Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 29.09.2017

LÖSUNG

Aufgabe 1:

a) i. siehe Abbildung 1

ii. Wie in Abbildung 1 zu erkennen ist, ergibt sich mit $R(s) = 10$ eine Durchtrittsfrequenz $\omega_c \approx 300\frac{1}{\mathrm{s}}$ und eine Phasenreserve $\Phi_r \approx -180°$.

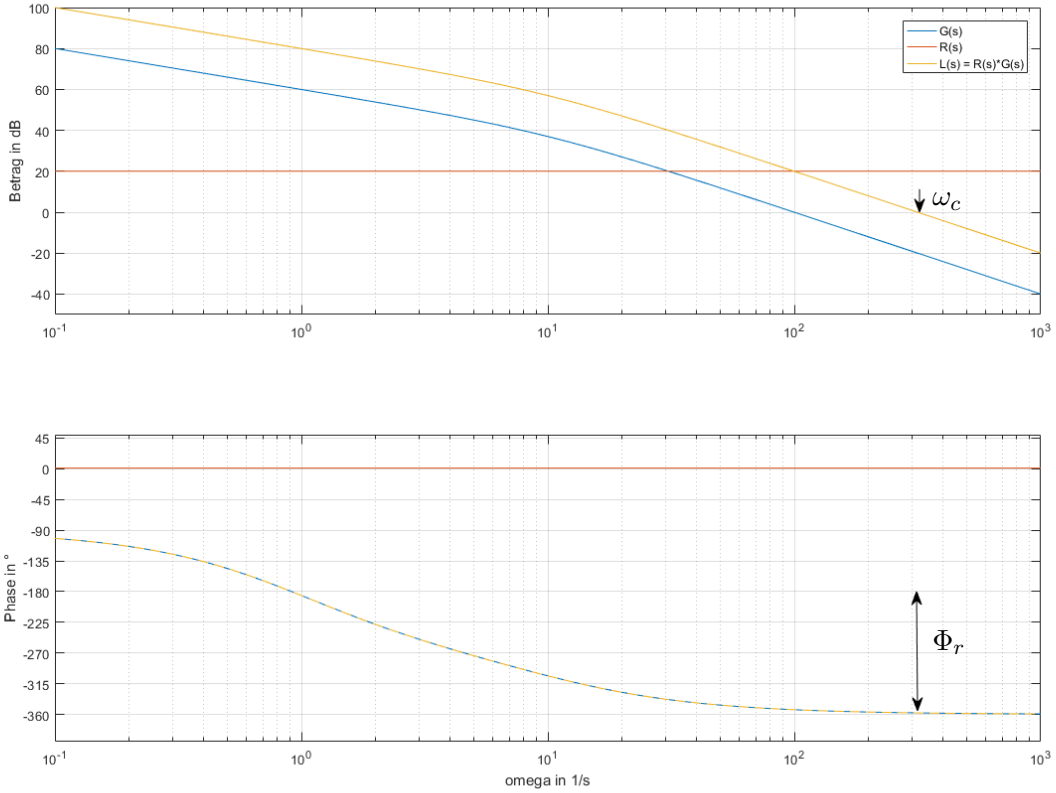

Abbildung 1: Bodediagramm Aufgabe 1.

iii. Eine Nullstelle des Systems liegt in der rechten s-Halbebene. Daher handelt es sich nicht um ein phasenminimales System.

iv. $0 < k_p < \frac{11}{12000}$

b) i.

$$|F(j4)| = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$$

$$\arg\left(F\left(j4\right)\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) - \arctan\left(\frac{4}{8}\right) - \arctan\left(4\right) - \underbrace{3 \times 4}_{\text{Totzeit}}$$

$$y\left(t\right) = \frac{9}{10} + 10|F\left(j4\right)|\sin\left(4t + \frac{2\pi}{3} + \arg\left(F\left(j4\right)\right)\right)$$

Aufgabe 2:

a) i. Bei der Betrachtung der Streckenübertragungsfunktion $G\left(s\right)$ ist zu erkennen, dass $\arg(G\left(j\omega\right)) < 180°$ ist. Daher muss der gewählte Regler $R\left(s\right)$ die Phasenlage des offenen Regelkreises $L\left(s\right) = R\left(s\right)G\left(s\right)$ anheben können, um eine positive Phasenreserve zu ermöglichen. Diese Eigenschaft besitzen nur die Regler von Punkt c, d und e.

ii. $T = 1000\left(2 + \sqrt{3}\right) \qquad k_D = \frac{\sqrt{26}}{5\times10^6\sqrt{1+\left(2+\sqrt{3}\right)^2}}$

b) i. nicht sprungfähig

ii. $\Delta\arg(G(j\omega)) = -2\pi$

iii. Stetige Winkeländerung Nenner ist Null $\Rightarrow \Delta\arg(G(j\omega)) = \Delta\arg(z(j\omega)) = -2\pi$.
D.h. laut dem Kriterium von Michailov (Satz 4.4) müsste der Grad des Zählerpolynoms für ein Hurwitzpolynom -2 sein. Das ist nicht möglich $\Rightarrow$ kein Hurwitzpolynom.

Aufgabe 3:

a) i. $G\left(z\right) = \frac{\alpha z^3+(1-\alpha)z^2+(2\alpha-1)z-4\alpha}{z^3-z^2+2z-4}$

ii. Die Beobachtbarkeitsmatrix errechnet sich zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

und besitzt den Rang 3. Daher ist das System vollständig beobachtbar.

iii. Das Vorhandensein eines direkten Durchgriffs hat keinen Einfluss auf die Beobachtbarkeit. Beim Aufstellend des Fehlersystems fällt der Ausdruck α weg.

iv. Es ist nicht möglich mit einem trivialen Beobachter den Zustand $\mathbf{x}_k$ zu schätzen. Das Fehlersystem lässt sich mit $\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{e}_k$ angeben. Mithilfe der Notwendigen Bedingung für ein Einheitskreispolynom (das benötigte charakteristische Polynom kann unmittelbar aus der Dynamikmatrix $\mathbf{\Phi}$ abgelesen werden) erkennt man, dass sich nicht alle Eigenwerte der Fehlerdynamik innerhalb des Einheitskreises befinden.

v. $\hat{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{-33}{8} & \frac{5}{4} & \frac{-5}{2} \end{bmatrix}$

vi. Die Erreichbarketismatrix lautet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma} & \mathbf{\Phi}^2\mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

und besitzt ebenfalls den Rang 3. Daher ist das System der vollständig erreichbar und die Eigenwerte lassen sich beliebig platzieren.

vii. Die Zustandsregler/Zustandsbeobachter Konfiguration besitzt folgende Struktur

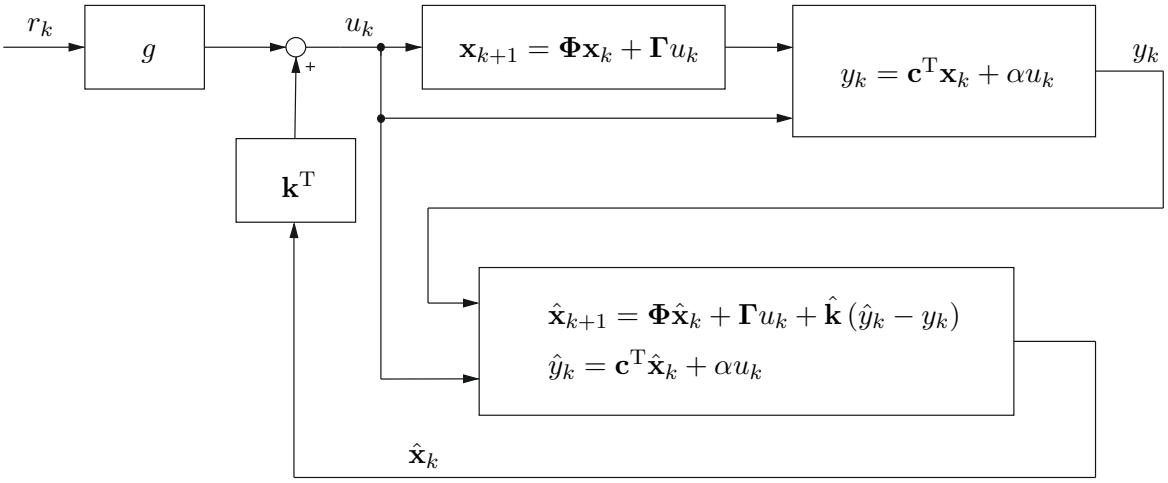

Abbildung 2: Zustandsregler/Zustandsbeobachter Konfiguration.

b) i.

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \cos(T_a) & \sin(T_a) \\ -\sin(T_a) & \cos(T_a) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 - \cos(T_a) \\ \sin(T_a) \end{bmatrix}$$

ii. siehe Skript

Aufgabe 4:

a) i. $\alpha \pm \beta < 0$

ii.

$$\mathbf{\Phi} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-3t} + e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-3t} + e^{-t} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{\Phi}} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

iii. Geometrische und algebraische Vielfachheit aller Eigenwerte muss gleich sein

b) i. Einsetzen der Lösung zeigt den gewünschten Sachverhalt, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{r_0^3}}$

ii.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_4^2 - \frac{k}{x_1^2} + u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{u_2}{x_1} \end{aligned}$$

iii.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2r_0\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega_0}{r_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}$$