \frac{V}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

a) i. $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathcal{L}\{\Phi\} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} (s+2)(s+3) & 0 & s+2 \\ 0 & (s+1)(s+3) & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}.$

ii. Für die Übertragungsfunktion gilt $G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \Phi \mathbf{b}$. Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich liefert $\mathbf{b} = [0 \ 1 \ 1]^T, d = 0$.

iii. $\mathbf{A} = \frac{d}{dt} \Phi|_{t=0} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$

iv. $\Phi = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}.$

Der Eintrag $te^{\lambda_1 t}$ folgt direkt aus der Anwendung der Regel von de l'Hospital. Die algebraische Vielfachheit ist zwei und die geometrische Vielfachheit ist eins, siehe Jordansche Normalform.

b) i. Anhand des PHB Eigenvektortest folgt direkt $b_1 \neq 0, b_2 \neq b_1, b_3 \neq 2b_2 + 0.5b_1$.

ii. In Matrixschreibweise folgt $\mathbf{W}^T \mathbf{V} = \mathbf{E}$ und somit $\mathbf{W}^T = \mathbf{V}^{-1}$.

iii. $\mathbf{A} = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3.5 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$