

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 16.03.2018

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und
- ... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ 23.03.2018

☐ 26.03.2018

☐ 27.03.2018

Viel Erfolg!

1. Aufgabe **a)** und Aufgabe **b)** können voneinander unabhängig gelöst werden. **10 P.**

a) Gegeben ist die Differenzengleichung **5 P.**

$$y_k + y_{k-1} - 9y_{k-2} - 9y_{k-3} = u_{k-1} + u_{k-2} . \quad (1)$$

- i. Geben Sie eine zeitdiskrete Übertragungsfunktion für (1) an. **1 P.**
- ii. Geben Sie das System als Minimalrealisierung in Zustandsdarstellung mit dem Eingang u_k und dem Ausgang y_k an. **2 P.**
- iii. Geben Sie einen Anfangszustand an, welcher für $u_k = 0$ zur Lösungstrajektorie **2 P.**

$$\mathbf{x}_k = \lambda^k \mathbf{x}_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_+$$

mit einem skalaren Faktor λ führt.

Hinweis: $x^3 + x^2 - 9x - 9 = (x + 1)(x + 3)(x - 3)$

b) Bearbeiten sie folgende Aufgaben. **5 P.**

- i. In Abbildung 1 ist ein Pol-Nullstellendiagramm eines zeitdiskreten Systems dargestellt. In Abbildung 2 sind Sprungantworten verschiedener Systeme dargestellt. Welche Sprungantwort ist die des Systems mit den gegebenen Pol-Nullstellendiagramm? Begründen Sie auch warum die Sprungantworten jeweils (nicht) in Frage kommen. **3 P.**
- ii. Bestimmen Sie aus der Sprungantwort und dem Pol-Nullstellendiagramm die Übertragungsfunktion des Systems. **2 P.**

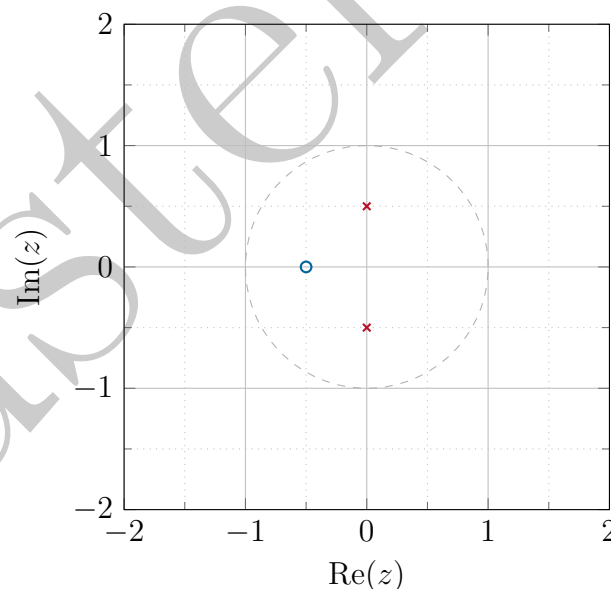


Abbildung 1: Pol-Nullstellen-Diagramm zu Aufgabe 2.

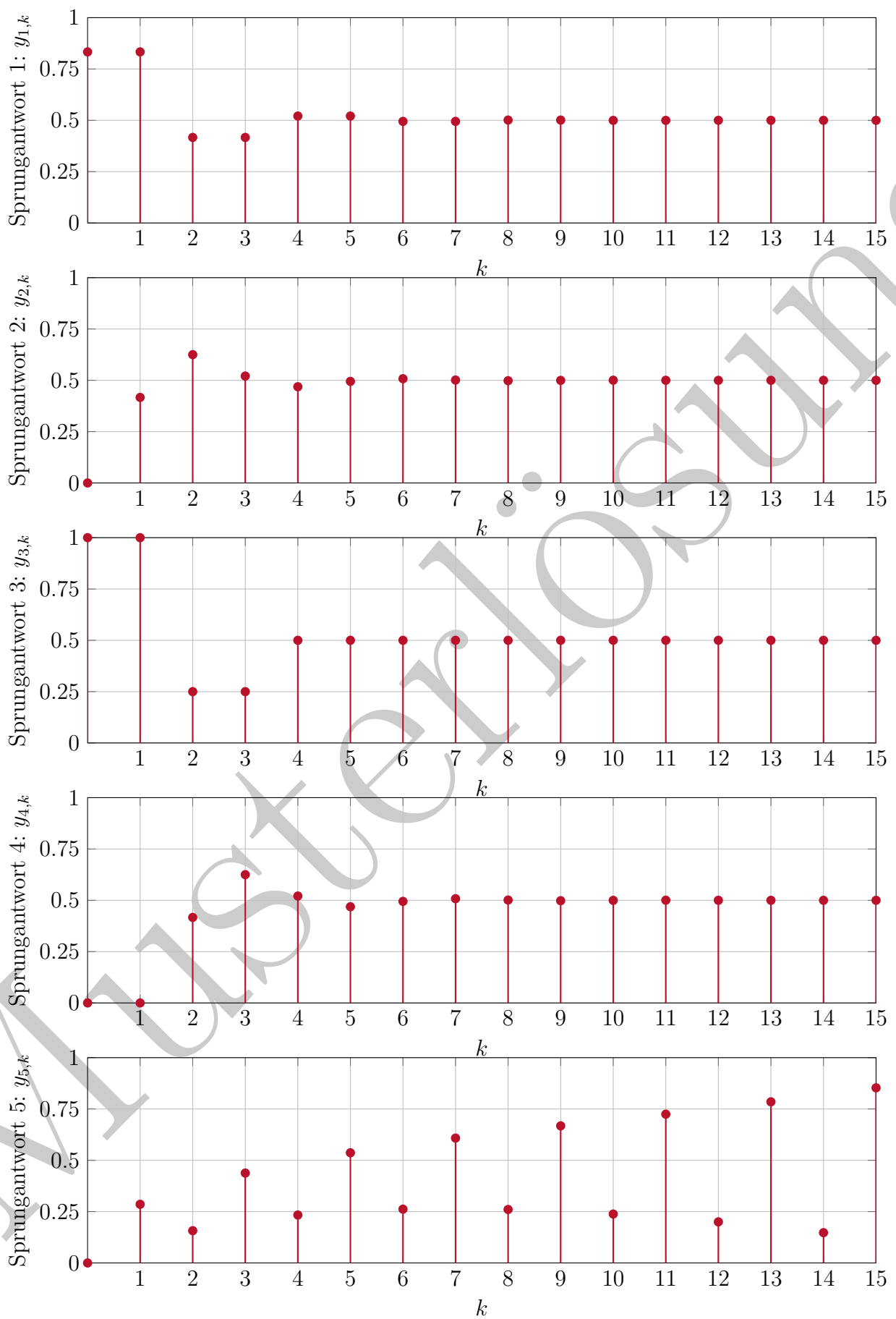


Abbildung 2: Sprungantworten zu Aufgabe 2.

Lösung:

- a) i. Gleichung (1) lässt sich im z -Bereich durch

$$y + yz^{-1} - 9yz^{-2} - 9yz^{-3} = uz^{-1} + uz^{-2}$$

darstellen. Die zeitdiskrete Übertragungsfunktion lautet somit

$$G(z) = \frac{y}{u} = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 + z^{-1} - 9z^{-2} - 9z^{-3}} = \frac{z^2 + z}{z^3 + z^2 - 9z - 9} = \frac{z}{(z-3)(z+3)}.$$

- ii. Die Steuerbarkeitsnormalform lautet

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k\end{aligned}$$

- iii. Für eine Trajektorie der gegebenen Form muss $\mathbf{x}_0$ ein Eigenvektor sein. Hierbei ist λ der zugehörige Eigenwert. Die Eigenvektoren lauten

$$\mathbf{x}_{0,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{0,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

für die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 3.$$

- b) i. Das System muss folgende Eigenschaften besitzen:

- A. Nicht sprungfähig, weil nur eine Nullstelle aber 2 Polstellen existieren.
- B. Stabil, weil beide Polstellen im Inneren des Einheitskreises liegen.
- C. Da $\text{grad } n - \text{grad } z = 1$ muss $y_1 \neq 0$ gelten.

- Sprungantwort 1 ist sprungfähig und verletzt damit Eigenschaft A.
- Sprungantwort 2 verletzt keine der Eigenschaften.
- Sprungantwort 3 ist sprungfähig und verletzt damit Eigenschaft A.
- Sprungantwort 4 verletzt Eigenschaft C.
- Sprungantwort 5 verletzt eigenschaft B.

Da Sprungantwort 2 als einzige keine der Bedingungen verletzt ist sie eindeutig die gesuchte Sprungantwort.

- ii. Aus dem Pol-Nullstellendiagramm in Abbildung 1 lässt sich ablesen, dass die Übertragungsfunktion die Form

$$G(z) = k \frac{z + 0.5}{z^2 + 0.5^2}$$

hat. Der Faktor k lässt sich jedoch nicht aus dem Pol-Nullstellendiagramm bestimmen. Aus der Sprungantwort ist ersichtlich, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0.5$$

gelten muss. Durch den Endwertsatz der z -Transformation muss

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{z-1} k \frac{z+0.5}{z^2+0.5^2} = k \frac{1.5}{1.25} \stackrel{!}{=} 0.5$$

gelten, womit sich $k = \frac{5}{12}$ ergibt.

2. Die Aufgaben a) - d) können getrennt voneinander bearbeitet werden. Gegeben sind die Bewegungsgleichungen

10 P.

$$\begin{aligned}\ddot{l} &= l\dot{l} - 4\dot{l} + \frac{1}{2}\cos(\gamma) \\ \ddot{\theta} &= \theta + l\dot{\theta} - \frac{2\varepsilon}{l}\sin(\gamma).\end{aligned}\tag{2}$$

- a) Führen Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x}^T = [l \ \dot{l} \ \theta \ \dot{\theta}]$ und den Eingangsvektor $\mathbf{u}^T = [\varepsilon \ \gamma]$ ein und geben Sie das System (2) in Zustandsdarstellung der Form

1 P.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\tag{3}$$

an.

- b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen dieses Systems für die gegebenen Zustände $l = l_R$ und $\theta = \theta_R$. **2 P.**
- c) Linearisieren Sie das System (2) um die gegebene Trajektorie $\mathbf{x}_s^T(t) = [l_s(t) \ 0 \ \theta_s(t) \ \omega_s(t)]$ und den gegebenen Eingang $\mathbf{u}_s^T(t) = [t \ -\frac{\pi}{2}]$. Geben Sie das linearisierte System an. **3 P.**
- d) Welche Aussagen können Sie über das um die Trajektorie linearisierte System hinsichtlich der Systemeigenschaften Linearität und Zeitinvarianz für eine allgemeine Trajektorie $\mathbf{x}_s^T(t)$ und einen allgemeinen Eingang $\mathbf{u}_s^T(t)$ treffen? **1 P.**
- e) Nehmen Sie nun an, dass das System (2) anstelle der Trajektorie $\mathbf{x}_s(t)$ um die Ruhelage $\mathbf{x}_R^T = [2 \ 0 \ \frac{1}{2} \ 0]$ mit dem konstanten Eingang $\mathbf{u}_R^T = [-\frac{3}{2} \ -\frac{\pi}{2}]$ linearisiert wird. Berechnen Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ von den beiden Eingängen zum Ausgang $\Delta y = \Delta x_1$. **3 P.**

Lösung:

a) Das System in Zustandsdarstellung lautet

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_2 - 4x_2 + \frac{1}{2} \cos(u_2) \\ x_4 \\ x_3 + x_1 x_3 - \frac{2u_1}{x_1} \sin(u_2) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ \dot{l} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{bmatrix}$$

b) Die Ruhelagen des Systems lauten

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} l_R \\ 0 \\ \theta_R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_R = \begin{bmatrix} \pm \frac{x_1}{2} (x_3 + x_1 x_3) \\ \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \end{bmatrix}$$

c) Das linearisierte System lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_{s,2}(t) & x_{s,1}(t) - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_{s,3}(t) + \frac{2u_{s,1}(t)}{x_{s,1}^2(t)} \sin u_{s,2}(t) & 0 & x_{s,1}(t) + 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_s(t) - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \theta_s(t) - \frac{2t}{l_s^2(t)} & 0 & l_s(t) + 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \sin(u_{s,2}(t)) \\ 0 & 0 \\ -\frac{2}{x_{s,1}} \sin(u_{s,2}(t)) & -\frac{2u_{s,1}}{x_{s,1}} \cos(u_{s,2}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{2}{l_s(t)} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d) Linear und zeitvariant

e) Aufgrund der Struktur der resultierenden Matrizen

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ergeben sich zwei entkoppelte Systeme. Die Übertragungsmatrix lautet $\mathbf{G}(s) = [0 \ G_2(s)]$ mit $G_2(s) = \frac{1}{2s(s+2)}$.

3. In Abbildung 3 ist ein Regelkreis dargestellt.

10 P. |

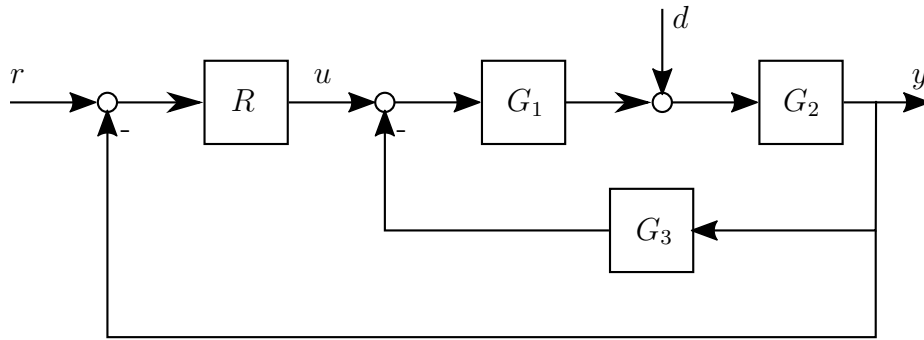


Abbildung 3: Blockschaltbild eines Regelkreises.

Die Regelstrecke besteht aus den Teilstrecken

$$G_1 = \frac{1000}{s}$$

$$G_2 = \frac{1}{s+10}$$

$$G_3 = 10$$

und der Regler besitzt die Übertragungsfunktionen

$$R = 100 + \frac{1}{s}$$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion T_{uy} der Strecke vom Eingang u zum Ausgang y .

1 P. |

b) Zeichnen Sie im beiliegenden Blatt den Amplitudengang sowie den Phasengang der Übertragungsfunktion T_{uy} der Regelstrecke ein.

3 P. |

Hinweis: Falls es eine Resonanzüberhöhung gibt, ist diese auch einzuzeichnen.
 $\log(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \log(x)$

c) Gehen Sie davon aus, dass das System BIBO stabil ist. Wie sieht der Ausgang $y(t)$ stationär für eine rampenförmige Störung $d(t) = t\sigma(t)$ aus?

2 P. |

d) Bei einer gegebenen Führungsgröße

4 P. |

$$r = 10\sigma(t)$$

wird im eingeschwungenen Zustand am Ausgang

$$y = 11\sigma(t) + \sin(10t)$$

gemessen. Bestimmen Sie die auf das System einwirkende Störung d .

Lösung:

a) Die Übertragungsfunktion lautet

$$T_{uy} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 G_3} = \frac{1000}{s^2 + 10s + 10000} .$$

b) Das Bodediagramm ist in Abbildung 4 dargestellt.

c) Nullsetzen des Eingangs r und Umzeichnen des Regelkreises liefert das in Abbildung 5 dargestellte Blockschaltbild. Hier kann die Übertragungsfunktion

$$T_{dy} = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 (R + G_3)} = \frac{s^2}{s^3 + 10s^2 + 110000s + 1000} \quad (4)$$

abgelesen werden. Anwenden des Endwertsatzes der Laplace-Transformation ergibt

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} T_{dy} = 0 .$$

d) Die Führungsübertragungsfunktion ergibt sich durch

$$T_{ry} = \frac{R T_{uy}}{1 + R T_{uy}} = \frac{100000s + 1000}{s^3 + 10s^2 + 110000s + 1000}$$

Und mit dem Endwertsatz der Laplace-Transformation lässt sich der eingeschwungene Ausgang zufolge der Führungsgröße zu

$$y_{r\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} 10 T_{ry} = 10$$

bestimmen. Die eingeschwungene Ausgangsgröße zufolge der Störung muss somit

$$y_{d\infty} = \sigma(t) + \sin(10t)$$

betragen. Nachdem wie in c) gezeigt eine rampenförmige Störung ausgeregelt werden kann, muss eine Störung der Form

$$d_1(s) = \frac{a}{s^3}$$

aufgeschaltet werden um eine konstante Störung am Ausgang hervor zu rufen. Wobei sich der Koeffizient a durch den Endwertsatz zu $a = 1000$ bestimmen lässt. Der zweite Teil ergibt sich durch

$$d_2(t) = \frac{\sin(10t - \arg(T_{dy}|_{s=10j}))}{|T_{dy}|_{s=10j}} = 10990 \sin(10t - 90^\circ) = -10990 \cos(10t)$$

Die Gesamtstörung lautet

$$d = d_1(t) + d_2(t) = 500t^2 - 10990 \cos(10t) .$$

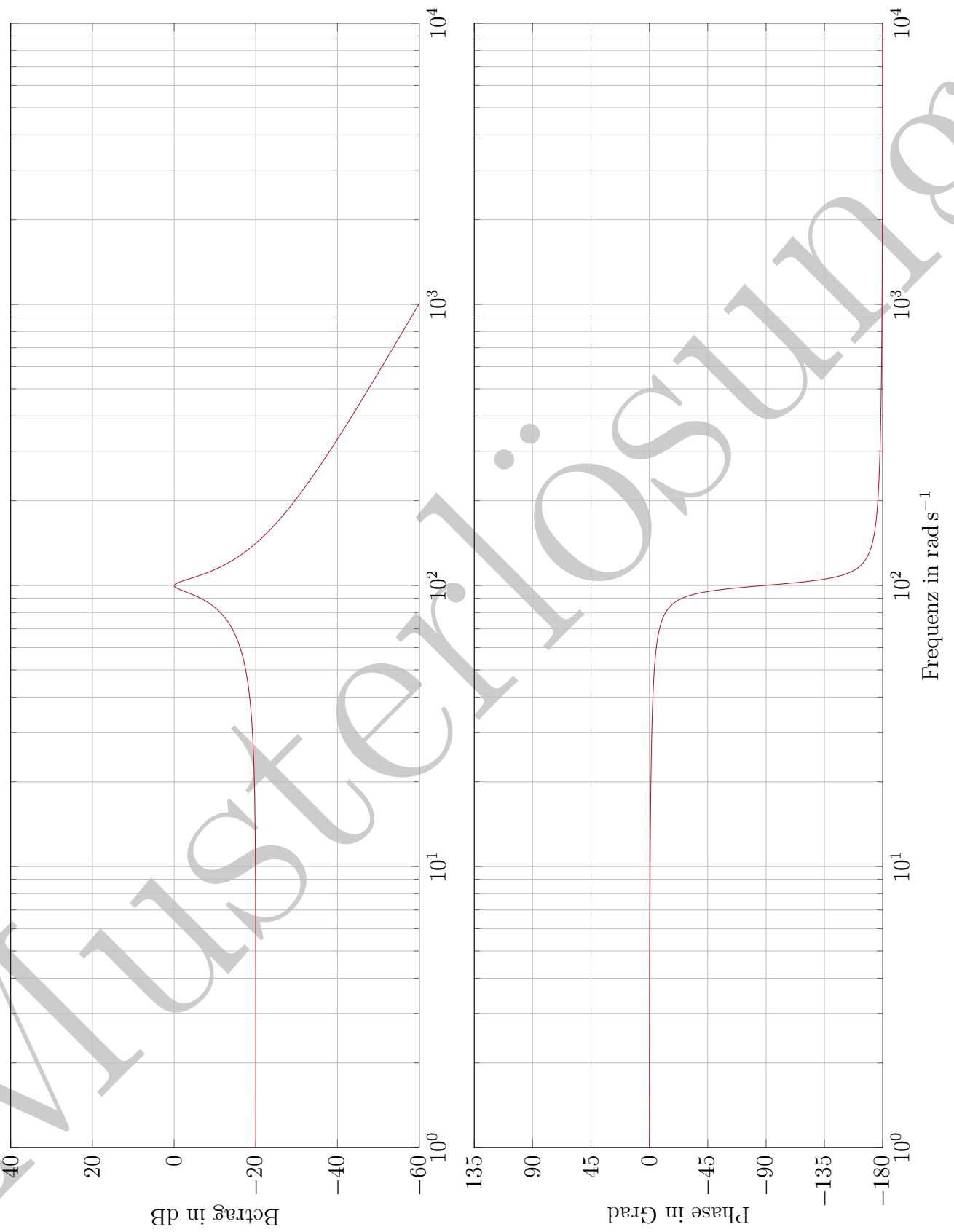


Abbildung 4: Lösung Bode-Diagramm zu Aufgabe 3

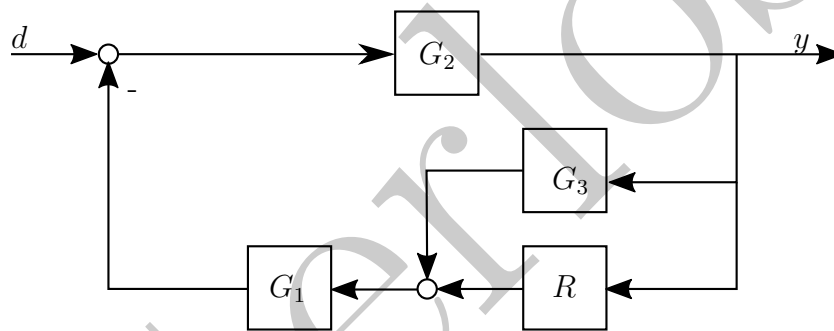


Abbildung 5: Blockschaltbild eines Regelkreises.

4. Die Aufgaben a) - d) können getrennt voneinander bearbeitet werden. Das zeitdiskrete System

10 P.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \quad (5)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \quad (6)$$

wird um den Integratorzustand

$$x_{I,k+1} = x_{I,k} + (r_k - \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k) \quad (7)$$

erweitert.

- a) Zeigen Sie, dass das erweiterte System (5)-(7) vollständig erreichbar ist. **2 P.**
- b) Wie muss der Rückführungsvektor $\mathbf{k}_e^T$ für einen Zustandsregler des erweiterten Systems (5)-(7) lauten, um ein Dead-Beat Verhalten des geschlossenen Regelkreises zu erhalten? **4 P.**
- c) Ist der geschlossene Kreis mit dem Zustandsregler von Punkt 4b vom Eingang (u_k) zum Ausgang (y_k) BIBO-stabil? Begründen Sie ausführlich ihre Antwort. **1 P.**
- d) Gegeben ist die q-Übertragungsfunktion **3 P.**

$$G^\#(q) = 10 \frac{\left(\frac{2q}{3} - \frac{1}{6}\right) \left(\frac{q}{8} + 3\right)}{(q+12) \left(\frac{q}{12} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{3}\right)}. \quad (8)$$

Für welche Abtastzeit T_a ist diese Strecke

- i. stabil?
- ii. realisierbar?
- iii. sprungfähig?

Begründen Sie ihre Antworten.

Lösung:

- a) Die erweiterten Systemmatrizen lauten

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } \Gamma_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Erreichbarkeitsmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hat vollen Rang. Somit ist das erweiterte System vollständig erreichbar.

- b) Das gewünschte charakteristische Polynom lautet $p_{g,soll} = z^3$. Der Rückführvektor lautet

$$\mathbf{k}_e^T = -\mathbf{v}_1^T \Phi_e^3 = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{8} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & -1 \end{bmatrix}$$

- c) Da alle Eigenwerte bei 0 platziert wurden, ist der geschlossene Kreis BIBO-stabil.
- d) i. Das System ist für alle Abtastzeiten stabil.
ii. Das System ist für alle Abtastzeiten realisierbar.
iii. Das System ist für alle $T_a \neq 8$ sprungfähig.