Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 01.12.2017

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	8	12	9	11	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ Mo., 11.12.2017 ☐ Di., 12.12.2017

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist der Regelkreis aus Abbildung 1. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben: 8 P.|

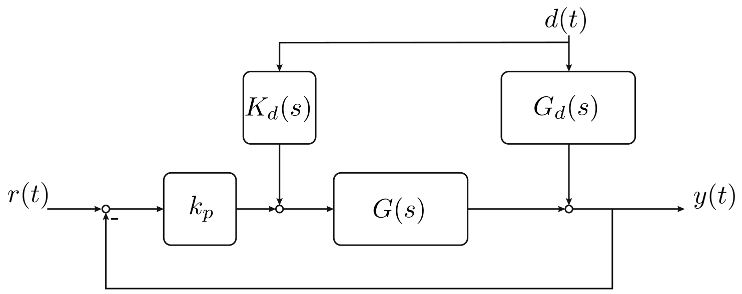

Abbildung 1: Regelkreis mit Störgrößenaufschaltung.

$$G(s) = \frac{1}{(s+8)(s^2+s+2)}, \quad G_d(s) = \frac{1}{10s+1}$$

a) Geben Sie die Übertragungsfunktionen $T_{r,y}(s)$ und $T_{d,y}(s)$ an. 2 P.|

b) Bestimmen Sie den Wertebereich für k_p so, dass der geschlossene Kreis BIBO-stabil ist (Vernachlässigen Sie die Störung $d(t)$). 2 P.|

c) Bestimmen Sie den Parameter k_p so, dass für die Referenzgröße $r(t) = \sigma(t)$ die bleibende Regelabweichung $e_\infty = \frac{1}{5}$ ist (Vernachlässigen Sie die Störung $d(t)$). 1 P.|

d) Errechnen Sie die ideale Störgrößenaufschaltung $K_d(s)$ so, dass die Störung nicht auf den Ausgang $y(t)$ wirkt. Welche allgemeinen Voraussetzungen an $G(s)$ und $G_d(s)$ müssen erfüllt sein, dass ein solcher Regler verwendet werden kann? 2 P.|

e) Nehmen Sie nun an, dass $K_d(s) = K_d$ ein konstanter Verstärkungsfaktor ist. Bestimmen Sie K_d so, dass für $t \to \infty$ eine sprunghafte Störgröße $d(t) = \sigma(t)$ nicht auf den Ausgang $y(t)$ wirkt. Für k_p wird vorausgesetzt, dass der Regelkreis BIBO-stabil ist.
Hinweis: Verwenden Sie den Endwertsatz. 1 P.|

Lösung:

a) $T_{r,y}(s) = \frac{k_p}{s^3+9s^2+10s+16+kp}$, $T_{d,y} = \frac{G_d(s)+K_d(s)G(s)}{1+k_pG(s)}$.

b) Mit dem Routh-Hurwitz Verfahren. $-16 < k_p < 74$.

c) $k_p = 64$.

d) $K_d(s) = -\frac{G_d(s)}{G(s)}$. $K_d(s)$ muss realisierbar sein und $G(s)$ darf keine Nullstellen mit $\mathrm{Re}(s_i) \geq 0$ besitzen.

e) $K_d = -16$.

2. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden: 12 P.|

   a) Gegeben ist das zeitdiskrete System 4 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

   Entwerfen Sie einen Zustandsregler, welcher jede Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_0$ in höchstens 3 Schritten in $\mathbf{0}$ überführt.

   b) Gegeben ist die q-Übertragungsfunktion 4 P.|

$$G^{\#}(q) = \frac{q^2 - 2}{q^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}q + 1}$$

      i. Für welche Werte der Abtastzeit T_a ist die Übertragungsfunktion nicht realisierbar? Für welchen Wert der Abtastzeit T_a ist die Übertragungsfunktion nicht sprungfähig? 2 P.|

      ii. Bestimmen Sie für die Eingangsfolge $(u_k) = (1)^k + \sin(\frac{\pi}{4}T_a k)$ die Ausgangsfolge (y_k) im eingeschwungenen Zustand unter der Annahme $T_a = 2$. 2 P.|

   c) Gegeben ist die Impulsantwort $(g_k) = (0, 2, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \dots)$ eines linearen, zeitinvarianten Abtastsystems mit $n = 3$ Zuständen. 4 P.|

      i. Bestimmen Sie die zur Eingangsfolge $(u_k) = (1, 1, -2, 0, 0, 0, \dots)$ zugehörige Ausgangsfolge (y_k). 1 P.|

      ii. Prüfen Sie das System auf BIBO-Stabilität, Erreichbarkeit sowie Beobachtbarkeit. 3 P.|

Lösung:

a) $k^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$.

b) i. nicht realisierbar, wenn Polstelle bei Ω_0. Für alle T_a realiserbar.
nicht sprungfähig, wenn Nullstelle bei Ω_0. Für $T_a = \sqrt{2}$ nicht sprungfähig.

   ii. $(y_k) = -2(1)^k + \frac{3\sqrt{3}}{4} \sin(\frac{\pi}{4} T_a k + \frac{\pi}{2})$.

c) i. $(y_k) = (0, 2, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 1, 0, 0, \ldots)$.

   ii. nicht BIBO-stabil, erreichbar, beobachtbar

3. Gegeben ist ein zeitkontinuierliches lineares System mit der Transitionsmatrix 9 P.|

$$
\mathbf{\Phi}(t) = \exp(\mathbf{A}t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{e^{(a-1)t}+(a-1)e^{-t}-a}{a(a-1)} & \frac{e^{(a-1)t}-(a-1)^2e^{-t}+a(a-2)}{a(a-1)} \\ 0 & \frac{(a-1)e^{(a-1)t}+e^{-t}}{a} & \frac{(a-1)e^{(a-1)t}-(a-1)e^{-t}}{a} \\ 0 & \frac{e^{(a-1)t}-e^{-t}}{a} & \frac{e^{(a-1)t}+(a-1)e^{-t}}{a} \end{bmatrix},
$$

wobei a einen freien Parameter darstellt. Das System besitzt weiters keinen direkten Durchgriff und der Ausgangsvektor $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die zugehörige Dynamikmatrix $\mathbf{A}$. 2 P.|

b) Für welche Werte von a ist das System asymptotisch stabil? 1 P.|

c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ für einen allgemeinen Eingangsvektor $\mathbf{b}$. 2 P.|

d) Für welche Werte von a ist das System BIBO-stabil, wenn der Eingangsvektor $\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ist? 2 P.|

e) Für welche Eingangsvektoren $\mathbf{b}$ ist das System im Fall $a = 1$ stabil? 2 P.|

Lösung:

a) Aus der Beziehung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)$ *folgt*

$$\mathbf{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{\Phi}(t)|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Aus der ersten Spalte der Transitionsmatrix folgt direkt, dass das System unabhängig von a nicht asymptotisch stabil ist. Alternativ erkennt man an der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ *aus Punkt a), dass das System immer einen Eigenwert bei Null aufweißt.*

c) Die Übertragungsfunktion ergibt sich zu

$$G(s) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{b_1 s^2 + (b_1(2-a) + b_3)s + b_1(1-a) + b_2 + b_3(2-a)}{s(s+1)(s+1-a)}.$$

Anstatt der expliziten Berechnung der Resolventen durch $\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ *lässt sich diese auch mittels Laplace-Transformation der Transitionsmatrix bestimmen.*

d) Auswerten der Übertragungsfunktion liefert

$$G(s) = \frac{2s^2 + (3-2a)s - a}{s(s+1)(s+1-a)}.$$

Diese Strecke kann nur dann BIBO-stabil sein, wenn sich der Integrator herauskürzt, wofür $a = 0$ *gelten muss. Die verbleibende Übertragungsfunktion*

$$G(s) = \frac{2s+3}{(s+1)^2}$$

ist in der Tat BIBO-stabil.

e) Für den Fall $a = 1$ *reduziert sich die allgemeine Übertragungsfunktion zu*

$$G(s) = \frac{b_1 s^2 + (b_1 + b_3)s + b_2 + b_3}{s^2(s+1)}.$$

Analog zum vorherigen Unterpunkt muss sich der Doppelintegrator heruaskürzen, woraus die Bestimmungsgleichungen $b_1 + b_3 = 0$ *und* $b_2 + b_3 = 0$ *folgen. Das System ist also für alle Eingangsvektoren*

$$\mathbf{b} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

BIBO-stabil und besitzt die verbleibende Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\alpha}{s+1}.$$

4. Lösen Sie die beiden unabhängigen Teilaufgaben: 11 P.|

a) Gegeben ist das lineare zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{1}{2} & 8 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{2} & 6 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k.$$

i. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Rang}(\mathcal{R}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma})) = 2$ gilt. **Hinweis:** Verwenden Sie 2 P.|

$$\mathbf{\Phi}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{13}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

ii. Geben Sie eine Parametrierung des erreichbaren Unterraums $\mathcal{V}_r$ an. **Hinweis:** Der erreichbare Unterraum entspricht dem Bild der Erreichbarkeitsmatrix, d.h. $\mathcal{V}_r = \mathrm{Bild}(\mathcal{R}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}))$. 1 P.|

iii. Geben Sie eine Parametrierung des nicht-erreichbaren Unterraums $\mathcal{V}_{nr}$ an. 2 P.|

iv. Berechnen Sie eine Steuerfolge (u_k), welche das System innerhalb von zwei Abtastschritten von einem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^4$ in den Ursprung $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ überführt. 3 P.|

b) Für das zeitkontinuierliche System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

soll ein vollständiger Luenberger Beobachter entworfen werden.

i. Geben Sie die Differentialgleichung des Beobachters an und berechnen Sie die Dynamikmatrix des Beobachters explizit. 2 P.|

ii. Bestimmen Sie die Beobachterverstärkung $\mathbf{k}$, sodass sich das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix des Beobachters zu 1 P.|

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^4$$

ergibt. **Hinweis:** Sie müssen nicht die Formel von Ackermann anwenden.

Lösung:

a) i. *Mit der Erreichbarkeitsmatrix*

$$\mathcal{R}(\mathbf{\Phi},\mathbf{\Gamma}) = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & *\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & \frac{13}{2} & * \\ 0 & -1 & -\frac{5}{2} & * \\ 1 & 2 & 4 & * \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & *\end{bmatrix}$$

und $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1 + \frac{5}{2}\mathbf{v}_2$ *folgt direkt das gesuchte Ergebnis.*

ii. *Aus dem vorherigen Punkt folgt der erreichbare Unterraum direkt zu*

$$\mathcal{V}_r = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

iii. *Der nicht-erreichbare Unterraum ist das orthogonale Komplement von* $\mathcal{V}_r$*, d.h.*

$$\mathcal{V}_{nr} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 | \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \mathbf{v}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = 0\}.$$

Ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{nr}$ *erfüllt daher das Gleichungssystem*

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix},$$

woraus die Lösung

$$\mathcal{V}_{nr} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}1 \\ 0 \\ -1 \\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 \\ 1 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}\right)$$

folgt.

iv. *Aus der Gleichung* $\mathbf{x}_2 = \mathbf{\Phi}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma}u_0 + \mathbf{\Gamma}u_1 = \mathbf{0}$ *folgt, dass* $u_0 = \frac{1}{4}x_{0,2} - \frac{5}{2}x_{0,3}$ *und* $u_1 = -\frac{1}{2}x_{0,2} + x_{0,3}$.

b) i. *Der Luenberger Beobachter ist durch die Differentialgleichung*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{\left(\mathbf{A} + \mathbf{k}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right)}_{=\tilde{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u - \mathbf{k}y$$

gegeben, wobei sich die Dynamikmatrix des Beobachters zu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1+2k_1 \\ 1 & 0 & 0 & -4+2k_2 \\ 0 & 1 & 0 & +2+2k_3 \\ 0 & 0 & 1 & -3+2k_4\end{bmatrix}$$

ergibt.

ii. *Da sich das System in Beobachtbarkeitsnormalform befindet, lässt sich die Lösung durch Koeffizientenvergleich direkt ablesen. Es ergibt sich*

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -4 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$