

**Technische Universität Wien**  
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Automatisierung  
am 02.02.2018

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

|                    |   |   |    |    |          |
|--------------------|---|---|----|----|----------|
| Aufgabe            | 1 | 2 | 3  | 4  | $\Sigma$ |
| erreichbare Punkte | 9 | 9 | 11 | 11 | 40       |
| erreichte Punkte   |   |   |    |    |          |

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und
- ... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ 12.02.2018

☐ 13.02.2018

**Viel Erfolg!**

1. Gegeben ist das kontinuierliche System

9 P. |

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}\end{aligned}\tag{1}$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Ist das gegebene System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P. |
- b) Geben Sie Bedingungen für die Koeffizienten  $a$  und  $b$  an, damit das System (1) vollständig beobachtbar ist. 2 P. |
- c) Berechnen Sie ein Zustandsregelgesetz für das System (1) unter der Annahme, dass für die Koeffizienten  $a = -1$  sowie  $b = 2$  gilt. Die Eigenwerte des geschlossenen Kreises sollen bei  $\{-1, -1, -3\}$  zu liegen kommen. 3 P. |  
**Hinweis:** Die Anwendung der Formel von Ackermann ist nicht notwendig aber nicht verboten!
- d) Das Regelgesetz soll nun um einen Term der Form 3 P. |

$$u = \mathbf{k}^T \mathbf{x} + gr$$

erweitert werden. Wählen Sie den Faktor  $g$  so, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r$ , wobei  $r$  eine Konstante ist.

### Lösung:

- a) Das System ist nicht stabil da ein Eigenwert bei  $\lambda = 1$  liegt (Dreieckstruktur).  
b) Die Beobachtbarkeitsmatrix berechnet sich zu

$$\mathcal{O}(\mathbf{A}, \mathbf{c})^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 1 \\ 2a & a+2b & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante berechnet sich damit zu  $a(a+2b) - 2ab = a^2$ . Als Bedingungen können damit

$$\begin{aligned} a &\neq 0 \\ b &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

angegeben werden.

- c) Wird das Regelgesetz  $\mathbf{u} = \mathbf{k}^T \mathbf{x}$  in die Systemgleichung eingesetzt ergibt sich

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1+k_1 & 1+k_2 & k_3 \\ -2k_1 & 1-2k_2 & -2k_3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Das charakteristische Polynom dieser neuen Dynamikmatrix berechnet sich zu

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(2k_2 - k_1 - 3) + \lambda(3 + 4k_1 - 4k_2 + 5k_3) + 2k_2 - 3k_1 - 7k_3 - 1$$

. Vergleicht man dieses Polynom mit dem gewünschten Polynom

$$p_d(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda + 3)$$

so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2k_2 - k_1 - 3 &= 5 \\ 3 + 4k_1 - 4k_2 + 5k_3 &= 7 \\ -1 + 2k_2 - 3k_1 - 7k_3 &= 3 \end{aligned}$$

. Durch Lösen des Gleichungssystems ergibt sich der Rückführungsvektor zu

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 30 \\ 19 \\ -8 \end{bmatrix}$$

- d) Aus den Systemgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}gr \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

erhält man mittels Laplacetransformation

$$y = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}gr$$

. Wird nun der Endwertsatz angewendet so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} r &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}gr \\ &= \frac{-7}{3} gr \end{aligned}$$

womit sich  $g = -\frac{3}{7}$  ergibt.

2. Aufgabe **a)** und Aufgabe **b)** können voneinander unabhängig gelöst werden.

**9 P.**|

a) Von einer Strecke ist die Übertragungsfunktion

**6 P.**|

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{(1 + 10s)}{(s)(1 + 0.1\frac{s}{10} + \frac{s^2}{100})} \quad (2)$$

bekannt.

i. Zeichnen Sie im beiliegenden Blatt den Amplitudengang sowie den Phasengang der drei Teile (jeweils in Klammern) der Übertragungsfunktion ein. Stellen Sie ebenfalls den Amplituden- bzw. Phasengang der gesamten Übertragungsfunktion  $G(s)$  dar.

**3 P.**|

ii. Die Strecke (2) wird nun gemäß Abbildung 1 aufgeteilt. Berechnen Sie die Ausgangsgröße  $y(t)$  im eingeschwungenen Zustand für die Größe

**3 P.**|

$$e(t) = (3e^{-3t} + e^{-\frac{t}{10}} - 4\sin(10t + \frac{\pi}{4}))\sigma(t).$$

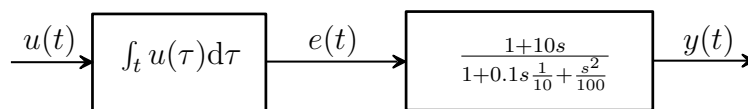


Abbildung 1: Aufteilung der Strecke.

**Hinweis:** Für diesen Unterpunkt können Sie eine Näherung mittels Frequenzkennlinien verwenden.

b) Von einem System ist die Differenzengleichung

**3 P.**|

$$ay_{k+3} + by_{k+2} + cy_{k+1} + dy_k + eu_k = 0$$

gegeben.

i. Geben Sie das System in Zustandsdarstellung für  $a \neq 0$  an. Wählen sie als Ausgang  $y_k$ .

**2 P.**|

ii. Wie müssen die Koeffizienten  $(a, b, c, d, e)$  gewählt werden, dass alle Eigenwerte der Dynamikmatrix bei 0 zu liegen kommen?

**1 P.**|

**Lösung:**

- a) i. Siehe Abbildung 2.  
 ii. Für die beiden Exponentialfunktionen ergibt sich für  $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (3e^{-3t} + e^{-\frac{t}{10}})\sigma(t) = 0.$$

Mit Hilfe des Bodediagramms kann nun die Ausgangsgröße  $y(t)$  zu

$$y(t) = -4000 \sin(10t + \frac{\pi}{4})$$

- b) i. Die Zustandsraumdarstellung lautet

$$\mathbf{z}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{d}{a} & -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \mathbf{z}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{e}{a} \end{bmatrix} \mathbf{u}_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}_k$$

- ii. Durch die Wahl von  $b = c = d = 0$  liegen alle Eigenwerte der Dynamikmatrix bei  $\lambda_i = 0 \ \forall i \in 1, 2, 3$ .

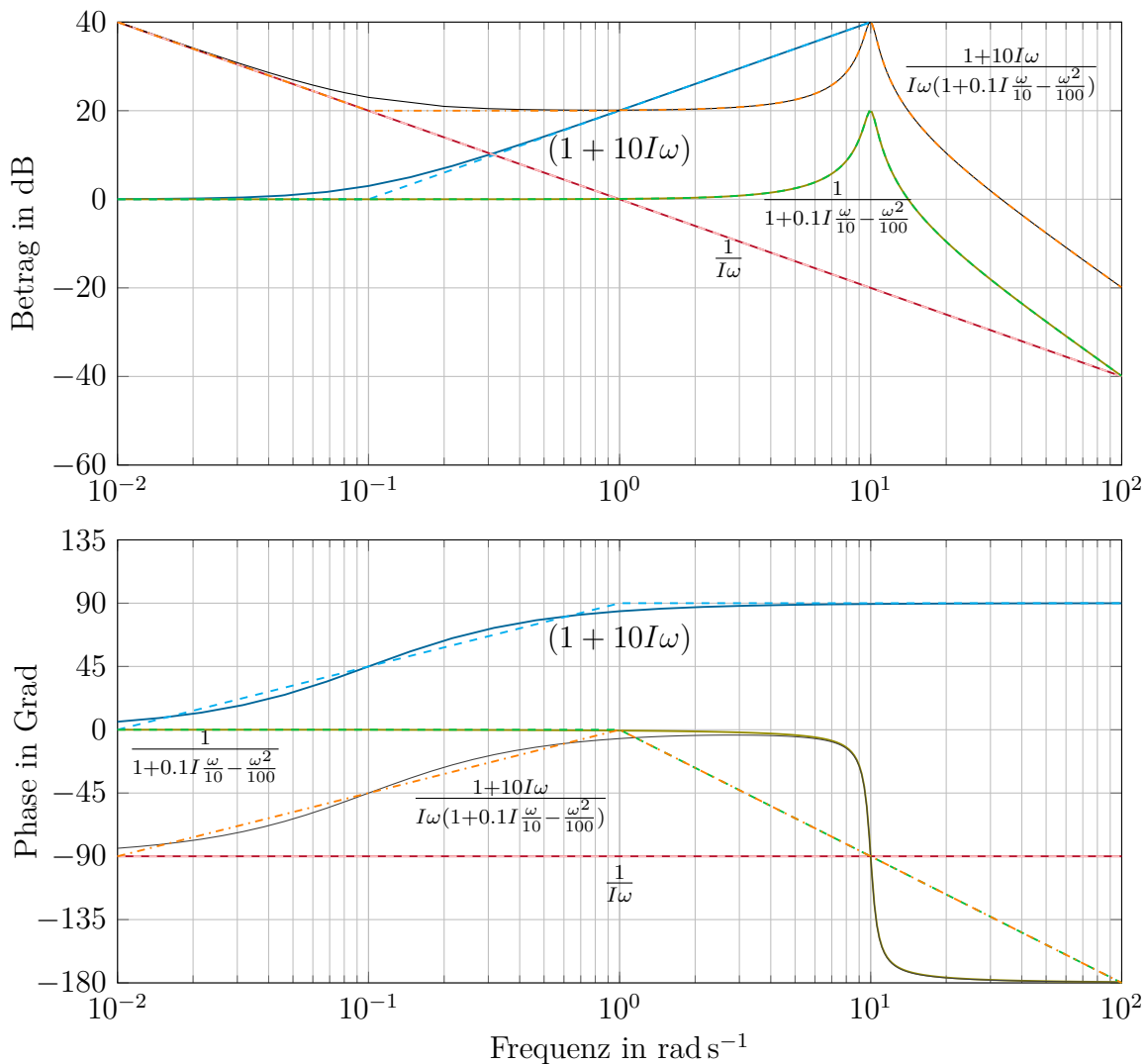


Abbildung 2: Bodediagramm.

3. Bearbeiten Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben

11 P. |

a) Gegeben ist die Übertragungsfunktion

2 P. |

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{s}. \quad (3)$$

i. Geben Sie die Zustandsdarstellung von (3) an.

1 P. |

ii. Kann für das System aus i. ein trivialer Beobachter eingesetzt werden? Begründen Sie Ihre Antwort!

1 P. |

b) Gegeben ist die Übertragungsfunktion der Strecke

6 P. |

$$G(s) = \frac{5}{\left(\frac{s}{\omega_1}\right)^2 + 2\xi\frac{s}{\omega_1} + 1} \quad (4)$$

mit  $\omega_1 = 3\sqrt{3}$  und  $\xi = 1$ .

i. Entwerfen Sie mittels des Frequenzkennlinienverfahrens einen PI-Regler der Form

3 P. |

$$R(s) = \frac{V_I(1 + sT_I)}{s} \quad (5)$$

so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises den folgenden Anforderungen genügt:

- Anstiegszeit  $t_r = 0.5 \text{ s}$
- prozentuelles Überschwingen  $\ddot{u} = 10 \%$
- bleibende Regelabweichung  $e_\infty = 0$

ii. Skizzieren Sie die Sprungantwort des geschlossenen Kreises und zeichnen Sie Anstiegszeit, Überschwingen und die bleibende Regelabweichung ein.

2 P. |

iii. Skizzieren Sie die Sprungantwort des PI-Reglers (5) und zeichnen Sie  $V_I$  und  $T_I$  ein.

1 P. |

c) Gegeben ist die Übertragungsfunktion

3 P. |

$$G(s) = \frac{4}{\left(1 + \frac{s}{2}\right)s}. \quad (6)$$

Bestimmen Sie die  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  mit der Abtastzeit  $T_a = 0.1 \text{ s}$ . **Hinweis:**  $\tanh(x) \approx x$  für  $|x| \ll 1$

**Lösung:**

a) i.

$$\dot{x} = u$$

ii. Nein, das System ist nicht stabil.

b)  $\omega_c = 3$ ,  $\phi = \frac{\pi}{3}$ ,  $T_I = \frac{\sqrt{3}}{9}$ ,  $V_I = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

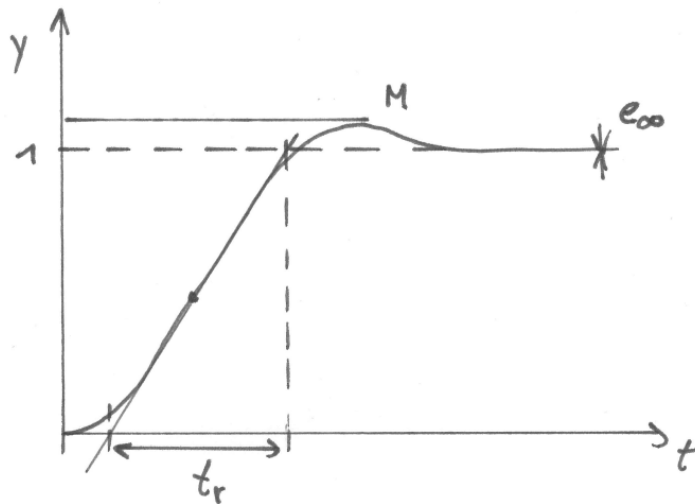


Abbildung 3: Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises

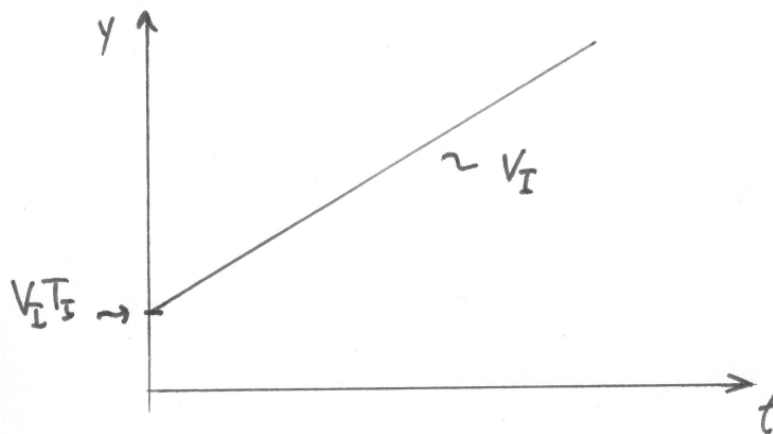


Abbildung 4: Sprungantwort des PI-Reglers

c)

$$G^\#(q) = 4 \frac{1 - q^{\frac{T_a}{2}}}{q} - 2 \frac{1 - q^{\frac{T_a}{2}}}{1 + \frac{q}{A}}, \quad A = \frac{2}{T_a} \tanh\left(\frac{T_a}{2}\right) \approx 2$$

$$\approx \frac{4 - 2T_a q}{q\left(1 + \frac{q}{2}\right)}$$

4. Lösen Sie folgende Aufgaben!

**11 P.**

- a) Gegeben ist das nichtlineare Differenzialgleichungssystem eines chemischen Prozesses **5 P.**

$$\dot{x}_1 = c_1 - c_2 x_1 + c_3 x_1^2 x_2 - c_4 x_1 \quad (7a)$$

$$\dot{x}_2 = c_2 x_1 - c_3 x_1^2 x_2 \quad (7b)$$

- i. Berechnen Sie die Ruhelagen  $(x_{1,R}, x_{2,R})$  des Systems! **2 P.**
  - ii. Linearisieren Sie das autonome System um eine allgemeine Ruhelage  $(x_{1,R}, x_{2,R})$ . **2 P.**
  - iii. Wie lautet der Zusammenhang zwischen dem Zustand  $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2]$  des Systems (7) und dem Zustand  $\Delta \mathbf{x}^T = [\Delta x_1, \Delta x_2]$  des linearisierten Systems? **1 P.**
- b) Bestimmen Sie für die in (8) gegebene Transitionsmatrix eines linearen, zeit-invarianten Systems **2 P.**

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (8)$$

- i. die dazugehörige Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$ , **1 P.**
  - ii. deren Inverse  $\Phi^{-1}(t)$ . **1 P.**
- c) Gegeben ist der in Abbildung 5 dargestellte Regelkreis mit der Übertragungsfunktion **4 P.**

$$G(s) = \frac{2(s-1)}{(s^2-4)}. \quad (9)$$

Welche der folgenden Regler führen zu einem intern stabilen Regelkreis? Begründen Sie Ihre Antworten!

$$R_1(s) = \frac{s-2}{s+10} \quad R_2(s) = \frac{16(1+s\frac{1}{2})}{s-10} \quad R_3(s) = 10$$

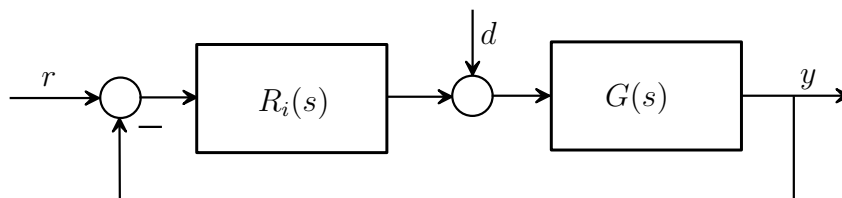


Abbildung 5: Regelkreis.



### Lösung:

a)

$$x_{1,R} = \frac{c_1}{c_4} \quad x_{2,R} = \frac{c_2 c_4}{c_1 c_3} \quad A = \begin{bmatrix} c_2 - c_4 & c_3 \frac{c_1^2}{c_4^2} \\ -c_2 & -c_3 \frac{c_1^2}{c_4^2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R + \Delta \mathbf{x}(t)$$

b)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad \Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{2t} \end{bmatrix}$$

c)

$$G(s) = \frac{2(s-1)}{(s^2-4)} = \frac{2(s-1)}{(s+2)(s-2)}$$

- $R_1(s)$  führt **nicht** zu einem intern stabilen Regelkreis da eine unerlaubte Pol-Nullstellenkürzung auftritt.
- $R_2(s)$  führt zu einem intern stabilen Regelkreis da der Zähler von  $1+R_2G = \frac{z(s)}{n(s)}$  mit  $z(s) = s^2 + 4s + 4$  ein Hurwitzpolynom ist.
- $R_3(s)$  führt **nicht** zu einem intern stabilen Regelkreis da der Zähler von  $1+R_3G = \frac{z(s)}{n(s)}$  mit  $z(s) = s^2 + 20s - 24$  kein Hurwitzpolynom ist.